ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

BÍ QUYẾT LẤY ĐIỂM 10

MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Nguyễn Tấn Hộp

MO15KMT – KHOA MÔI TRƯỜNG & TÀI NGUYÊN

(LƯU HÀNH NỘI BỘ)

TP. HỒ CHÍ MINH – 19/12/2017

Download bản mới nhất tại địa chỉ:

http://bit.ly/nguyentanhop

✍ Mọi ý kiến thắc mắc vui lòng gởi về địa chỉ:

✉ hopnguyenktv@gmail.com

"Đường tuy ngắn, không đi không đến.

Việc tuy dễ, không làm không xong."

– Tuân Tử –

"Người thầy tầm thường tường thuật. Người thầy tốt giải thích.

Người thầy giỏi thể hiện. Người thầy vĩ đại truyền cảm hứng."

– William Arthur Ward –

"Những gì chúng ta làm cho bản thân rồi cũng sẽ mất.

Những gì chúng ta làm cho người khác sẽ còn lại mãi mãi."

CHÚC CÁC BẠN THÀNH CÔNG VÀ ĐẠT ĐƯỢC NHIỀU ƯỚC MƠ

SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ:

Số chính xác	Số gần đúng	Số làm tròn	Sai số tuyệt đối	Sai số thực sự	Sai số tương đối
A	a	a*	Δa =|a|.δ	Δ = |a – A|	δa

Ví dụ: *Làm tròn đến* ***2 chữ số lẻ*** *sau dấu chấm thập phân của các số trong các biểu thức sau: a = 5.3649 ; b = 2.6750 ; c = 1.2965 ; d ≤ 2.8701 ; e ≥ 1.2399*

Cách giải:

a = 5.36**49** ⇒ a ≈ 5.36

b = 2.67**50** ⇒ b ≈ 2.68

c = 1.2965 ⇒ c ≈ 1.30

d ≤ 2.87**01** ⇒ d ≈ 2.88 (**Chú ý: Sai số làm tròn lên**).

e ≥ 1.23**99** ⇒ e ≈ 1.23

Ví dụ: *Biết A có giá trị gần đúng là a = 0.3102 với sai số tương đối là δa = 0.30%. Ta làm tròn a thành a* = 0.31. Sai số tuyệt đối của a* là:*

$$\Delta_{a^*} = \theta_{a^*} + \Delta_a = |a - a^*| + |a| \times \delta_a = |0.3102 - 0.31| + |0.3102| \times 0.3\% = 0.0012$$

Ví dụ: *Biết A có giá trị gần đúng là a = 1.2145 với sai số tương đối δa = 0.16%. Ta làm tròn a thành a* theo nguyên tắc quá bán* ***đến chữ số lẻ thứ 2 sau dấu phẩy****. Sai số tuyệt đối của a* là:*

Số a được làm tròn thành a* = 1.21

$$\Delta_{a^*} = \theta_{a^*} + \Delta_a = |a - a^*| + |a| \times \delta_a = |1.2145 - 1.21| + |1.2145| \times 0.16\% = 0.0065$$

Ví dụ: *Biết A có giá trị gần đúng là a = 2.9734 với sai số tương đối δa = 0.69%. Ta làm tròn a thành a* = 2.97. Sai số tuyệt đối của a* là:*

$$\Delta_{a^*} = \theta_{a^*} + \Delta_a = |a - a^*| + |a| \times \delta_a = |2.9734 - 2.97| + |2.9734| \times 0.69\% = 0.0240$$

CHỮ SỐ ĐÁNG TIN:

Chữ số đáng tin k được tính theo công thức:

$$\Delta a \leq 0.5 \times 10^{-k} \quad \rightarrow \quad k \leq -log(2\Delta a)$$

Ví dụ: *Cho a = 0.3708 với sai số tương đối là δa = 0.51%. Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là:*

$$\Delta a = |a| \times \delta_a = 0.3708 \times 0.51\% = 0.00189 < 0.5 \times 10^{-2}$$

Có 2 chữ số phần thập phân đáng tin ⇒ Số đáng tin là 0.37 ⇒ **Có 3 chữ số đáng tin.**

<u>*Cách 2.*</u> Tính theo công thức:

$$k \leq -log(2\Delta a) \quad \leftrightarrow \quad k \leq 2.42 \quad \leftrightarrow \quad k = 2$$

Có 2 chữ số phần thập phân đáng tin ⇒ **Có 3 chữ số đáng tin.**

Ví dụ: *Cho a = 5.1778 với sai số tương đối là δa = 0.62%. Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là:*

$$\Delta a = |a| \times \delta_a = 5.1778 \times 0.62\% = 0.0321 < 0.5 \times 10^{-1}$$

Có 1 chữ số phần thập phân đáng tin ⇒ Số đáng tin là 5.1 ⇒ **Có 2 chữ số đáng tin.**

SAI SỐ TUYỆT ĐỐI CỦA HÀM Y = F(X, Y, Z):

$$\Delta_f = |f_x'|.\Delta_x + |f_y'|.\Delta_y + |f_z'|.\Delta_z$$

Ví dụ: *Cho hàm $f = x^3 - xy - y^3$. Biết x = 3.8175 ±0.0017 và y = 3.7032 ±0.0029. Sai số tuyệt đối của f là:*

$$\Delta_f = |f_x'|.\Delta_x + |f_y'|.\Delta_y = |3x^2 - y| \times 0.0017 + |-x - 3y^2| \times 0.0029$$

Bấm CALC, nhập **X** = 3.8175 và **Y** = 3.7032. **Đáp số:** Δ_f = 0.1985.

Ví dụ: *Cho hàm $f = x^3 + xy + y^3$. Biết x = 4.7693 ±0.0018 và y = 2.3745 ±0.0084. Sai số tuyệt đối của f là:*

$$\Delta_f = |f_x'|.\Delta_x + |f_y'|.\Delta_y = |3x^2 + y| \times 0.0018 + |x + 3y^2| \times 0.0084 = 0.3093$$

KHOẢNG CÁCH LY NGHIỆM:

Là khoảng đóng [a,b] hoặc khoảng mở (a,b) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình f(x) = 0. Nghĩa là f(a).f(b) < 0.

SAI SỐ TỔNG QUÁT:

$$|x^* - \bar{x}| \leq \frac{|f(x^*)|}{m} \ (m \text{ là } min\{|f'(a)|, |f'(b)|\})$$

Ví dụ: *Phương trình f(x) = $2x^3$ + 12x -15 = 0 trong khoảng cách ly nghiệm [1,2] có nghiệm gần đúng là x* = 1.03. Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của x* là:*

Cách giải:

$|f'(x)| = |6x^2 + 12| \ \rightarrow \ |f'(1)|\,;|f'(2)| \ \rightarrow \ min = 18 = m \ \rightarrow \ SHIFT - STO - A$

$$|x^* - \bar{x}| \leq \frac{|f(x^*)|}{A}$$

Bấm CALC, nhập x* = 1.03. Ta được sai số = 0.0253.

Ví dụ: *Phương trình f(x) = $3x^3$ + 13x – 6 = 0 trên khoảng cách ly nghiệm [0;1] có nghiệm gần đúng là x* = 0.45. Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của x* là:*

$$|f'(x)| = |9x^2 + 13| \ \rightarrow \ |f'(0)| \text{ và } |f'(1)| \ \rightarrow min = 13 \ \rightarrow \ SHIFT - STO - A$$

$$|x^* - \bar{x}| \leq \frac{|f(x^*)|}{A} = \frac{|f(0.45)|}{13} = 0.0095$$

Ví dụ: *Phương trình f(x) = $3x^3$ + 10x – 24 = 0 trên khoảng cách ly nghiệm [1;2] có nghiệm gần đúng là x* = 1.47. Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của x* là:*

Đáp số: Δ = 0.0121.

PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI: (Nhớ chuyển sang radian – SHIFT-MODE-4(Rad))

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0 trong khoảng cách ly nghiệm [a,b]:

$$Tính\ f(a)\ ,f(b), x = \frac{a+b}{2}$$

Tính $f(x)$. Nếu $f(x)$ và $f(a)$ cùng dấu thì đặt a = x. Ngược lại đặt b = x.

Sai số phương pháp chia đôi:

$$\Delta_{x_n} \leq \frac{|b-a|}{2^{n+1}} \quad với\ n\ là\ số\ lần\ chia\ đôi$$

Ví dụ: *Phương trình f(x) = $2x^3 - 6x^2 + 13x - 4.5 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [0,1]. Theo phương pháp chia đôi, nghiệm gần đúng x_5 của phương trình là:*

Cách giải:

Ta có: *f(a) = f(0) < 0 ; f(b) = f(1) > 0*

Lần	a = 0	b = 1	x = (a+b)/2	f(x)
	–	+		
0	0	1	0.5	+
1	0	0.5	0.25	–
2	0.25	0.5	0.375	–
3	0.375	0.5	0.4375	+
4	0.375	0.4375	0.40625	–
5	0.40625	0.4375	**0.421875**	

Nghiệm gần đúng x_5 của phương trình là **0.4219** (nghiệm làm tròn theo quy tắc làm tròn)

Ví dụ: *Phương trình $f(x) = \sqrt{x} - cosx = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [0;1]. Theo phương pháp chia đôi, nghiệm gần đúng x_5 của phương trình và sai số của nó là:*

Đáp số: $x_5 = 0.6406$ và $\Delta x_5 = 0.0157$. (Nhớ chuyển sang Radian vì hàm chứa lượng giác)

PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN:

$$\text{Hệ số co } q \text{ với: } |g'(x)| \leq q \text{ hay } \max_{x\in[a,b]}|g'(x)| = q \quad , \quad 0 \leq q < 1$$

Công thức tiên nghiệm: **(để xác định số lần lặp)**

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Công thức hậu nghiệm: **(để xác định sai số)**

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Ví dụ: *Cho phương trình* $x = \sqrt[4]{3x+15}$ *thỏa điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn* $x_0=2.3$ *thì nghiệm gần đúng* x_4 *theo phương pháp lặp đơn là:*

Cách giải:

Bấm máy: $\sqrt[4]{3X+15}$

CALC X = 2.3 = x_1

CALC X = Ans = x_2

CALC X = Ans = x_3

CALC X = Ans = x_4

Đáp số: $x_4 = 2.1522$

Ví dụ: *Cho phương trình* $x = \sqrt[3]{2x+6}$ *thỏa điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn* $x_0=2.2$ *thì nghiệm gần đúng* x_2 *theo phương pháp lặp đơn là:*

Đáp số: $x_2 = 2.1804$

Ví dụ: *Cho phương trình* $x = \sqrt[3]{6x+11}$ *thỏa điều kiện lặp đơn trên [3,4]. Nếu chọn* $x_0=3.1$ *thì nghiệm gần đúng* x_2 *theo phương pháp lặp đơn là:*

Đáp số: $x_2 = 3.0920$

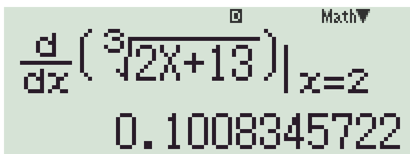
Ví dụ: *Cho phương trình* $x = \sqrt[3]{2x+13}$ *thỏa điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Sử dụng phương pháp lặp, chọn* $x_0 = 2.63$*, tìm số lần lặp tối thiểu để được nghiệm với sai số tiên nghiệm nhỏ hơn* 10^{-9}*.*

Cách giải:

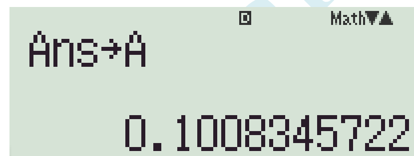
<u>Bước 1.</u> Tính hệ số co q:

$$|g'(a)| \text{ và } |g'(b)| \quad \to \quad max|g'| = q$$

Lưu giá trị tính được vào biến A (SHIFT – STO – A).



➔



<u>Bước 2.</u> Sai số tiên nghiệm < 10^{-9}:

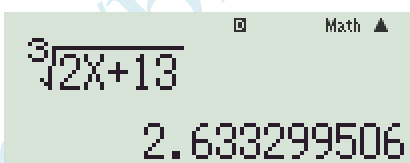
$$\frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| < 10^{-9} \to n > \log_q\left[\frac{10^{-9}.(1-q)}{|x_1 - x_0|}\right]$$

Ta tính giá trị x_1 và $x_0 = 2.63$ (tính giống bài trên):

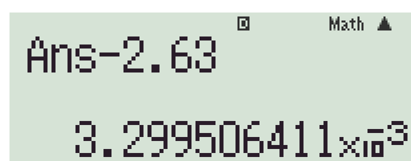
Bấm máy: $\sqrt[3]{2X+13}$

CALC X = 2.63 = x_1

➔

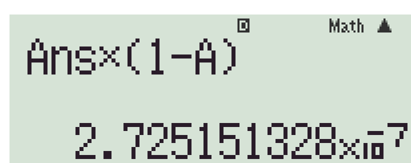


➔



➔

➔



➔

➔ Số lần lặp tối thiểu là 7.

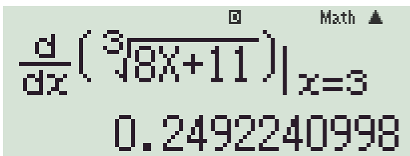
Ví dụ: *Cho phương trình* $x = \sqrt[3]{8x + 11}$ *thỏa điều kiện lặp đơn trên [3,4]. Nếu chọn* x_0*=3.5 thì sai số của nghiệm gần đúng* x_2 *theo công thức hậu nghiệm là:*

Cách giải:

Bước 1. Tính hệ số co q:

$$|g'(a)| \text{ và } |g'(b)| \quad \rightarrow \quad max|g'| = q$$

Lưu giá trị tính được vào biến A (SHIFT – STO – A).



➔

Bước 2. Áp dụng công thức hậu nghiệm:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Bấm máy:

$$B = g(X) : \frac{A}{1-A}|B - X| : X = B$$

CALC X = x_0 = 3.5 =

$\Rightarrow x_1 \Rightarrow \Delta x_1$

$\Rightarrow x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 0.0085$

Ví dụ: *Cho phương trình* $x = \sqrt[3]{6x + 16}$ *thỏa điều kiện lặp đơn trên [3,4]. Nếu chọn* x_0*=3.3 thì sai số tuyệt đối nhỏ nhất của nghiệm gần đúng* x_2 *theo công thức tiên nghiệm:*

Đáp số: $\Delta x_2 = 0.0002$

Ví dụ: *Cho phương trình* $x = \sqrt[3]{2x + 6}$ *thỏa điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn* x_0*=2.2 thì sai số tuyệt đối nhỏ nhất của nghiệm gần đúng* x_2 *theo công thức hậu nghiệm:*

Đáp số: $\Delta x_2 = 0.0005$.

PHƯƠNG PHÁP NEWTON, ĐIỀU KIỆN FOURIER:

Công thức nghiệm:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Công thức đánh giá sai số tổng quát:

$$|x^* - \bar{x}| \leq \frac{|f(x^*)|}{m} \ (m \text{ là } min\{|f'(a)|, |f'(b)|\})$$

Ví dụ: *Phương trình f(x) = $5x^3-7x^2+19x-16=0$ trong khoảng cách ly nghiệm [0.5 , 1]. Với $x_0 = 0.6$ nghiệm gần đúng x_2 theo phương pháp Newton là:*

Cách giải:

Đạo hàm: $f'(x) = 15x^2 - 14x + 19$

Bấm máy:

$$X - \frac{f(X)}{f'(X)} \quad \rightarrow \quad X - \frac{5X^3 - 7X^2 + 19X - 16}{15X^2 - 14X + 19}$$

CALC X = 0.6 = x_1

CALC X = Ans = $x_2 \Rightarrow x_2 = 0.9493$

Ví dụ: *Phương trình f(x) = $3x^3-6x^2+19x-14=0$. Với $x_0 = 0.9$ nghiệm gần đúng x_1 theo phương pháp Newton là:*

Đáp số: $x_1 = 0.8724$

Ví dụ: *Phương trình f(x) = $6x^3-13x^2+12x-27=0$. Với $x_0 = 2.2$ nghiệm gần đúng x_3 theo phương pháp Newton là:*

Đáp số: $x_3 = 2.1912$

Ví dụ: *Phương trình $f(x) = 4x^3+6x^2+17x+22.5=0$ trong khoảng cách ly nghiệm [-2 , -1]. Theo phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, sai số nghiệm x_2 theo công thức sai số tổng quát là:*

Cách giải:

$f(-2) < 0$; $f(-1) > 0$

$f'(x) = 12x^2 + 12x + 17$

$f''(x) = 24x + 12$

$f(a).f''(a) > 0$ chọn $x_0 = a$; $f(a).f''(a) < 0$ chọn $x_0 = b$.

Trong bài toán này $f(-2) < 0$, $f''(-2) < 0$ nên $f(-2).f''(-2) > 0$. Ta chọn $x_0 = a = -2$

Tính giá trị m:

$$|f'(x)| = |12x^2 + 12x + 17| \quad \to \quad |f'(-2)|, |f'(-1)| \quad \to \quad min = 17 = m$$

Tính x_2 và sai số tổng quát:

$$X = X - \frac{4x^3 + 6x^2 + 17x + 22.5}{12x^2 + 12x + 17} : \frac{|4x^3 + 6x^2 + 17x + 22.5|}{17}$$

CALC X = – 2 → = x_1 → = Δx_1 → = x_2 → = Δx_2 = 0.0130

Ví dụ: *Cho phương trình $f(x) = e^x + 2.1x^2 + sinx - 6.8 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [1;2]. Sử dụng phương pháp Newton, xác định x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 của phương trình trên và đánh giá sai số của nó.*

Đáp số: $x_2 = 1.1560$; $\Delta x_2 = 0.0178$. (Nhớ chuyển qua Radian vì hàm chứa lượng giác)

Ví dụ: *Phương trình $f(x) = 6x^3+9x^2+15x+1=0$ trong khoảng cách ly nghiệm [-0.1;0.0]. Theo phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, sai số nghiệm x_1 theo công thức sai số tổng quát là:*

Đáp số: $\Delta x_1 = 0.0029$

MA TRẬN XÁC ĐỊNH DƯƠNG:

Định thức con chính cấp k của ma trận A là định thức có được từ ma trận con chính cấp k (ma trận có được từ giao của k hàng đầu và k cột đầu của A), ký hiệu D_k

Ma trận vuông A xác định dương khi và chỉ ***khi tất cả những định thức con chính*** của nó đều lớn hơn 0.

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & \alpha & 7 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. *Với điều kiện nào của α, A là ma trận đối xứng, xác định dương.*

Cách giải:

$D_1 = |13| = 13 > 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 13 & -2 \\ -2 & \alpha \end{vmatrix} = 13\alpha - 4 > 0 \;\; \leftrightarrow \;\; \alpha > 4/13 = 0.3077$

$D_3 = \begin{vmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & \alpha & 7 \\ -3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 78\alpha + 42 + 42 - 9\alpha - 637 - 24$

$\leftrightarrow D_3 = 69\alpha - 577 > 0 \leftrightarrow \alpha > 8.3623$

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -4 & \alpha & 7 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. *Với điều kiện nào của α, A là ma trận đối xứng, xác định dương.*

Đáp số: $\alpha > 9.8333$

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha \\ 2 & 4 & 2 \\ \alpha & 2 & 5 \end{pmatrix}$. *Với những giá trị nguyên nào của α thì ma trận A là xác định dương.*

Đáp số: $\alpha \in (-1;3) \Rightarrow \alpha = \{0,1,2\}$

PHÂN TÍCH A = LU THEO PHƯƠNG PHÁP DOOLITTLE:

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}} \end{cases}$$

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Phân tích A = LU theo phương pháp Doolittle.*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ l_{21} & \mathbf{1} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta có $u_{1j} = a_{1j}$ nên:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Và $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$ nên:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3/2} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Các phần tử còn lại tính bình thường theo thứ tự u_{22}, u_{23}, l_{32}, u_{33} hoặc công thức sau:

$$u_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \quad ; \quad u_{23} = a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - \dfrac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}}{a_{22} - \dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}} \quad ; \quad u_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}} - \frac{\left(a_{32} - \dfrac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}\right)\left(a_{23} - \dfrac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}\right)}{a_{22} - \dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}}$$

Đáp số:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 6/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 10/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Phân tích A = LU theo phương pháp Doolittle.

Ta có: $\boldsymbol{u_{1j} = a_{1j}}$ và $\boldsymbol{l_{i1} = a_{i1}/u_{11}}$ nên:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & l_{32} & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}.u_{12} = \frac{\boldsymbol{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}}{\boldsymbol{a_{11}}} = -7$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}.u_{13} = \frac{\boldsymbol{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}}{\boldsymbol{a_{11}}} = 5$$

$$u_{24} = a_{24} - l_{21}.u_{14} = \frac{\boldsymbol{a_{24}a_{11} - a_{21}a_{14}}}{\boldsymbol{a_{11}}} = -4$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}.u_{12}}{u_{22}} = \frac{\boldsymbol{a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12}}}{\boldsymbol{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}} = -1$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}.u_{13} - l_{32}.u_{23}$$
$$= \boldsymbol{a_{33}} - \frac{\boldsymbol{a_{31}a_{13}}}{\boldsymbol{a_{11}}} - \frac{\boldsymbol{(a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12})(a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13})}}{\boldsymbol{a_{22}a_{11}^2 - a_{21}a_{12}a_{11}}} = 7$$

$$u_{34} = a_{34} - l_{31}.u_{14} - l_{32}.u_{24}$$
$$= \boldsymbol{a_{34}} - \frac{\boldsymbol{a_{31}a_{14}}}{\boldsymbol{a_{11}}} - \frac{\boldsymbol{(a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12})(a_{24}a_{11} - a_{21}a_{14})}}{\boldsymbol{a_{22}a_{11}^2 - a_{21}a_{12}a_{11}}} = 3$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}.u_{12}}{u_{22}} = \frac{\boldsymbol{a_{42}a_{11} - a_{41}a_{12}}}{\boldsymbol{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}} = 2.4286$$

$$l_{43}=\frac{a_{43}-l_{41}.u_{13}-l_{42}.u_{23}}{u_{33}}$$

$$=\frac{\boldsymbol{a_{43}-\frac{a_{41}a_{13}}{a_{11}}-\frac{(a_{42}a_{11}-a_{41}a_{12})(a_{23}a_{11}-a_{21}a_{13})}{a_{22}a_{11}^2-a_{21}a_{12}a_{11}}}}{\boldsymbol{a_{33}-\frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}-\frac{(a_{32}a_{11}-a_{31}a_{12})(a_{23}a_{11}-a_{21}a_{13})}{a_{22}a_{11}^2-a_{21}a_{12}a_{11}}}}=-0.3061$$

$$u_{44}=a_{44}-l_{41}.u_{14}-l_{42}.u_{24}-l_{43}.u_{34}=3.6327$$

Ví dụ: *Cho* $A=\begin{pmatrix}5&3&3\\9&7&3\\6&4&5\end{pmatrix}$. *Phân tích A = LU theo phương pháp Doolittle, tổng các phần tử tr(U) =* $U_{11}+U_{22}+U_{33}$ *của ma trận U là:*

Bấm máy: MODE – 6(MATRIX) để tính các định thức.

Đáp số: $U_{11}+U_{22}+U_{33}=D_1+\frac{D_2}{D_1}+\frac{D_3}{D_2}=8.6000$

Ví dụ: *Cho* $A=\begin{pmatrix}8&6&2\\3&4&9\\1&8&6\end{pmatrix}$. *Phân tích A = LU theo phương pháp Doolittle, phần tử* L_{32} *của ma trận L là:*

$$\begin{pmatrix}8&6&2\\3&4&9\\1&8&6\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3\to h_3-\frac{1}{8}h_1]{h_2\to h_2-\frac{3}{8}h_1}\begin{pmatrix}8&6&2\\0&\mathbf{7/4}&bỏ\\0&\mathbf{29/4}&bỏ\end{pmatrix}$$

$$L_{32}=\frac{29/4}{7/4}=\frac{29}{7}=4.1429$$

Ví dụ: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases}12.5x_1+4.2x_2-2.5x_3=23.19\\3.5x_1+7.5x_2-4.3x_3=13.17\\-5.7x_1-3.8x_2+17.5x_3=12.75\end{cases}$

Phân tích A = LU theo phương pháp Doolittle, phần tử U_{33} *của ma trận U là:*

Đáp số: U_{33} = 15.2871.

PHÂN TÍCH A = BBT THEO PHƯƠNG PHÁP CHOLESKY: (ma trận đối xứng)

$$\begin{cases} b_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ b_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{b_{11}} \end{cases}$$

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$. *Phân tích A = BB^T theo phương pháp Cholesky.*

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Ta có $b_{11} = \sqrt{a_{11}}$ nên:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Và $b_{i1} = \frac{a_{i1}}{b_{11}}$ nên:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 3/\sqrt{5} & b_{22} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Các phần tử còn lại tính bình thường theo thứ tự b_{22}, b_{32}, b_{33} hoặc công thức sau:

$$b_{22} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{21}^2}{a_{11}}} \quad ; \quad b_{32} = \frac{\left(a_{32} - \dfrac{a_{31}a_{21}}{a_{11}}\right)}{\sqrt{a_{22} - \dfrac{a_{21}^2}{a_{11}}}} \quad ; \quad b_{33} = \sqrt{a_{33} - (b_{31}^2 + b_{32}^2)}$$

Đáp số:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 3/\sqrt{5} & 4/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & -13\sqrt{5}/10 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 4/\sqrt{5} & -13\sqrt{5}/10 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. *Phân tích A = BB*^{T} *theo phương pháp Cholesky, tổng các phần tử tr(B) =* $B_{11} + B_{22} + B_{33}$ *của ma trận B là:*

$$\boldsymbol{B_{11} = \sqrt{D_1}} \quad ; \quad \boldsymbol{B_{kk} = \sqrt{D_k/D_{k-1}} \quad (k > 1)}$$

Đáp số: $B_{11} + B_{22} + B_{33} = \sqrt{D_1} + \sqrt{D_2/D_1} + \sqrt{D_3/D_2} = 5.2690$

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 25 \end{pmatrix}$. *Phân tích A = BB*^{T} *theo phương pháp Cholesky, phần tử* B_{32} *của ma trận B là:*

Đáp số: $B_{32} = 11\sqrt{2}/4 = 3.8891.$

CHUẨN & SỐ ĐIỀU KIỆN CỦA MA TRẬN:

Ví dụ: *Tính chuẩn 1 và chuẩn vô cùng của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

Chuẩn 1 **(max tổng cột):**

$\|A\|_1 = \max\{2+5+6 , 1+3+7 , 4+2+3\} = 13$

Chuẩn ∞ **(max tổng hàng):**

$\|A\|_\infty = \max\{2+1+4 , 5+3+2 , 6+7+3\} = 16$

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$. *Số điều kiện theo chuẩn vô cùng của A là:*

Cách giải:

Nhập ma trận A vào máy tính. Tính A^{-1}. Ta được $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/116 & -1/29 \\ -7/116 & 4/29 \end{pmatrix}$

$\|A\|_\infty = \max\{16+4 , 7+9\} = 20$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max\{9/116+1/29 , 7/116+4/29\} = 23/116$

Số điều kiện của ma trận A theo chuẩn vô cùng **k ≤ $\|A\|.\|A^{-1}\|$** = 20×23/116 = 3.9656

Chú ý: **(Số điều kiện chuẩn làm tròn lên).**

Số điều kiện k(A) thỏa $1 \le k(A) \le +\infty$

k(A) càng gần 1 càng ổn định. k(A) càng xa 1 càng không ổn định.

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. *Số điều kiện tính theo chuẩn vô cùng của ma trận A là:*

Đáp số: $k_\infty(A) = 16.6130$

Ví dụ: *Cho* $A = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. *Số điều kiện tính theo chuẩn một của ma trận A là:*

Đáp số: $k_1(A) = 24.0000$

PHƯƠNG PHÁP LẶP JACOBI VÀ GAUSS-SEIDEL:

Ma trận T của phương pháp lặp **Jacobi** có dạng:

$$T = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{\mathbf{-1}} \begin{pmatrix} 0 & đổi \\ giữ & 0 \end{pmatrix}$$

Trong đó: Ma trận A chứa a, b là phần tử đường chéo trội. Ma trận B đổi dấu phần tử trên đường chéo chính và giữ dấu phần tử dưới đường chéo chính.

Ma trận T của phương pháp lặp **Gauss-Seidel** có dạng:

$$T = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ giữ & b \end{pmatrix}^{\mathbf{-1}} \begin{pmatrix} 0 & đổi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trong đó: Ma trận A chứa a, b là phần tử đường chéo trội và giữ dấu phần tử dưới đường chéo chính. Ma trận B đổi dấu phần tử trên đường chéo chính.

Công thức tiên nghiệm:

$$||X^{(m)} - \bar{X}|| \le \frac{||T||^m}{1 - ||T||} ||X^{(1)} - X^{(0)}||$$

Công thức hậu nghiệm:

$$||X^{(m)} - \bar{X}|| \le \frac{||T||}{1 - ||T||} ||X^{(m)} - X^{(m-1)}||$$

Ví dụ: *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} 15x_1 - 2x_2 = 3 \\ -4x_1 + 8x_2 = 5 \end{cases}$ *tìm ma trận lặp theo phương pháp Jacobi và Gauss-Seidel.*

Cách giải:

Theo **Jacobi**, ma trận T có dạng:

$$T = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/15 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Theo **Gauss-Seidel**, ma trận T có dạng:

$$T = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/15 \\ 0 & 1/15 \end{pmatrix}$$

PHƯƠNG PHÁP LẶP JACOBI:

Ví dụ: *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} 13x_1 - 2x_2 = 6 \\ -6x_1 - 15x_2 = 6 \end{cases}$ *với* $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.4 \end{pmatrix}$ *vectơ* $x^{(4)}$ *theo phương pháp lặp* ***Jacobi*** *là:*

Cách giải:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{13}(6 + 2x_2) \\ x_2 = -\dfrac{1}{15}(6 + 6x_1) \end{cases}$$

Bấm máy: X = (6 + 2B) ÷ 13 : B = (6 + 6A) ÷ (–15) : A = X

CALC B = – 0.4, A = 0.3

Nhấn dấu = cho tới nghiệm $x^{(4)}$. **Đáp số:** A = 0.3765 ; B = – 0.5502.

Ví dụ: *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} 17x_1 - 7x_2 = 4 \\ 6x_1 + 8x_2 = 4 \end{cases}$ *với* $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.2 \end{pmatrix}$, *sử dụng phương pháp* ***Jacobi***, *tính chỉ số n nhỏ nhất để* $\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|_\infty < 0.6000$.

Cách giải:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{17}(4 + 7x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{8}(4 - 6x_1) \end{cases}$$

Bấm máy: X = (4 + 7B) ÷ 17 : B = (4 – 6A) ÷ 8 : A = X

CALC B = 0.2 ; A = 0.9 =

$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(1)} - x^{(0)}$	$\Vert x^{(1)} - x^{(0)} \Vert_\infty$
A = 0.9 B = 0.2	A = 27/85 B = – 7/40	A = – 99/170 B = – 3/8	99/170 ≈ 0.5824 < 0.6000 → 1 lần lặp

Cách 2: (Xem giải thích ở phần lặp Gauss-Seidel phía sau)

A : B : C = (4 + 7B) ÷ 17 : D = (4 – 6**A**) ÷ 8 : |C – A| : |D – B| : A = C : B = D

Ví dụ: *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 = 3 \\ 2x_1 + 13x_2 = 4 \end{cases}$ *với* $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$, *sai số* $\Delta x^{(2)}$ *của vectơ* $x^{(2)}$ *theo phương pháp* ***Jacobi***, *sử dụng công thức hậu nghiệm với chuẩn vô cùng là:*

Cách giải:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11}(3 + 5x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{13}(4 - 2x_1) \end{cases}$$

Bấm máy: X = (3 + 5B) ÷ 11 : B = (4 – 2A) ÷ 13 : A = X

CALC B = 0.6, A = 0.8

Nhấn dấu = cho tới nghiệm $x^{(1)}$, $x^{(2)}$:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 12/65 \end{pmatrix} \text{ và } x^{(2)} = \begin{pmatrix} 51/143 \\ 32/143 \end{pmatrix} \to x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{pmatrix} -27/143 \\ 28/715 \end{pmatrix}$$

$$\to ||x^{(2)} - x^{(1)}|| = 27/143$$

Tính ma trận T:

Ma trận T của phương pháp lặp Jacobi có dạng:

$$T = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & đổi \\ giữ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/11 \\ 2/13 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad \|T\|_\infty = \frac{5}{11}$$

Áp dụng công thức hậu nghiệm:

$$\left|\left|X^{(m)} - \bar{X}\right|\right| \leq \frac{||T||}{1 - ||T||} \left|\left|x^{(2)} - x^{(1)}\right|\right| = \frac{\frac{5}{11}}{1 - \frac{5}{11}} \times \frac{27}{143} = 0.1574$$

PHƯƠNG PHÁP LẶP GAUSS-SEIDEL:

Ví dụ: *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 = 7 \\ -5x_1 + 18x_2 = 5 \end{cases}$ *với* $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ *vectơ* $x^{(4)}$ *theo phương pháp lặp **Gauss-Seidel** là:*

Cách giải:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{10}(7 - 7x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{18}(5 + 5x_1) \end{cases}$$

Bấm máy: A = (7 – 7B) ÷ 10 : B = (5 + 5A) ÷ 18

CALC B = 0.4, (không nhập A)

Nhấn dấu = cho tới nghiệm x$^{(4)}$. **Đáp số:** A = 0.4233 ; B = 0.3954

Ví dụ: *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} 15x_1 + 3x_2 = 6 \\ 6x_1 + 13x_2 = 2 \end{cases}$ *với* $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$*, sử dụng phương pháp **Gauss-Seidel**, tính chỉ số n nhỏ nhất để* $\left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\|_\infty < 0.0070$

Cách giải:

Biến C và D để tính các giá trị x mới

Biến A và B để lưu các giá trị x cũ

|C – A| và |D – B| để tính chuẩn vô cùng

Bấm máy: (Áp dụng chuẩn vô cùng)

A : B : C = (6 – 3B) ÷ 15 : D = (2 – 6**C**) ÷ 13 : |C – A| : |D – B| : A = C : B = D

Nhập A = 0.2 ; B = 0.2, nhấn dấu = đến khi |C – A| và |D – B| **đều** < 0.0070 thì dừng lại.

Đáp số: 3 lần (Có thể tham khảo ví dụ lặp Jacobi ở trên)

<u>Giả sử:</u> Nếu đề bài cho chuẩn một, ta thay dấu 2 chấm thành dấu cộng như sau:

A : B : C = (6 – 3B) ÷ 15 : D = (2 – 6**C**) ÷ 13 : |C – A| **+** |D – B| : A = C : B = D

Ví dụ: *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 = 6 \\ -7x_1 + 14x_2 = 4 \end{cases}$ *với* $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.7 \end{pmatrix}$*, sai số* $\Delta x^{(2)}$ *của vectơ* $x^{(2)}$ *theo phương pháp* ***Gauss-Seidel****, sử dụng công thức tiên nghiệm với chuẩn vô cùng.*

Cách giải:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{9}(6 + 2x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{14}(4 + 7x_1) \end{cases}$$

Bấm máy: A = (6 + 2B) ÷ 9 : B = (4 + 7A) ÷ 14

CALC B = 0.7, (không nhập A)

Nhấn dấu = cho tới nghiệm $x^{(1)}$:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 37/45 \\ 439/630 \end{pmatrix} \text{ và } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.7 \end{pmatrix} \rightarrow x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/45 \\ -0.00317 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow ||x^{(1)} - x^{(0)}|| = 1/45$$

Tính ma trận T:

Ma trận T của phương pháp lặp Gauss-Seidel có dạng:

$$T = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ giữ & b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & đổi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/9 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \|T\|_\infty = \frac{2}{9}$$

Áp dụng công thức tiên nghiệm:

$$\left|\left|X^{(m)} - \bar{X}\right|\right| \le \frac{||T||^2}{1 - ||T||} \left|\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right|\right| = \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^2}{1 - \frac{2}{9}} \times \frac{1}{45} = 0.0015$$

NỘI SUY ĐA THỨC:

Ví dụ: *Xây dựng* ***đa thức nội suy*** *của hàm số y = f(x) được xác định bởi:*

x	*0*	*1*	*3*
y	*1*	*-1*	*2*

Cách giải:

Đa thức nội suy có dạng $y = P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Thay lần lượt các giá trị x, y ta có hệ:

$$\begin{cases} a_0 + 0.a_1 + 0.a_2 = 1 \\ a_0 + 1.a_1 + 1.a_2 = -1 \\ a_0 + 3.a_1 + 9.a_2 = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -19/6 \\ a_2 = 7/6 \end{cases} \rightarrow \ y = P(x) = 1 - \frac{19}{6}x + \frac{7}{6}x^2$$

NỘI SUY LAGRANGE:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n^k(x).y_k = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.y_k$$

Ví dụ*: Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số y = sin(πx) tại các nút nội suy* $x_0=0$, $x_1=1/6$, $x_2=1/2$.

x	*0*	*1/6*	*1/2*
y=sin(πx)	*0*	*1/2*	*1*

$$L_3(x) = \sum_{k=1}^{3} \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})}.0 + \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-0\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}.\frac{1}{2} + \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}.1 = \frac{7}{2}x - 3x^2$$

Ví dụ: *Cho bảng số:*

x	*1.1*	*1.7*	*2.4*	*3.3*
y	*3.52*	*3.3*	*α*	*4.5*

Sử dụng đa thức ***nội suy Lagrange****, tìm giá trị của α để đa thức nội suy có giá trị xấp xỉ của đạo hàm tại x = 1.8 là y'(1.8) = 2.8.*

Cách giải:

Cách 1. (**Nội suy đa thức**) – (Tham khảo thêm cách giải ở **Câu 12 – Phần ôn tập**)

Đặt $y = P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

Thay các giá trị vào ta được:

x		Phương trình
1.1	y = 3.52	$a_0 + 1.1a_1 + 1.21a_2 + 1.331a_3 = 3.52$
1.7	y = 3.3	$a_0 + 1.7a_1 + 2.89a_2 + 4.913a_3 = 3.3$
3.3	y = 4.5	$a_0 + 3.3a_1 + 10.89a_2 + 35.937a_3 = 4.5$
1.8	y' = 2.8	$a_1 + 2 \times 1.8a_2 + 3 \times 3.24a_3 = 2.8$

Từ hệ phương trình ta có ma trận: (Dùng máy tính VINACAL để giải)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.1 & 1.21 & 1.331 \\ 1 & 1.7 & 2.89 & 4.913 \\ 1 & 3.3 & 10.89 & 35.937 \\ 0 & 1 & 3.6 & 9.72 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3.52 \\ 3.3 \\ 4.5 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow C = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} a_0 = 19.94834071 \\ a_1 = -28.92976669 \\ a_2 = 15.40996246 \\ a_3 = -2.443014213 \end{pmatrix}$$

Thay vào $y(2.4) = P(2.4) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \mathbf{5.506055943}$

Cách 2. (**Nội suy Lagrange**)

Đa thức nội suy Lagrange có dạng $L_3(x) = \sum_{k=0}^{3} p_3^k(x).y_k$ trong đó p_3^k được xác định là:

$$p_3^0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1.7)(x-2.4)(x-3.3)}{(1.1-1.7)(1.1-2.4)(1.1-3.3)} = \frac{A}{-1.716}$$

$$p_3^1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1.1)(x-2.4)(x-3.3)}{(1.7-1.1)(1.7-2.4)(1.7-3.3)} = \frac{B}{0.672}$$

$$p_3^2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1.1)(x-1.7)(x-3.3)}{(2.4-1.1)(2.4-1.7)(2.4-3.3)} = \frac{C}{-0.819}$$

$$p_3^3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1.1)(x-1.7)(x-2.4)}{(3.3-1.1)(3.3-1.7)(3.3-2.4)} = \frac{D}{3.168}$$

$$L_3(x) = \frac{3.52A}{-1.716} + \frac{3.3B}{0.672} + \frac{\alpha C}{-0.819} + \frac{4.5D}{3.168}$$

Nhắc lại: $(u.v.w)' = u.v + v.w + w.u$

$$y'(x) = L_3'(x) = \frac{3.52A'}{-1.716} + \frac{3.3B'}{0.672} + \frac{\alpha C'}{-0.819} + \frac{4.5D'}{3.168}$$

$$= \frac{3.52}{-1.716}[(x-1.7)(x-2.4)+(x-2.4)(x-3.3)+(x-3.3)(x-1.7)]$$

$$+\frac{3.3}{0.672}[(x-1.1)(x-2.4)+(x-2.4)(x-3.3)+(x-3.3)(x-1.1)]$$

$$+\frac{\alpha}{-0.819}[(x-1.1)(x-1.7)+(x-1.7)(x-3.3)+(x-3.3)(x-1.1)]$$

$$+\frac{4.5}{3.168}[(x-1.1)(x-1.7)+(x-1.7)(x-2.4)+(x-2.4)(x-1.1)]$$

$$y'(1.8) = \frac{3.52}{-1.716}\times 0.69 + \frac{3.3}{0.672}\times(-0.57) + \frac{\alpha}{-0.819}\times(-1.13) + \frac{4.5}{3.168}\times(-0.41)$$

$$= 2.8$$

Bấm máy: SHIFT – SOLVE X $\Rightarrow$ **α = 5.506055913**

TỈ SAI PHÂN CẤP 1: (trên đoạn $[x_k\ ,\ x_{k+1}]$)

$$f[x_k\,,x_{k+1}] = \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}$$

TỈ SAI PHÂN CẤP 2: (trên đoạn $[x_k\ ,\ x_{k+2}]$)

$$f[x_k\,,x_{k+1}\,,x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}\,,x_{k+2}]-f[x_k\,,x_{k+1}]}{x_{k+2}-x_k}$$

NỘI SUY NEWTON:

Newton Tiến: $N_n^{(1)}(x) = y_0 + f[x_0,x_1](x-x_0)$

$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

Newton Lùi: $N_n^{(2)}(x)$

$$= y_n + f[x_{n-1},x_n](x-x_n) + f[x_{n-2},x_{n-1},x_n](x-x_{n-1})(x-x_n) + \ \ldots$$
$$+ f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

Ta có:

$$L_n(x) = N_n^{(1)}(x) = N_n^{(2)}$$

Ví dụ: *Cho bảng giá trị của hàm số y = f(x):*

x	*2*	*4*	*7*	*8*
y	*3*	*6*	*7*	*9*

Dùng đa thức ***nội suy Newton*** *tiến xuất phát từ nút x_0 của hàm số y = f(x), hãy xấp xỉ đạo hàm cấp 1 và giá trị của hàm số tại x = 0.5.*

Cách giải:

Ta lập bảng tỉ sai phân (TSP):

x_k	$f(x_k)$	TSP 1	TSP 2	TSP 3
2	**3**			
		(6–3)/(4–2)=**3/2**		
4	6		**–7/30**	
		(7–6)/(7–4)= 1/3		**13/120**
7	7		5/12	
		(9–7)/(8–7)= 2		
8	9			

Theo công thức nội suy Newton tiến:

$$N_3^{(1)}(x) = 3 + \frac{3}{2}(x-2) - \frac{7}{30}(x-2)(x-4) + \frac{13}{120}(x-2)(x-4)(x-7)$$

$$y'(x) = \frac{3}{2} - \frac{7}{30}[(x-2)+(x-4)]$$

$$+\frac{13}{120}[(x-2)(x-4)+(x-4)(x-7)+(x-7)(x-2)]$$

Đáp số:

$$y(0.5) = -\frac{267}{64} \quad ; \quad y'(0.5) = \frac{1081}{160}$$

SPLINE BẬC 3: Đa thức bậc 3 g(x) có dạng:

$$g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

Nhiệm vụ cần tìm a_k, b_k, c_k, d_k để suy ra đa thức $g_k(x)$.

$$h_0 = (x_1 - x_0)\ ;\ \ h_1 = (x_2 - x_1)\ ;\ \dots\ ;\ \ h_{n-1} = (x_n - x_{n-1})$$

SPLINE BẬC 3 TỰ NHIÊN:

Đặt 2 ma trận A và B có dạng như sau:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{h_0} & \mathbf{2}(\boldsymbol{h_0} + \boldsymbol{h_1}) & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \mathbf{2}(\boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{h_2}) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & \mathbf{2}(\boldsymbol{h_2} + \boldsymbol{h_3}) & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & \mathbf{2}(\boldsymbol{h_3} + \boldsymbol{h_4}) & \boldsymbol{h_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \\ 3\dfrac{y_4 - y_3}{h_3} - 3\dfrac{y_3 - y_2}{h_2} \\ 3\dfrac{y_5 - y_4}{h_4} - 3\dfrac{y_4 - y_3}{h_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Giải hệ AC = B ta tìm được ma trận $C = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n)^T$.

Các hệ số của $g_k(x)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_k = y_k \\ b_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \dfrac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) \\ d_k = \dfrac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}\ , \forall k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Ví dụ: *Xây dựng spline bậc 3 tự nhiên nội suy bảng số:*

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

Cách giải:

Cách 1. Ta có: n = 3, $h_0 = h_1 = h_2 = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Giải hệ phương trình: (Vì spline bậc 3 tự nhiên nên $c_0 = 0$ và $c_3 = 0$).

$$\begin{cases} 4c_1 + 1c_2 = 3 \\ 1c_1 + 4c_2 = 6 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2/5 \\ c_2 = 7/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 0 \\ a_0 = y_0 = 1 \\ b_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = 13/15 \\ d_0 = \dfrac{c_1 - c_0}{3h_0} = 2/15 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} k = 1 \\ a_1 = y_1 = 2 \\ b_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = 19/15 \\ d_1 = \dfrac{c_2 - c_1}{3h_1} = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 2 \\ a_2 = y_2 = 4 \\ b_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2) = 46/15 \\ d_2 = \dfrac{c_3 - c_2}{3h_2} = -7/15 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 + (13/15)x + (2/15)x^3, & x \in [0,1] \\ 2 + (19/15)(x-1) + (2/5)(x-1)^2 + (1/3)(x-1)^3, & x \in [1,2] \\ 4 + (46/15)(x-2) + (7/5)(x-2)^2 - (7/5)(x-2)^3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

Cách 2. (Tham khảo cách giải phần Spline ràng buộc)

Ví dụ: *Cho bảng số:*

x	*1.3*	*1.7*	*2.3*	*2.7*
y	*1.2*	*8.6*	*4.7*	*6.6*

Sử dụng Spline bậc ba tự nhiên nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại x = 1.4 và x = 2.5.

Đáp số: g(1.4) = 3.6346 ; g(2.5) = 5.0319

SPLINE BẬC 3 RÀNG BUỘC:

$$g'(a) = \alpha \ ; \ g'(b) = \beta$$

Ma trận A và B của Spline ràng buộc có chút khác biệt so với Spline tự nhiên:

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2h_0} & \boldsymbol{h_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{h_0} & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & \boldsymbol{h_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{h_4} & \boldsymbol{2h_4} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3\frac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha} \\ 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\frac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ 3\frac{y_4 - y_3}{h_3} - 3\frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ 3\frac{y_5 - y_4}{h_4} - 3\frac{y_4 - y_3}{h_3} \\ \boldsymbol{3\beta - 3\frac{y_5 - y_4}{h_4}} \end{pmatrix}$$

Giải hệ AC = B ta tìm được ma trận $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n)^T$.

Các hệ số của $g_k(x)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_k = y_k \\ b_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \dfrac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) \\ d_k = \dfrac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, \forall k = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Ví dụ: *Cho bảng số sau:*

x	*1.1*	*1.6*	*2.0*
y	*6.4*	*5.7*	*6.4*

Sử dụng spline bậc ba g(x) thỏa điều kiện $g'(1.1) = 1.5$ *,* $g'(2) = 0.5$ *nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại x = 1.4 và x = 1.8.*

Cách giải:

Bài toán thuộc loại Spline ràng buộc với $\alpha = 1.5$ và $\beta = 0.5$

$a_k = y_k$; $h_k = x_{k+1} - x_k$; $h_0 = 0.5$; $h_1 = 0.4$

$$\Delta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$$

Ma trận $B = 3(\Delta_{k+1} - \Delta_k)$

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_1 + h_0) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$

Ma trận $C = A^{-1}.B$

$$b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) = \Delta_k - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k)$$

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$$

Nếu $b_0 \neq \alpha$ thì bài toán sai.

x_k	h_k	$a_k = y_k$	Δ_k	B	c_k	b_k	d_k
1.1	0.5	6.4	$\alpha = 1.5$	– 8.7	$-\frac{2611}{180}$	1.5	$\frac{1567}{90}$
1.6		5.7	– 1.4	9.45	$\frac{209}{18}$		
	0.4		1.75			$\frac{19}{360}$	$-\frac{5305}{288}$
2.0		6.4	$\beta = 0.5$	– 3.75	$-\frac{1511}{144}$		

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	6.4	1.5	$-\frac{2611}{180}$	$\frac{1567}{90}$
1	5.7	$\frac{19}{360}$	$\frac{209}{18}$	$-\frac{5305}{288}$

Ta có 2 hàm số:

$$\begin{cases} g(x) = 6.4 + 1.5(x-1.1) - \dfrac{2611}{180}(x-1.1)^2 + \dfrac{1567}{90}(x-1.1)^3\,, & x \in [1.1\,,1.6] \\ g(x) = 5.7 + \dfrac{19}{360}(x-1.6) + \dfrac{209}{18}(x-1.6)^2 - \dfrac{5305}{288}(x-1.6)^3\,, & x \in [1.6\,,2.0] \end{cases}$$

Đáp số: g(1.4) = 6.0146 ; g(1.8) = 6.0276

Ví dụ: *Cho bảng số sau:*

x	*1.1*	*1.6*	*2.1*
y	*2.2*	*5.3*	*6.6*

Sử dụng spline bậc ba g(x) thỏa điều kiện $g'(1.1) = 0.2$, $g'(2.1) = 0.5$ *nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại x = 1.4 và x = 1.9.*

Đáp số: g(1.4) = 3.7558 ; g(1.9) = 6.4148

(Xem lời giải ở **Câu 2 – Phần ôn tập**)

XẤP XỈ HÀM THỰC NGHIỆM:

Có 3 dạng đơn giản thường gặp trong thực tế của f(x) là:

$f(x) = A + Bx$

$f(x) = A + Bx + Cx^2$

$f(x) = A.p(x) + B.q(x)$

---

* *Trường hợp $f(x) = A + Bx$:*

Ví dụ: *Tìm hàm $f(x) = A + Bx$ xấp xỉ tốt nhất bảng số:*

x	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*4*	*5*	*6*
y	*1*	*2*	*2*	*3*	*4*	*4*	*5*	*5*	*6*	*7*

Cách giải:

Bấm máy: MODE ⇒ STAT ⇒ A+BX ⇒ Nhập X và Y ⇒ Nhấn AC để Thoát.

Nhấn SHIFT ⇒ 1 ⇒ REG ⇒ Đọc các giá trị A, B.

Đáp số: A = 0.7671 ; B = 1.0803 ⇒ $f(x) = 0.7671 + 1.0803x$

* *Trường hợp $f(x) = A + Bx + Cx^2$:*

Ví dụ: *Tìm hàm $f(x) = A + Bx + Cx^2$ xấp xỉ tốt nhất bảng số:*

x	*1*	*1*	*2*	*3*	*3*	*4*	*5*
y	*4.12*	*4.18*	*6.23*	*8.34*	*8.38*	*12.13*	*18.32*

Cách giải:

Bấm máy: MODE ⇒ STAT ⇒ _+CX^2 ⇒ Nhập X và Y ⇒ Nhấn AC để Thoát.

Nhấn SHIFT ⇒ 1 ⇒ REG ⇒ Đọc các giá trị A, B, C.

Đáp số: A = 4.30 ; B = – 0.71 ; C = 0.69 ⇒ $f(x) = 4.30 - 0.71x + 0.69x^2$

* *Trường hợp f(x) = A.p(x) + B.q(x)*

Ví dụ: *Tìm hàm f(x) = A.$\sqrt{x}$ + B.cos(x) xấp xỉ tốt nhất bảng số:*

x	*1.0*	*1.2*	*1.4*	*1.6*	*1.8*	*2.0*
y	*2.27*	*2.37*	*2.45*	*2.52*	*2.60*	*2.62*

Cách giải:

Cách 1 (Nên dùng): **(Nhớ đổi qua Radian vì hàm chứa lượng giác)**

Bấm máy: SHIFT ⇒ MODE ⇒ Mũi tên xuống ⇒ STAT ⇒ Frequency ⇒ ON

MODE ⇒ STAT ⇒ A+BX ⇒ Cột X nhập $\sqrt{X}$, cột Y nhập cos(**X**), nhấn AC.

SHIFT ⇒ 1 ⇒ SUM ⇒ $\sum x^2$ ⇒ SHIFT-STO-A

SHIFT ⇒ 1 ⇒ SUM ⇒ $\sum xy$ ⇒ SHIFT-STO-B

SHIFT ⇒ 1 ⇒ SUM ⇒ $\sum y^2$ ⇒ SHIFT-STO-D

SHIFT ⇒ 1 ⇒ DATA ⇒ Nhập Y vào cột FREQ **(không được nhập ở bước trên)**

SHIFT ⇒ 1 ⇒ VAR ⇒ $\bar{x}$ ⇒ × ⇒ SHIFT ⇒ 1 ⇒ VAR ⇒ n ⇒ SHIFT-STO-C

SHIFT ⇒ 1 ⇒ VAR ⇒ $\bar{y}$ ⇒ × ⇒ SHIFT ⇒ 1 ⇒ VAR ⇒ n ⇒ SHIFT-STO-M

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Bx + Dy = M \end{cases}$$

Giá trị x, y tìm được là hệ số A, B của f(x) = A.p(x) + B.q(x) = **2.0050$\sqrt{x}$ + 0.4867.cos(x)**

Cách 2: Đặt $\sqrt{x} = g(x)$; $\cos(x) = h(x)$

Bấm máy: (Nhớ đổi qua Radian vì hàm chứa lượng giác)

$$A = A + g^2(x): B = B + g(x)h(x): C = C + g(x)Y: D = D + h^2(x): M = M + h(x)Y$$

A, B, C, D, M ban đầu nhập = 0

X, Y nhập theo bảng cho đến hết. Cho máy chạy đến khi tính xong M thì dừng.

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Bx + Dy = M \end{cases}$$

Cách bấm này máy tính sẽ hỏi X sau khi hỏi A, và hỏi Y sau khi hỏi B và C. Nên chú ý nhập cẩn thận, nếu không sẽ phải nhập lại từ đầu.

Ví dụ: *Cho bảng số:*

x	*1.2*	*1.3*	*1.4*	*1.5*	*1.7*
y	*6.4*	*2.5*	*5*	*4.5*	*5.5*

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A\sqrt{x^3 + 2.5} + Bcosx$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.*

Đáp số: A = 1.9288 ; B = 1.9233

Ví dụ: *Cho bảng số:*

x	*1.2*	*1.3*	*1.4*	*1.5*	*1.7*
y	*2*	*2.5*	*5*	*4.5*	*5.5*

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A\sqrt{x^2 + 1} + Bcosx$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.*

Đáp số: A = 2.6702 ; B = – 5.0235

Ví dụ: *Cho bảng số:*

x	*0.7*	*1.0*	*1.2*	*1.3*	*1.5*
y	*3.1*	*2.0*	*4.5*	*2.6*	*6.7*

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A + Bsinx + Ccos^2x$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.*

Đáp số: A = 144.0806 ; B = – 138.2293 ; C = – 88.7070

(Xem lời giải ở **Câu 11 – Phần ôn tập**)

CÔNG THỨC SAI PHÂN:

- Xét bảng số 2 điểm:

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

Sai phân tiến:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sai phân lùi:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

- Xét bảng số 3 điểm:

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

<u>Đạo hàm cấp 1:</u>

Sai phân tiến (tại x_0):

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}$$

Sai phân hướng tâm (tại x_1):

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Sai phân lùi (tại x_2):

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)}{2h}$$

<u>Đạo hàm cấp 2:</u>

Công thức tổng quát:

$$L''(x) = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}$$

Sai phân tiến (tại x_0):

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}$$

Sai phân hướng tâm (tại x_1):

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

Sai phân lùi (tại x_2):

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{h^2}$$

Ví dụ: *Cho hàm số:* $f(x) = e^x ln(x^4 + 1) - 4x$*. Sử dụng sai phân hướng tâm, xấp xỉ giá trị* ***đạo hàm cấp 1 và cấp 2*** *tại điểm có hoành độ x = 1.25 với bước h = 0.25*

Cách giải:

Công thức sai phân hướng tâm:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

Bấm máy: $e^X ln(X^4 + 1) - 4X$ CALC

Nhập $x_0 = 1.25$; $h = 0.25$

X	$x_0 + h$	$x_0 - h$	x_0
SHIFT – STO	A	B	C

$$f'(1.25) = \frac{A - B}{2h} = 8.3848$$

$$f''(1.25) = \frac{A - 2C + B}{h^2} = 21.3349$$

CÔNG THỨC HÌNH THANG:

Sai số:

Hình thang:

$$\Delta I \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12}$$

Hình thang mở rộng:

$$\Delta I \leq \frac{nM_2h^3}{12} = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

Trong đó:

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Ví dụ: *Tính gần đúng tích phân sau bằng công thức hình thang mở rộng khi chia đoạn [0,1] thành n = 10 đoạn nhỏ.*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Cách giải:

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{1}{1+x}\,; a = 0\,; b = 1\,; h = \frac{b-a}{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{10}$$

Bấm máy:

$$A = A + \frac{h}{\mathbf{2}}[f(X) + f(X+h)]: X = X + h$$

Nhập A ban đầu = 0 ; X ban đầu bằng cận dưới (= a).

Nhấn dấu = đến khi X = **b – h**. Nhấn tiếp dấu bằng để tính ra kết quả A = tích phân.

Đáp số: Tích phân = A = 0.6938.

Ví dụ: *Cho bảng số:*

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	4.0	3.3	2.4	4.3	10.2	6.2	7.4

Sử dụng công thức hình thang mở rộng hãy xấp xỉ tích phân:

$$I = \int_{1.0}^{2.2} (xf^2(x) + 4.4x^3)\, dx$$

Cách giải:

$$\text{Đặt } f(X,Y) = XY^2 + 4.4X^3 \quad ; \quad h = \boldsymbol{x_{k+1}} - \boldsymbol{x_k} = 0.2$$

Bấm máy:

$$A = A + \frac{h}{\mathbf{2}}[f(X,Y)] \times B: X = X + h$$

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	4.0	3.3	2.4	4.3	10.2	6.2	7.4
B	1	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	1

Cách nhập B: **1** → (2 → 2 → 2 → …) → **1**

Nhập A ban đầu bằng 0 ; X ban đầu bằng cận dưới hoặc đầu bảng (= 1.0)

Nhập Y = f(x): theo bảng.

Nhập B: theo bảng.

Đáp số: Tích phân = A = 101.4579

Ví dụ: *Hãy xấp xỉ tích phân sau bằng công thức hình thang mở rộng với n = 8.*

$$I = \int_{1.1}^{2.3} ln\sqrt{2x+2}dx$$

Đáp số: I = 1.0067.

CÔNG THỨC SIMPSON:

Sai số:

Simpson:

$$\Delta I \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2^5 \times 90}$$

Simpson mở rộng:

$$\Delta I \leq \frac{nM_4h^5}{180} = \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$$

Trong đó:

$$M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

Ví dụ: *Tính gần đúng tích phân sau bằng công thức Simpson mở rộng khi chia đoạn [0,1] thành n = 10 đoạn nhỏ.*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Cách giải:

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{1}{1+x}\ ; a = 0\ ; b = 1\ ; h = \frac{b-a}{\mathbf{2n}} = \frac{1}{20}$$

Bấm máy:

$$A = A + \frac{h}{\mathbf{3}} f(X) \times B : X = X + h$$

Nhập A ban đầu = 0 ; X ban đầu bằng cận dưới (= a).

B = 1, (4, 2, 4, 2,…) nhấn dấu bằng đến khi **X bằng cận trên (= b)** thì nhập B =1.

Ta được giá trị A = tích phân.

Đáp số: Tích phân = A = 0.6931. (So sánh kết quả với CT Hình thang mở rộng)

Ví dụ: *Cho bảng số:*

x	*1.0*	*1.2*	*1.4*	*1.6*	*1.8*	*2.0*	*2.2*
f(x)	*2*	*3.3*	*2.4*	*4.3*	*5.1*	*19.84*	*7.4*

Sử dụng công thức Simpson mở rộng hãy xấp xỉ tích phân:

$$I = \int_{1.0}^{2.2} (3.2xf^2(x) + 2.5x^2)\,dx$$

Cách giải:

$$\text{Đặt } f(X,Y) = 3.2XY^2 + 2.5X^2 \quad ; \quad h = \boldsymbol{x_{k+1}} - \boldsymbol{x_k} = 0.2$$

Bấm máy:

$$A = A + \frac{h}{\mathbf{3}} f(X,Y) \times B : X = X + h$$

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2	3.3	2.4	4.3	5.1	19.84	7.4
B	1	**4**	**2**	**4**	**2**	**4**	1

Cách nhập B: **1** → (4 → 2 → 4 → 2 → 4 → …) → **1**

Nhập A ban đầu bằng 0 ; X ban đầu bằng cận dưới hoặc đầu bảng (= 1.0)

Nhập Y = f(x): theo bảng.

Nhập B: theo bảng.

Đáp số: Tích phân = A = 766.1944

Ví dụ: *Tính gần đúng tích phân sau bằng công thức Simpson mở rộng khi chia đoạn [0.2;6.8] thành n = 6 đoạn nhỏ.*

$$I = \int_{0.2}^{6.8} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 + x + 6}\,dx$$

Đáp số: I = 4.1421

CÔNG THỨC EULER:

$$\begin{cases} x(t_{k+1}) \approx x_{k+1} = x_k + h.f(t_k, x_k, y_k) \\ y(t_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h.g(t_k, x_k, y_k) \\ k = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Ví dụ: *Cho bài toán Cauchy:* $\begin{cases} x''(t) = 4.2x' + 2t^2x + 2.6, \quad 1 \le t \le 1.8 \\ x(1) = 1.2 \quad , \quad x'(1) = 1 \end{cases}$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler, giải gần đúng x(1.2) và x(1.8) với bước h = 0.2.

Cách giải:

Đặt $y(t) = x'(t) \quad \rightarrow \quad y'(t) = x''(t)$. Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = 4.2y + 2t^2x + 2.6 \\ x_0 = x(1) = 1.2 \\ y_0 = x'(1) = y(1) = 1 \\ t_0 = 1 \;;\; h = 0.2 \end{cases}$$

Ta có 1 biến **t** và 2 hàm: $\boldsymbol{f} = x'(t) = y$ và hàm $\boldsymbol{g} = y'(t) = 4.2y + 2t^2x + 2.6$

Bấm máy: Quy ước: $t \rightarrow F$; $x \rightarrow X$; $y \rightarrow Y$

A = 0.2Y :	B = 0.2(4.2Y + 2F²X + 2.6) :	F = F + 0.2 :	X = X + A :	Y = Y + B
$h.\boldsymbol{f}$	$h.\boldsymbol{g}$	tăng biến t	$x_k + h.\boldsymbol{f}$	$y_k + h.\boldsymbol{g}$

Nhấn CALC.

Nhập Y ban đầu = y_0 = 1, X ban đầu bằng x_0 = 1.2, F ban đầu = t_0 = 1

Đọc giá trị nghiệm tại X:

t	1.2	1.4	1.6	1.8
x	1.4000	1.9680	3.2784	6.1021

Đáp số: x(1.2) = 1.4000 x(1.8) = 6.1021

Ví dụ: *Cho bài toán Cauchy:* $\begin{cases} y'''(x) = 2y'' + xy' + x^2y + 9.28 \quad , \quad 1 \le x \le 1.8 \\ y(1) = 3.2 \;\; ; \;\; y'(1) = 1.4 \;\; ; \;\; y''(1) = 1.1 \end{cases}$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler, giải gần đúng y(1.2) và y(1.8) với bước h = 0.2.

Cách giải: (Có thể tham khảo cách giải khác ở **Câu 13 – Phần ôn tập**).

Đặt: $z = y'$ và $v = y'' \;\; \rightarrow \;\; z' = y'' = v \; ; \; v' = y'''$. Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y'(x) = z \\ z'(x) = v \\ v'(x) = 2v + xz + x^2y + 9.28 \\ y_0 = y(1) = 3.2 \\ z_0 = z(1) = 1.4 \\ v_0 = v(1) = 1.1 \\ x_0 = 1 \; ; \; h = 0.2 \end{cases}$$

Ta có 1 biến **x** và 3 hàm: $\boldsymbol{y'(x)} = z \;\; ; \;\; \boldsymbol{z'(x)} = v \;\; ; \;\; \boldsymbol{v'(x)} = 2v + xz + x^2y + 9.28$

Bấm máy: Quy ước: x → X ; y → Y ; z → F ; v → D

Câu lệnh	Ý nghĩa
A = 0.2F **:**	$h.y'(x) = h.z$
B = 0.2D **:**	$h.z'(x) = h.v$
C = 0.2(2D + XF + X^{2}Y + 9.28) **:**	$h.v'(x) = h.(2v + xz + x^2y + 9.28)$
X = X + 0.2 **:**	$x = x + h$
Y = Y + A **:**	$y_{k+1} = y_k + h.y'(x)$
F = F + B **:**	$z_{k+1} = z_k + h.z'(x)$
D = D + C	$v_{k+1} = v_k + h.v'(x)$

Nhấn CALC. Nhập các giá trị ban đầu: $x_0 = 1$; $y_0 = 3.2$; $z_0 = 1.4$; $v_0 = 1.1$

Đọc giá trị ở Y:

X	1.2	1.4	1.6	1.8
Y	3.4800	3.8040	4.3006	5.1689

CÔNG THỨC EULER CẢI TIẾN:

$$\begin{cases} K_{1x} = h.f(t_k, x_k, y_k) \\ K_{1y} = h.g(t_k, x_k, y_k) \\ K_{2x} = h.f(t_k + h, x_k + K_{1x}, y_k + K_{1y}) \\ K_{2y} = h.g(t_k + h, x_k + K_{1x}, y_k + K_{1y}) \\ x(t_{k+1}) \approx x_{k+1} = x_k + \dfrac{1}{2}(K_{1x} + K_{2x}) \\ y(t_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + \dfrac{1}{2}(K_{1y} + K_{2y}) \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Ví dụ: *Cho bài toán Cauchy:* $\begin{cases} y'(t) = y - t^2 + 1 \;, \; 0 \le t \le 2 \\ y(\mathbf{0}) = \mathbf{0.5} \end{cases}$

Sử dụng phương pháp Euler cải tiến để xấp xỉ nghiệm với n = 10 và nghiệm chính xác là:

$$y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$$

Cách giải:

$$a = 0, b = 2 \;, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{10} = 0.2 \;, \quad t_0 = 0 \;, \; y_0 = 0.5$$

Bấm máy: Quy ước: t → X ; y → Y

Câu lệnh	Ý nghĩa
$A = 0.2(Y - X^2 + 1)$:	$K_{1y} = h.(y - t^2 + 1)$
$X = X + 0.2$:	$t = t + h$
$B = 0.2(Y + A - X^2 + 1)$:	$K_{2y} = h.\left[\left(y + K_{1y}\right) - (t+h)^2 + 1\right]$
$Y = Y + (A + B) \div 2$	$y_{k+1} = y_k + \dfrac{\left(K_{1y} + K_{2y}\right)}{2}$

Nhấn CALC. Nhập Y ban đầu = y_0 = 0.5 , X ban đầu = x_0 = 0

Nhấn dấu = đến khi X = b – h = 1.8 thì bấm dấu bằng ta được kết quả Y

Đáp số: Y = 5.2331

Ví dụ: *Cho bài toán Cauchy:* $\begin{cases} x''(t) = 4x' + t^2x + 2.6 \quad ; \quad 1 \le t \le 1.6 \\ x(1) = 0.3 \quad ; \quad x'(1) = 1.1 \end{cases}$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler cải tiến, giải gần đúng x(1.2) và x(1.6) với bước h = 0.2

Cách giải:

Đặt $y(t) = x'(t)$. Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = 4y + t^2x + 2.6 \\ x_0 = x(1) = 0.3 \\ y_0 = y(1) = x'(1) = 1.1 \\ t_0 = 1 \quad ; \quad h = 0.2 \end{cases}$$

Ta có 1 biến **t** và 2 hàm: $\boldsymbol{f} = x'(t) = y$ và hàm $\boldsymbol{g} = y'(t) = 4y + t^2x + 2.6$

Bấm máy: Quy ước: x → X ; y → Y ; t → F ; h → E

Câu lệnh	Ý nghĩa
A = EY **:**	$K_{1x} = h.y$
B = E(4Y + F²X + 2.6) **:**	$K_{1y} = h.(4y + t^2x + 2.6)$
F = F + E **:**	$t = t + h$
C = E(Y + B) **:**	$K_{2x} = h.(y + K_{1y})$
D = E(4(Y + B) + F²(X + A) + 2.6) **:**	$K_{2y} = h.\left[4(y + K_{1y}) + t^2(x + K_{1x}) + 2.6\right]$
X = X + (A + C) ÷ 2 **:**	$x_{k+1} = x_k + \dfrac{(K_{1x} + K_{2x})}{2}$
Y = Y + (B + D) ÷ 2	$y_{k+1} = y_k + \dfrac{(K_{1y} + K_{2y})}{2}$

Nhấn CALC. Nhập các giá trị ban đầu: X = x_0 = 0.3 ; Y = y_0 = 1.1 ; F = t_0 = 1

Đọc giá trị ở X:

t	1.2	1.4	1.6
x	0.6660	1.6301	3.9626

CÔNG THỨC RUNGE-KUTTA BẬC 4:

$$\begin{cases} K_{1x} = h.f(t_k, x_k, y_k) \\ K_{1y} = h.g(t_k, x_k, y_k) \\ K_{2x} = h.f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{K_{1x}}{2}, y_k + \frac{K_{1y}}{2}) \\ K_{2y} = h.g(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{K_{1x}}{2}, y_k + \frac{K_{1y}}{2}) \\ K_{3x} = h.f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{K_{2x}}{2}, y_k + \frac{K_{2y}}{2}) \\ K_{3y} = h.g(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{K_{2x}}{2}, y_k + \frac{K_{2y}}{2}) \\ K_{4x} = h.f(t_k + h, x_k + K_{3x}, y_k + K_{3y}) \\ K_{4y} = h.g(t_k + h, x_k + K_{3x}, y_k + K_{3y}) \\ x(t_{k+1}) \approx x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}(K_{1x} + 2K_{2x} + 2K_{3x} + K_{4x}) \\ y(t_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_{1y} + 2K_{2y} + 2K_{3y} + K_{4y}) \\ k = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Ví dụ: *Cho bài toán Cauchy:* $\begin{cases} y' = x - 3.2x\sin(x + 3.5y) \quad , \quad x \geq 1.1 \\ y(1.1) = 0.4 \end{cases}$

Sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 xấp xỉ y(1.3) với bước h = 0.2.

Cách giải:

Đặt $f(X, Y) = X - 3.2X\sin(X + 3.5Y)$; $h = 0.2$; $x_0 = 1.1$; $y_0 = 0.4$

Bấm máy: (Nhớ chuyển sang Radian vì hàm chứa lượng giác)

$$\boldsymbol{h}.[f(X,Y)] \quad \rightarrow \quad CALC$$

X	x_0	$x_0 + h \div 2$	$x_0 + h \div 2$	$x_0 + h$
Y	y_0	$y_0 + A \div 2$	$y_0 + B \div 2$	$y_0 + C$
Kết quả	– 0.2013	– 0.3587	– 0.4669	– 0.4681
SHIFT-STO	A	B	C	D

y_1 **=** $\mathbf{y_0}$ **+ (A + 2B + 2C + D) ÷ 6** **Đáp số:** $y_1 = 0.0132$. Tính $y_2, y_3, \ldots$ tương tự.

PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN:

$$\begin{cases} p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x)\,, \;\; a < x < b \\ y(a) = \alpha \;\;,\;\; y(b) = \beta \end{cases}$$

Ta đưa về hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \;\;,\;\; y_n = \beta \\ \left(\frac{p_k}{h^2} - \frac{q_k}{2h}\right) y_{k-1} + \left(r_k - \frac{2p_k}{h^2}\right) y_k + \left(\frac{p_k}{h^2} + \frac{q_k}{2h}\right) y_{k+1} = f_k \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2p_1}{h^2} & \frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h} & 0 & 0 \\ \frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h} & r_2 - \frac{2p_2}{h^2} & \frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h} & 0 \\ 0 & \frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h} & r_3 - \frac{2p_3}{h^2} & \frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h} \\ 0 & 0 & \frac{p_4}{h^2} - \frac{q_4}{2h} & r_4 - \frac{2p_4}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} f_1 - \left(\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h}\right)\alpha \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} - \left(\frac{p_{n-1}}{h^2} + \frac{q_{n-1}}{2h}\right)\beta \end{pmatrix}$$

$$Y = (y_1\,, y_2\,, \dots, y_{n-1})^T$$

Giải hệ phương trình: AY = B

Ví dụ: *Cho bài toán biên tuyến tính cấp 2:*

$$\begin{cases} (x + 3.5)y'' + x^3y' - 30y = 3.2x(x+1)\,, \;\; x \in [0.5; 1.5] \\ y(0.5) = 3.2 \;\;;\;\; y(1.5) = 2.7 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, hãy xấp xỉ giá trị của hàm y(x) trên đoạn [0.5;1.5] với bước h = 0.25.

Cách giải:

Đối chiếu với hệ phương trình:

$$\begin{cases} p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x)\,, \quad a < x < b \\ y(a) = \alpha \;,\; y(b) = \beta \end{cases}$$

$p(x) = x + 3.5$ $q(x) = x^3$ $r(x) = -30$ $f(x) = 3.2x(x + 1)$	a = 0.5 b = 1.5 h = 0.25	$x_1 = a + h = 0.75$ $x_2 = a + 2h = 1.0$ $x_3 = a + 3h = 1.25$	alpha = 3.2 beta = 2.7

Bấm máy:

$A = p(x) \div h^2 : B = q(x) \div 2 \div h : C = A - B : r(x) - 2A : D = A + B : f(x) - MC - YD$

CALC

Lần bấm	X	M	Y
1	x_1	alpha	0
2	x_2	0	0
3	x_3	0	beta

Kết quả:

A	B	C	r(x) – 2A	D	f(x) – MC - YD
68	0.84375	67.15625	– 166 (a_1)	68.84375 (b_1)	– 210.7 (d_1)
72	2	70 (a_2)	– 174 (b_2)	74 (c_2)	6.4 (d_2)
76	3.90625	72.09375 (b_3)	– 182 (c_3)	79.90625	– 206.746875 (d_3)

Từ các giá trị trong bảng ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + 0z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ 0x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình lần lượt là các giá trị y(0.75) , y(1.0) , y(1.25).

Đáp số: y(0.75) = 1.8664 , y(1.0) = 1.4397 , y(1.25) = 1.7063

PHẦN ÔN TẬP (ĐỀ CUỐI KỲ 2011 – 2012)

Câu 1. *Cho phương trình* $f(x) = e^x + 2x^2 + cosx - 10 = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm [1 , 2]. Sử dụng phương pháp Newton, tìm nghiệm gần đúng* x_2 *của phương trình trên và đánh giá sai số của nó.*

Cách giải:

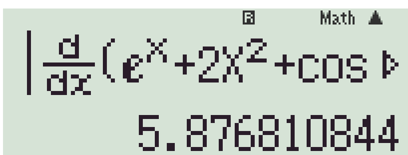
Nhớ đổi qua Radia vì hàm chứa lượng giác.

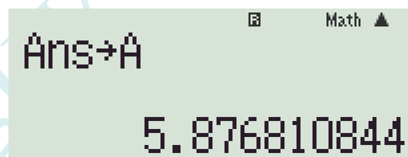
$f(x) = e^x + 2x^2 + cosx - 10\ ;a = 1\ ;b = 2$

$f'(x) = e^x + 4x - sinx$

$f''(x) = e^x + 4 - cosx$

Tính $m = min|f'(x)|$ Sau đó lưu vào biến A (SHIFT-STO-A)





Nếu $f(a).f''(a) > 0$ chọn x_0 = a. Nếu $f(a).f''(a) < 0$ chọn x_0 = b.

Bấm máy:

$$X = X - \frac{f(X)}{f'(X)} : \frac{|f(X)|}{A}$$

$$X = X - \frac{e^X + 2X^2 + \cos(X) - 10}{e^X + 4X - \sin(X)} : \frac{|e^X + 2X^2 + \cos(X) - 10|}{A}$$

CALC X = $x_0 \Rightarrow x_1 = 1.6566 \Rightarrow \Delta x_1 = 0.1096$

X = $x_1 \Rightarrow$ $\mathbf{x_2 = 1.5973} \Rightarrow \mathbf{\Delta x_2 = 0.0028}$

Câu 2. *Cho bảng số sau:*

x	*1.1*	*1.6*	*2.1*
y	*2.2*	*5.3*	*6.6*

Sử dụng spline bậc ba g(x) thỏa điều kiện $g'(1.1) = 0.2$, $g'(2.1) = 0.5$ *nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại x = 1.4 và x = 1.9.*

Cách giải:

Bài toán thuộc loại Spline ràng buộc với $\alpha = 0.2$ và $\beta = 0.5$

$a_k = y_k$; $h_k = x_{k+1} - x_k$

$$\Delta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$$

Ma trận $B = 3(\Delta_{k+1} - \Delta_k)$

$$\text{Ma trận } A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_1 + h_0) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận $C = A^{-1}.B$

$$b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) = \Delta_k - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k)$$

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$$

Nếu $b_0 \neq \alpha$ thì bài toán sai.

<table>
<tr><th>x_k</th><th>h_k</th><th>$a_k = y_k$</th><th>Δ_k</th><th>B</th><th>c_k</th><th>b_k</th><th>d_k</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td rowspan="2">0.5</td><td>2.2</td><td>$\alpha = 0.2$</td><td>18</td><td>23.55</td><td rowspan="2">0.2</td><td rowspan="2">-23.1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.6</td><td rowspan="2">5.3</td><td>6.2</td><td rowspan="2">-10.8</td><td rowspan="2">-11.1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0.5</td><td>2.6</td><td rowspan="2">6.425</td><td rowspan="2">6.9</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>6.6</td><td>$\beta = 0.5$</td><td>-6.3</td><td>-0.75</td></tr>
</table>

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	2.2	0.2	23.55	-23.1
1	5.3	6.425	-11.1	6.9

Ta có 2 hàm số:

$$\begin{cases} g(x) = 2.2 + 0.2(x-1.1) + 23.55(x-1.1)^2 - 23.1(x-1.1)^3\,, & x \in [1.1\,,1.6] \\ g(x) = 5.3 + 6.425(x-1.6) - 11.1(x-1.6)^2 + 6.9(x-1.6)^3\,, & x \in [1.6\,,2.1] \end{cases}$$

Đáp số: g(1.4) = 3.7558 ; g(1.9) = 6.4148

Câu 3. *Cho hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 34x_1 + 2.73x_2 - 1.85x_3 = 12.89 \\ 1.34x_1 + 29x_2 - 3.24x_3 = 15.73 \\ 1.18x_1 - 4.87x_2 + 32.6x_3 = 18.42 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, với $x^{(0)} = (0.1, 0.3, 0.4)^T$, tìm vectơ $x^{(3)}$.

Cách giải:

A = (12.89 – 2.73B + 1.85C) ÷ 34 : B = (15.73 – 1.34A + 3.24C) ÷ 29 : C = (18.42 – 1.18A + 4.87B) ÷ 32.6

CALC B = 0.3 = , C = 0.4 =, (không nhập A)

Nhấn dấu = và đọc các giá trị x

$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$
A = 0.3768 B = 0.5697 C = 0.6365	A = 0.3680 B = 0.5965 C = 0.6408	**A = 0.3661** **B = 0.5971** **C = 0.6410**

* **<u>Chú ý</u>:** Nếu đề cho **phương pháp lặp Jacobi** ta sẽ bấm máy như sau:

X = (12.89 – 2.73B + 1.85C) ÷ 34 : **Y** = (15.73 – 1.34A + 3.24C) ÷ 29 : C = (18.42 – 1.18A + 4.87B) ÷ 32.6 : **A = X : B = Y**

CALC B = 0.3 = , C = 0.4 , A = 0.1 =

Nhấn dấu = và đọc các giá trị x

$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$
A = 0.3768 B = 0.5825 C = 0.6062	A = 0.3653 B = 0.5927 C = 0.6384	**A = 0.3663** **B = 0.5969** **C = 0.6404**

Nhận xét kết quả 2 phương pháp Jacobi và Gauss-Seidel.

Câu 4. *Cho bảng số sau:*

x	*0.7*	*1.0*	*1.2*	*1.3*	*1.5*
y	*3.1*	*2*	*4.5*	*2.6*	*6.7*

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm f(x) = Ax + Bcosx xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Cách giải:

Cách 1 (Nên dùng): **(Nhớ đổi qua Radian vì hàm chứa lượng giác)**

Bấm máy: SHIFT ⇒ MODE ⇒ Mũi tên xuống ⇒ STAT ⇒ Frequency ⇒ ON

MODE ⇒ STAT ⇒ A+BX ⇒ Cột X nhập **X**, cột Y nhập cos(**X**), nhấn AC.

SHIFT ⇒ 1 ⇒ SUM ⇒ $\sum x^2$ ⇒ SHIFT-STO-A

SHIFT ⇒ 1 ⇒ SUM ⇒ $\sum xy$ ⇒ SHIFT-STO-B

SHIFT ⇒ 1 ⇒ SUM ⇒ $\sum y^2$ ⇒ SHIFT-STO-D

SHIFT ⇒ 1 ⇒ DATA ⇒ Nhập Y vào cột FREQ **(không được nhập ở bước trên)**

SHIFT ⇒ 1 ⇒ VAR ⇒ $\bar{x}$ ⇒ × ⇒ SHIFT ⇒ 1 ⇒ VAR ⇒ n ⇒ SHIFT-STO-C

SHIFT ⇒ 1 ⇒ VAR ⇒ $\bar{y}$ ⇒ × ⇒ SHIFT ⇒ 1 ⇒ VAR ⇒ n ⇒ SHIFT-STO-M

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Bx + Dy = M \end{cases}$$

Giá trị x, y tìm được là hệ số A, B của f(x) = A.p(x) + B.q(x) = **3.5255.x – 0.621.cos(x)**

Cách 2: Đặt $x = g(x)$; $\cos(x) = h(x)$

Bấm máy: (Nhớ đổi qua Radian vì hàm chứa lượng giác)

$A = A + g^2(x){:}\, B = B + g(x)h(x){:}\, C = C + g(x)Y{:}\, D = D + h^2(x){:}\, M = M + h(x)Y$

A, B, C, D, M ban đầu nhập = 0

X, Y nhập theo bảng cho đến hết. Cho máy chạy đến khi tính xong M thì dừng.

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Bx + Dy = M \end{cases}$$

Cách bấm này máy tính sẽ hỏi X sau khi hỏi A, và hỏi Y sau khi hỏi B và C. Nên bạn chú ý nhập cẩn thận, nếu không sẽ phải nhập lại từ đầu.

Câu 5. *Cho bảng số:*

x	*0.1*	*0.3*	*0.6*	*0.9*
y	*2.4*	*3.7*	*3.2*	*4.3*

Sử dụng đa thức ***nội suy Lagrange****, hãy xấp xỉ đạo hàm cấp 1 của hàm tại x = 0.5.*

Cách giải:

Đặt $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

Đạo hàm: $y'(x) = P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$

Giải hệ phương trình:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 & y_2 - y_0 \\ x_3 - x_0 & x_3^2 - x_0^2 & x_3^3 - x_0^3 & y_3 - y_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.2 & 0.08 & 0.026 & 1.3 \\ 0.5 & 0.35 & 0.215 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 0.728 & 1.9 \end{array}\right)$$

Nghiệm của hệ:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5171/240 \\ -1723/36 \\ 1135/36 \end{pmatrix}$$

$$y'(x) = P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = \frac{5171}{240} + 2.\left(-\frac{1723}{36}\right)x + 3.\frac{1135}{36}x^2$$

CALC X = 0.5 ⇒ **y'(0.5) = – 2.6694**

Câu 6. *Cho tích phân sau:* $I = \int_{1.3}^{2.5} ln(\sqrt{x+6})dx$

Hãy xấp xỉ tích phân I bằng công thức hình thang mở rộng với n = 8.

Cách giải:

$$f(X) = \ln\left(\sqrt{x+6}\right)\ ;\ \ a = 1.3\ \ ;\ \ b = 2.5\ \ ; h = \frac{b-a}{n} = 0.15$$

Bấm máy:

$$A = A + \frac{h}{2}[f(X) + f(X+h)]: X = X + h$$

Nhập A ban đầu = 0 ; X ban đầu bằng cận dưới (= a).

Nhấn dấu = đến khi X = b – h. Nhấn tiếp dấu bằng để tính ra kết quả A = tích phân.

Đáp số: I = 1.2395

Câu 7. *Cho bảng số:*

x	*1.0*	*1.2*	*1.4*	*1.6*	*1.8*	*2.0*	*2.2*
f(x)	*2*	*3.3*	*2.4*	*4.3*	*5.1*	*6.2*	*7.4*

Sử dụng công thức Simpson mở rộng tính tích phân $I = \int_{1.0}^{2.2}[xf^2(x) + 2.2x^3]\,dx$

Cách giải:

Đặt $f(X,Y) = XY^2 + 2.2X^3$

h = $x_{i+1} - x_i$ = 0.2

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2	3.3	2.4	4.3	5.1	6.2	7.4
B	1	4	2	4	2	4	1

Bấm máy:

$$A = A + B.\frac{h}{3}.F(X,Y): X = X + h$$

Nhập A ban đầu bằng 0 ; X ban đầu bằng cận dưới hoặc đầu bảng (= 1.0)

Nhập Y = f(x): theo bảng.

Nhập B: theo bảng.

Đáp số: I = 59.8250

Câu 8. *Cho bài toán Cauchy:* $\begin{cases} y' = 2x + x\sin(x + 2y),\ x \geq 1 \\ y(1) = 2.4 \end{cases}$

Sử dụng công thức Runge-Kutta cấp 4 hãy xấp xỉ y(1.2) với bước h = 0.2

Cách giải:

Đặt $f(X,Y) = 2X + X\sin(X + 2Y)$; $h = 0.2$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2.4$

Bấm máy:

$$h[f(X,Y)] \quad \rightarrow \quad CALC$$

X	x_0	$x_0 + h \div 2$	$x_0 + h \div 2$	$x_0 + h$
Y	y_0	$y_0 + A \div 2$	$y_0 + B \div 2$	$y_0 + C$
Kết quả	0.3071	0.4233	0.4488	0.6184
SHIFT-STO	A	B	C	D

y_1 **=** $\mathbf{y_0}$ **+ (A + 2B + 2C + D) ÷ 6**

Đáp số: $y(1.2) = y_1 = 2.8449$

Nếu mở rộng bài toán xấp xỉ đến $y_2 = y(1.4)$:

$x_1 = 1.2$, $y_1 = 2.8449$…. (Lưu giá trị y_1 vừa tính được vào biến F (SHIFT-STO-F))

Ta sử dụng công thức Runge-Kutta một lần nữa như sau:

X	x_1	$x_1 + h \div 2$	$x_1 + h \div 2$	$x_1 + h$
Y	F	F + A÷2	F + B÷2	F + C
Kết quả	0.6168	0.7721	0.7789	0.7563
SHIFT-STO	A	B	C	D

Kết quả: y(1.4) = $\mathbf{y_1 + (A + 2B + 2C + D) \div 6}$ = 3.5908

Câu 9. *Cho bài toán Cauchy:* $\begin{cases} y''(x) = 4.2y' + 2x^2y + 2.6 \ , \ 1 \le x \le 1.8 \\ y(1) = 1.2 \ , y'(1) = 1 \end{cases}$

Đưa hệ về phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler cải tiến, giải gần đúng phương trình với bước h = 0.2.

Cách giải:

Đặt $z = y' \ \rightarrow \ z' = y'' \ \rightarrow \ z(1) = y'(1) = 1$. Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 4.2z + 2x^2y + 2.6 \\ z(1) = 1 \\ y(1) = 1.2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_{1y} = h.z \\ K_{1z} = h.(4.2z + 2x^2y + 2.6) \\ K_{2y} = h.(z + K_{1z}) \\ K_{2z} = h.\left[4.2(z + K_{1z}) + 2(x+h)^2(y + K_{1y}) + 2.6\right] \\ x_0 = 1 \ ; \ y_0 = 1.2 \ ; \ z_0 = 1 \end{cases}$$

Bấm máy: Quy ước: h → E ; x → X ; y → Y ; z → F

Câu lệnh	Ý nghĩa
A = EF **:**	$K_{1y} = h.z$
B = E(4.2F + 2X^{2}Y + 2.6) **:**	$K_{1z} = h.(4.2z + 2x^2y + 2.6)$
X = X + E **:**	$x = x + h$
C = E(F + B) **:**	$K_{2y} = h.(z + K_{1z})$
D = E(4.2(F + B) + 2X^2(Y + A) + 2.6) **:**	$K_{2z} = h.\left[4.2(z + K_{1z}) + 2(x+h)^2(y + K_{1y}) + 2.6\right]$
Y = Y + (A + C) ÷ 2 **:**	$y_{k+1} = y_k + \dfrac{(K_{1y} + K_{2y})}{2}$
F = F + (B + D) ÷ 2	$z_{k+1} = z_k + \dfrac{(K_{1z} + K_{2z})}{2}$

Nhấn CALC. Nhập các giá trị ban đầu: $x_0 = 1$; $y_0 = 1.2$; $z_0 = 1$; $h = 0.2$

Đọc giá trị ở Y:

x	1.2	1.4	1.6	1.8
y	1.5840	2.7996	6.1311	15.0246

Câu 10. *Cho bài toán biên tuyến tính cấp hai:*

$$\begin{cases} xy'' + x^2y' - 4.6y = 2 + 2(x+2)^2 \ , \ 0.4 \le x \le 1.2 \\ y(0.4) = 0.3 \ , \ y(1.2) = 2.6 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, hãy xấp xỉ giá trị của hàm y(x) trên đoạn [0.4,1.2] với bước h = 0.2.

Cách giải:

Đối chiếu với hệ phương trình:

$$\begin{cases} p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x) \ , \ a < x < b \\ y(a) = \alpha \ , \ y(b) = \beta \end{cases}$$

$p(x) = x$ $q(x) = x^2$ $r(x) = -4.6$ $f(x) = 2 + 2(x+2)^2$	a = 0.4 b = 1.2 h = 0.2	$x_1 = a + h = 0.6$ $x_2 = a + 2h = 0.8$ $x_3 = a + 3h = 1.0$	alpha = 0.3 beta = 2.6

Bấm máy:

A = p(x) ÷ h^2 : B = q(x) ÷ 2 ÷ h : C = A – B : r(x) – 2A : D = A + B : f(x) – MC – YD

CALC

Lần bấm	X	M	Y
1	x_1	alpha	0
2	x_2	0	0
3	x_3	0	beta

Kết quả:

A	B	C	r(x) – 2A	D	f(x) – MC - YD
15	0.9	14.1	– 34.6 (a_1)	15.9 (b_1)	11.29 (d_1)
20	1.6	18.4 (a_2)	– 44.6 (b_2)	21.6 (c_2)	17.68 (d_2)
25	2.5	22.5 (b_3)	– 54.6 (c_3)	27.5	– 51.5 (d_3)

Từ các giá trị trong bảng ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + 0z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ 0x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình lần lượt là các giá trị y(0.6) , y(0.8) , y(1.0).

Đáp số: y(0.6) = – 0.3821 , y(0.8) = – 0.1215 , y(1.0) = 0.8932

Câu 11. *Cho bảng số:*

x	*0.7*	*1.0*	*1.2*	*1.3*	*1.5*
y	*3.1*	*2.0*	*4.5*	*2.6*	*6.7*

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A + Bsinx + Ccos^2x$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.*

Cách giải: (Nhớ chuyển sang Radian vì hàm chứa lượng giác)

$$f(x) = A + Bsinx + Ccos^2x = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B}sinx - \boldsymbol{C}sin^2x = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}sinx + \boldsymbol{c}sin^2x$$

Kết quả tính được	**a**	**b**	**c**
Ý nghĩa	A + C	B	– C

Bấm máy: MODE ⇒ STAT ⇒ _+Cx^2. Chọn dạng hàm số a + bx + cx^2

X	sin(0.7)	sin(1.0)	sin(1.2)	sin(1.3)	sin(1.5)
Y	3.1	2.0	4.5	2.6	6.7

Sau khi nhập bảng số, nhấn AC để thoát.

Bấm tiếp SHIFT ⇒ 1 ⇒ REG ⇒ Đọc các giá trị a, b, c

Đáp số:

$$\begin{cases} A + C = \boldsymbol{a} \\ B = \boldsymbol{b} \\ -C = \boldsymbol{c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 144.0806 \\ B = -138.2293 \\ C = -88.7070 \end{cases}$$

Câu 12. *Cho bảng số:*

x	1.1	1.7	2.4	3.3
y	1.3	3.9	4.5	α

*Sử dụng đa thức **nội suy Newton**, tìm giá trị của α để đa thức nội suy có giá trị xấp xỉ đạo hàm tại x = 1.5 là y'(1.5) = 2.8.*

Cách giải:

Đặt $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

Đạo hàm: $y'(x^*) = P'(x^*) = \mathbf{1}a_1 + \mathbf{2}a_2\boldsymbol{x}^* + \mathbf{3}a_3\boldsymbol{x}^{*\mathbf{2}} = \boldsymbol{y}^*$

Theo đề bài ta có $x^* = 1.5$ và $y^* = 2.8$

Giải hệ phương trình:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 & y_2 - y_0 \\ 1 & 2x^* & 3x^{*2} & y^* \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.6 & 1.68 & 3.582 & 2.6 \\ 1.3 & 4.55 & 12.493 & 3.2 \\ 1 & 3 & 6.75 & 2.8 \end{array}\right)$$

Nghiệm của hệ:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44.8105 \ldots\ SHIFT \rightarrow STO \rightarrow \boldsymbol{B} \\ -22.6446 \ldots\ SHIFT \rightarrow STO \rightarrow \boldsymbol{C} \\ 3.8405 \ldots\ SHIFT \rightarrow STO \rightarrow \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

Mà: $y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 \quad với\ i = 0, 1, 2$. Thay giá trị x_i và y_i bất kỳ ta được:

$$a_0 = y_i - a_1x_i - a_2x_i^2 - a_3x_i^3 = Y - \boldsymbol{B}X - \boldsymbol{C}X^2 - \boldsymbol{D}X^3$$

$$a_0 = -25.7032798 \quad SHIFT \rightarrow STO \rightarrow \boldsymbol{A}$$

$$\alpha = y_3 = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3$$

Bấm máy: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}X + \boldsymbol{C}X^2 + \boldsymbol{D}X^3$ CALC X = 3.3 ⇒ **Đáp số:** α = 13.5876

Câu 13. *Cho bài toán Cauchy:*

$$\begin{cases} y'''(x) = 4y'' - xy' + 2x^2y + 2\,, \quad 1 \le x \le 1.8 \\ y(1) = 1.2\,,\ \ y'(1) = 1.1\,,\ \ y''(1) = 2.1 \end{cases}$$

Dùng hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler, giải gần đúng phương trình vi phân với bước h = 0.2

Đặt $y_1 = y'\,,\ y_2 = y'' \quad \Rightarrow y_2 = y_1{}'$

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} y_2' = 4y_2 - xy_1 + 2x^2y + 2 \\ y(1) = 1.2 \\ y_1(1) = 1.1 \\ y_2(1) = 2.1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Cơ sở lý thuyết phương pháp Euler:

Biến	A = D	B	Y
Ý nghĩa	y_1	y_2	y

$$y_1' = y_2 \quad \rightarrow A = A + hB$$

$$y_2' = 4y_2 - xy_1 + 2x^2y + 2 \quad \rightarrow B = B + h(4B - XA + 2X^2Y + 2)$$

$$y' = y_1' \quad \rightarrow Y = Y + hA$$

Tuy nhiên, câu lệnh sau (Y = Y + hA) phải sử dụng A ban đầu nên phải mượn biến tạm là D để lưu giá trị A tính được (D = A + hB). Câu lệnh cuối sẽ gán lại A = D. Giá trị h = 0.2

Bấm máy:

D = A + hB : B = B + h(4B – XA + 2X^2Y + 2) : Y = Y + hA : X = X + h : A = D

CALC

Biến	A	B	X	Y
Giá trị ban đầu	$y_1(1) = 1.1$	$y_2(1) = 2.1$	$x_0 = 1$	$y(1) = 1.2$

Đọc giá trị tại Y:

X	1.2	1.4	1.6	1.8
Y	1.4200	1.7240	2.2056	3.0410

Đáp số: y(1.2) = 1.4200 ; y(1.8) = 3.0410

Câu 14. *Cho hàm* $f(x) = (x^2+1)e^{2x} - ln(x^4+2)\,sin(3x+1)$. *Sử dụng sai phân hướng tâm xấp xỉ* $f'(0.7)$, $f''(0.7)$ *với bước h = 0.15*

Cách giải:

Công thức sai phân hướng tâm:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

Bấm máy: $(X^2+1)e^{2X} - \ln(X^4+2)\sin(3X+1)$ CALC

Nhập $x_0 = 0.7$; h = 0.15

X	$x_0 + h$	$x_0 - h$	x_0
SHIFT – STO	A	B	C

$$f'(0.7) = \frac{A-B}{2h} = 20.7721$$

$$f''(0.7) = \frac{A-2C+B}{h^2} = 59.7091$$

ĐỀ CUỐI KỲ 122 (THI NGÀY 10/06/2013)

$M = \frac{m+2n+13}{10}$ với m, n là 2 chữ số cuối cùng của MSSV. Kết quả cuối cùng phải làm tròn đến chữ số lẻ thứ 4 sau dấu phẩy. Thiếu các thông số trên, bài thi sẽ không hợp lệ.

Câu 1. Cho phương trình $f(x) = 3^x + Mx^2 + sin(x) - 10 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [1;2]. Sử dụng phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 của phương trình trên và đánh giá sai số của nó.

x_2 = ______________________ Δx_2 = ______________________

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 19Mx_1 + 2.73x_2 - 1.85x_3 = 12.89 \\ 1.34x_1 + 18.5Mx_2 - 3.24x_3 = 15.73 \\ 1.18x_1 - 4.87x_2 + 17Mx_3 = 18.42 \end{cases}$ với $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.3 \\ 3.4 \end{pmatrix}$

Sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$.

$x_1^{(3)}$ = ______________ $x_2^{(3)}$ = ______________ $x_3^{(3)}$ = ______________

Câu 3. Cho bảng số:

x	1.3	1.6	2.3
y	1.1M	4.3	6.6

Sử dụng spline bậc ba g(x) thỏa điều kiện g'(1.3) = 0.3 , g'(2.3) = 0.5 nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại x = 1.4 và x = 2.1.

$g(1.4)$ = ______________________ $g(2.1)$ = ______________________

Câu 4. Cho bảng số:

x	0.7	1.0	1.2	1.3	1.6
y	3.3	M	4.5	1.1M	6.1

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A\sqrt{x} + Bcos(x)$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

A = ______________________ B = ______________________

Câu 5. Cho bảng số:

x	0.1	0.3	0.6	0.9
y	1.3M	3.2	1.4M	4.3

Sử dụng đa thức nội suy Lagrange, hãy xấp xỉ đạo hàm cấp 1 của hàm tại x = 0.5.

$y'(0.5) =$ ______________________________

Câu 6. Cho tích phân $I = \int_{1.1}^{2.3} ln\left(\sqrt{2x+M}\right) dx$

Hãy xấp xỉ tích phân I bằng công thức hình thang mở rộng với n = 8.

I = ______________________________

Câu 7. Cho bảng số:

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	M	3.2	1.5M	4.5	5.1	6.2	7.4

Sử dụng công thức Simpson mở rộng tính tích phân $I = \int_{1.0}^{2.2}[f^2(x) + 1.1Mx^3]dx$.

I = ______________________________

Câu 8. Cho bài toán Cauchy: $\begin{cases} y' = (M+1)x + xsin(x+My) \ , \ x \geq 1 \\ y(1) = 1.2M \end{cases}$

Sử dụng công thức Runger-Kutta cấp 4, hãy xấp xỉ y(1.2) với bước h = 0.2.

$y(1.2) =$ ______________________________

Câu 9. Cho bài toán Cauchy: $\begin{cases} y''(x) = 2.3My' + Mx^3y + 1.3M \ , \ 1 \leq x \leq 1.8 \\ y(1) = 0.6M \ , \ y'(1) = 0.5M \end{cases}$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler, giải gần đúng phương trình với bước h = 0.2.

$y(1.2) =$ ____________________ $y(1.8) =$ ____________________

Câu 10. Cho bài toán biên tuyến tính cấp 2:

$$\begin{cases} xy'' + 12y' - 2.3My = M + 2(x+M)^2 \ , \ 0.4 \leq x \leq 1.2 \\ y(0.4) = 1.3 \ , \ y(1.2) = 2.3M \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, hãy xấp xỉ giá trị của hàm y(x) trên đoạn [0.4,1.2] với bước h = 0.2.

$y(0.6) =$ ______________ $y(0.8) =$ ______________ $y(1.0) =$ ______________

ĐỀ CUỐI KỲ 131

$M = \frac{m+2n+12}{10}$ với m, n là 2 chữ số cuối cùng của MSSV. Kết quả cuối cùng phải làm tròn đến chữ số lẻ thứ 4 sau dấu phẩy. Thiếu các thông số trên, bài thi sẽ không hợp lệ.

Câu 1. Cho phương trình $f(x) = 3^x + (M + 0.2)x^2 + sin(x) - 11 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [1;2]. Sử dụng phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, tìm nghiệm gần đúng x_2 của phương trình trên và đánh giá sai số của nó.

x_2 = ______________________________ Δx_2 = ______________________________

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 17Mx_1+3.1x_2-2.3x_3 = 8.19 \\ 2.5x_1+18Mx_2-1.8x_3 = 8.75 \\ 2.2x_1-4.1x_2+19Mx_3 = 9.47 \end{cases}$ với $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}$

Sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$.

$x_1^{(3)}$ = ____________________ $x_2^{(3)}$ = __________________ $x_3^{(3)}$ = ______________

Câu 3. Cho bảng số:

x	1.0	1.2	1.4
y	M	2.5	3.7

Sử dụng spline bậc ba g(x) tự nhiên nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại x = 1.1 và x = 1.3.

$g(1.1)$ = ________________________ $g(1.3)$ = ______________________________

Câu 4. Cho bảng số:

x	0.7	1.0	1.2	1.3	1.6
y	3.5	2M	4.3	M	6.4

Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A + Bsin(x) + Ccos(2x)$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

A = ____________________ B = _____________________ C = ____________________

Câu 5. Cho bảng số:

x	1.1	1.8	2.2	3.4
y	2M	7.3	5.5M	α

Sử dụng đa thức nội suy Newton, tìm giá trị của α để đa thức nội suy thỏa điều kiện $y'(1.5) = 2.4$

α = ____

Câu 6. Cho tích phân $I = \int_{1.1}^{2.3} \frac{2x}{\sqrt{x^3+2M}} dx$

Hãy xấp xỉ tích phân I bằng công thức Simpson mở rộng với n = 8.

I = ____

Câu 7. Cho bảng số:

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2M	3.2	M	4.4	5.1	6.2	7.5

Sử dụng công thức Simpson mở rộng tính tích phân $I = \int_{1.0}^{2.2} [f^2(x) + 1.2Mx^3] dx$.

I = ____

Câu 8. Cho bài toán Cauchy: $\begin{cases} x'(t) = 3cosx + 2Msint \ , \ t \geq 0.5 \\ x(0.5) = 0.2M \end{cases}$

Sử dụng công thức Runger-Kutta cấp 4, hãy xấp xỉ giá trị x(0.75) với bước h = 0.25.

$K_2 =$ ____________________ $x(0.75) =$ ____________________

Câu 9. Cho bài toán Cauchy: $\begin{cases} x''(t) = 2Mxx' - 0.5x^2 + 1.2t + M \ , \ t \geq 0.25 \\ x(0.25) = 0.2M \ , \ x'(0.25) = 0.5 \end{cases}$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler cải tiến, giải gần đúng phương trình tại t = 0.75 với bước h = 0.25.

$x(0.75) =$ ____

Câu 10. Cho bài toán biên tuyến tính cấp 2:

$$\begin{cases} y''(t) + (t^2 + M)y'(t) - 12My(t) = -4(t+1)^3 \ , \ 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0.5M \ , \ y(1) = M \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, hãy xấp xỉ giá trị của hàm y(t) trên đoạn [0;1] với bước h = 0.25.

$y(0.25) =$ ______________ $y(0.75) =$ ______________ $y(1.0) =$ ______________

ĐỀ CUỐI KỲ 161 (THI NGÀY 20/12/2016)

$M = \frac{10+m+n}{10}$ với m, n là 2 chữ số cuối cùng của MSSV. Kết quả cuối cùng phải làm tròn đến chữ số lẻ thứ 4 sau dấu phẩy. Thiếu các thông số trên, bài thi sẽ không hợp lệ.

Câu 1. Cho phương trình $e^x + 1.7x^2 + sin(x) + M - 9 = 0$ có khoảng cách ly nghiệm [1;2], chọn x_0 là điểm Fourier trong 2 điểm biên, tìm nghiệm gần đúng x_2 theo phương pháp Newton và sai số Δx_2.

$x_2 = 1.2126$ ______________________ $\Delta x_2 = 0.0148$ ______________________

Câu 2. Cho hệ $\begin{cases} 21Mx_1 + 2.7x_2 - 1.8x_3 = 12.8 \\ 1.3x_1 + 22Mx_2 - 3.2x_3 = 15.7 \\ 1.1x_1 - 4.8x_2 + 23Mx_3 = 18.4 \end{cases}$ với $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

Dùng phương pháp lặp Jacobi tìm $x^{(3)}$.

$x_1^{(3)} = 0.2606$ __________ $x_2^{(3)} = 0.3272$ ____________ $x_3^{(3)} = 0.3721$ ____________

Câu 3. Cho hệ $\begin{cases} 21Mx_1 + 2.7x_2 - 1.8x_3 = 12.8 \\ 1.3x_1 + 22Mx_2 - 3.2x_3 = 15.7 \\ 1.1x_1 - 4.8x_2 + 23Mx_3 = 18.4 \end{cases}$ với $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

Dùng phương pháp lặp Gauss-Seidel tìm $x^{(4)}$.

$x_1^{(4)} = 0.2606$ __________ $x_2^{(4)} = 0.3271$ ____________ $x_3^{(4)} = 0.3721$ ____________

Câu 4. Cho bảng số:

x	1.2	1.3	1.4	1.5
y	2M	2.5	3.6	a

Sử dụng phương pháp nội suy đa thức, tính a để $y'(1.35) = 3.0$.

a = 27.1000 ____

Câu 5. Cho bảng số:

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	2M	2.5	5.0	4.5	5.5

Dùng phương pháp bình phương cực tiểu, tìm hàm $y(x) = A\sqrt{x^3+2} + Bcos(x)$ xấp xỉ bảng số liệu trên.

A = 2.0993 ________________________ B = – 1.0361___________________________

Câu 6. Hàm số f(x) cho theo bảng số liệu:

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2.0	3.3	2.4	4.3	5.1	3M	7.4

Tính tích phân $I = \int_{1.0}^{2.2}\left[x\sqrt{f(x)} + 2.5x^2\right]dx$ theo phương pháp Simpson.

I = 12.2315 ____

Câu 7. Cho hàm $y(x) = \cos^4\left(\sqrt{x+M}\right) - sin(x)$. Tính gần đúng giá trị đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của hàm tại điểm x = 1.0 với bước h = 0.1.

$y'(1.0) =$ – 0.5239 __________________ $y''(1.0) =$ 0.8880 ______________________

Câu 8. Giải phương trình vi phân $y' = cos(x-y)$ với điều kiện $y(1.0) = M.$

Tìm $y(1.25)$ với bước chia h = 0.25 theo công thức Runge-Kutta.

$y(1.25) =$ 2.3869 ____

Câu 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} y' = x \\ z' = z + y + M \end{cases}$; $y(1) = 0\,; z(1) = 1$

Giải theo phương pháp Euler cải tiến, tính gần đúng $y(2.0)$, $z(2.0)$ với bước h = 0.2

$y(2.0) =$ 1.5000 ______________________ $z(2.0) =$ 7.5244 ______________________

Câu 10. Cho bài toán biên $\begin{cases} xy'' + x^3y' - 30y = Mx(x+3) \\ y(0.5) = M \;\;;\;\; y(1.5) = 2.5 \end{cases}$

Dùng phương pháp sai phân tính gần đúng $y(0.75)$, $y(1.0)$, $y(1.25)$ với bước h = 0.25

$y(0.75) =$ 0.3903______ $y(1.0) =$ 0.1467 ________ $y(1.25) =$ 0.7130 __________

(Cho giá trị **M = 2.3**)

ĐỀ CUỐI KỲ 162 (THI NGÀY 07/06/2017)

$M = \frac{10+m+n}{10}$ với m, n là 2 chữ số cuối cùng của MSSV. Kết quả cuối cùng phải làm tròn đến chữ số lẻ thứ 4 sau dấu phẩy. Thiếu các thông số trên, bài thi sẽ không hợp lệ.

Câu 1. Cho phương trình $e^x + 1.5x^2 + sin(x) + M - 10 = 0$ có khoảng cách ly nghiệm [1;2], chọn x_0 là điểm Fourier trong 2 điểm biên, tìm sai số Δx_2 của nghiệm gần đúng x_2 theo phương pháp Newton.

$\Delta x_2 = 0.0082$ ____________________

Câu 2. Cho hệ $\begin{cases} 10Mx_1 + 2.7x_2 - 1.8x_3 = 12.8 \\ 1.3x_1 + 20Mx_2 - 3.2x_3 = 15.7 \\ 1.1x_1 - 4.8x_2 + 30Mx_3 = 18.4 \end{cases}$ với $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

Dùng phương pháp lặp Jacobi, tìm $x^{(3)}$.

$x_1^{(3)} = 0.4963$ __________ $x_2^{(3)} = 0.3176$ __________ $x_3^{(3)} = 0.2584$ __________

Câu 3. Cho hệ $\begin{cases} 10Mx_1 + 2.7x_2 - 1.8x_3 = 12.8 \\ 1.3x_1 + 20Mx_2 - 3.2x_3 = 15.7 \\ 1.1x_1 - 4.8x_2 + 30Mx_3 = 18.4 \end{cases}$ với $x^{(0)} = \begin{pmatrix} M \\ M \\ M \end{pmatrix}$

Dùng phương pháp lặp Gauss-Seidel, tìm $x^{(2)}$.

$x_1^{(2)} = 0.4813$ __________ $x_2^{(2)} = 0.3187$ __________ $x_3^{(2)} = 0.2587$ __________

Câu 4. Cho bảng số:

x	1.2	1.3	1.4
y	a	2.5	2M

Sử dụng phương pháp nội suy đa thức, tính a để $y'(1.25) = M$

a = 2.2500 ____________________

Câu 5. Cho bảng số:

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	2M	2.5	5.1	4.5	5.5

Dùng phương pháp bình phương cực tiểu, tìm hàm $y(x) = A\sqrt{x^3+2} + Bsin(x)$ xấp xỉ bảng số liệu trên.

A = 2.9028 ________________________ B = – 1.8857___________________________

Câu 6. Hàm f(x) cho theo bảng số liệu:

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
f(x)	2.0	3.3	2.4	4.3	5.1	3M	7.4

Tính tích phân $I = \int_{1.0}^{2.2}\left[x.\sqrt[3]{f(x)} - x^2\right]dx$ theo phương pháp Simpson.

I = 0.0310 ____

Câu 7. Giải phương trình vi phân $y' = cos(x-y)$ với điều kiện $y(1.0) = M$

Tìm $y(1.5)$ với bước chia h = 0.1 theo công thức Euler cải tiến.

$y(1.5) = 2.6327$ ____

Câu 8. Giải phương trình vi phân $y' = cos(x-y)$ với điều kiện $y(1.0) = M$

Tìm $y(1.2)$ với bước chia h = 0.2 theo công thức Runge-Kutta.

$y(1.2) = 2.5314$ ____

Câu 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} y' = x \\ z' = z + y + M \end{cases}$; $y(1.0) = 0$; $z(1.0) = 1$

Giải theo phương pháp Euler cải tiến, tính gần đúng $y(2.0)$, $z(2.0)$ với bước h = 0.2.

$y(2.0) = 1.5000$ ________________ $z(2.0) = 7.8649$___________________________

Câu 10. Cho bài toán biên $\begin{cases} y'' + xy' - 3y = M(x+2) \\ y(0.5) = M \ ; \ y(1.5) = 2.0 \end{cases}$

Dùng phương pháp sai phân tính gần đúng $y(0.75)$, $y(1.0)$, $y(1.25)$ với bước h = 0.25

$y(0.75) = 1.2928$ _______ $y(1.0) = 0.9071$ ________ $y(1.25) = 1.1749$ ________

(Cho giá trị **M = 2.5**)

ĐỀ CUỐI KỲ 162 (THI NGÀY 26/06/2017)

$M = \frac{3m+n+10}{10}$ với m, n là 2 chữ số cuối cùng của MSSV. Kết quả cuối cùng phải làm tròn đến chữ số lẻ thứ 4 sau dấu phẩy. Thiếu các thông số trên, bài thi sẽ không hợp lệ.

Câu 1. Cho phương trình $f(x) = e^x - Mx^2 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [–1;0]. Sử dụng phương pháp Newton, tìm nghiệm gần đúng x_2 và đánh giá sai số của nó.

x_2 = – 0.6387________________________ Δx_2 = 0.0024____________________________

Câu 2. Cho bảng số:

x	1.2	1.4	1.8
y	M	1.2M	2.4

Sử dụng Spline bậc ba g(x) thỏa điều kiện g'(1.2) = 0.2, g'(1.8) = 0.5 để nội suy bảng số trên và tính xấp xỉ giá trị của hàm tại x = 1.3 và x = 1.5.

$g(1.3) = 1.3800$_________________ $g(1.5) = 1.8056$____________________________

Câu 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 17Mx_1 + 0.55x_2 - 1.85x_3 = 1.25 \\ 1.2x_1 + 14.5Mx_2 - 1.8x_3 = 2.45 \\ 1.8x_1 - 0.16x_2 + 16.3Mx_3 = 2.06 \end{cases}$ với $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

Sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$.

$x_1^{(3)}$ = 0.0610____________ $x_2^{(3)}$ = 0.1350______________ $x_3^{(3)}$ = 0.0931______________

Câu 4. Tìm hàm $f(x) = Ax + B\sqrt{x+3} + C$ xấp xỉ tốt nhất bảng số:

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	M	1.2M	2.4	2.1	2.3

A = – 155.6000_________ B = 663.2886___________ C = – 1171.3743______________

Câu 5. Cho bảng số:

x	0.2	0.4	0.6	0.8
y	1.7	1.5M	3.5	4.1

Sử dụng nội suy Lagrange tính g(0.5).

$g(0.5) = 2.7031$ ____________________

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_1^{1.6} \frac{x^2+1}{x^3+x+M} dx$ bằng Simpson mở rộng với n = 3.

I = 0.3358 ____________________

Câu 7. Cho hàm số f(x) dưới dạng bảng:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
y	1.7M	1.5M	3.5	4.1	3.2	5.0

Tính tích phân $I = \int_{0.2}^{1.2} x^2 f^3(x)\, dx$ bằng hình thang mở rộng.

I = 36.7429 ____________________

Câu 8. Cho phương trình Cauchy: $\begin{cases} y'cosx - ysinx = Mx^2 + Mx \\ y(0) = 0 \quad , \quad h = 0.2 \end{cases}$

Dùng phương pháp Runge-Kutta 4, tính y(0.2) và y(0.4).

$y(0.2) = 0.0301$ ____________ $y(0.4) = 0.1430$____________

Câu 9. Cho phương trình: $\begin{cases} Mx''(t) - tx'(t) + (2t + M)x(t) = t \\ x(1) = 0 \quad , \quad x'(1) = 1 \quad , \quad h = 0.2 \end{cases}$

Dùng phương pháp Euler tính nghiệm của phương trình vi phân tại t = 1.4.

$x(1.4) = 0.4615$ ____________________

Câu 10. Giải bài toán biên sau bằng phương pháp sai phân hữu hạn:

$$\begin{cases} y'' + xy' - My = xe^{-x} \\ y(1) = 0.2 \quad , \quad y(2) = 0 \quad , \quad h = 0.25 \end{cases}$$

$y(1.25) = 0.0822$________ $y(1.5) = 0.0214$ _______$y(1.75) =$ – 0.0011 ________

(Cho giá trị **M = 1.3**)

Trường Đại Học Bách Khoa TP. HCM
Bộ môn Toán ứng dụng

ĐỀ SỐ: 1933

------ o O o ------

KIỂM TRA GIỮA KỲ
MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

THỜI LƯỢNG: 40 PHÚT - NGÀY ...../...../.........

(Sinh viên được sử dụng tài liệu và máy tính)

---

1. Biết A có giá trị gần đúng là $a = 0.3102$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.30\%$. Ta làm tròn a thành $a^* = 0.31$. Sai số tuyệt đối của a^* là:
   ⓐ 0.0012 ⓑ 0.0013 ⓒ 0.0014 ⓓ 0.0015 ⓔ Các câu khác đều sai.

2. Cho $a = 0.3708$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.51\%$. Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là:
   ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4 ⓔ Các câu khác đều sai.

3. Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. Biết $x = 3.8071 \pm 0.0063$ và $y = 0.4495 \pm 0.0008$. Sai số tuyệt đối của f là:
   ⓐ 0.2801 ⓑ 0.2802 ⓒ 0.2803 ⓓ 0.2804 ⓔ Các câu khác đều sai.

4. Phương trình $f(x) = 5x^3 + 14x - 17 = 0$ trên khoảng cách li nghiệm $[0, 1]$ có nghiệm gần đúng $x^* = 0.94$. Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của x^* là:
   ⓐ 0.0223 ⓑ 0.0224 ⓒ 0.0225 ⓓ 0.0226 ⓔ Các câu khác đều sai.

5. Cho phương trình $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 8x - 9 = 0$ trong khoảng cách li nghiệm $[5, 6]$. Theo phương pháp chia đôi, nghiệm gần đúng x_5 của phương trình là:
   ⓐ 5.9531 ⓑ 5.9631 ⓒ 5.9731 ⓓ 5.9831 ⓔ Các câu khác đều sai.

6. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{7x + 4}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Sử dụng phương pháp lặp đơn, chọn $x_0 = 2.9$, tính số lần lặp nhỏ nhất để được nghiệm với sai số nhỏ hơn 10^{-10}.
   ⓐ 16 ⓑ 17 ⓒ 18 ⓓ 19 ⓔ Các câu khác đều sai.

7. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{2x + 13}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn $x_0 = 2.6$ thì nghiệm gần đúng x_2 theo phương pháp lặp đơn là:
   ⓐ 2.6333 ⓑ 2.6334 ⓒ 2.6335 ⓓ 2.6336 ⓔ Các câu khác đều sai.

8. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{2x + 13}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn $x_0 = 2.6$ thì sai số tuyệt đối nhỏ nhất của nghiệm gần đúng x_2 theo công thức tiên nghiệm là:
   ⓐ 0.0004 ⓑ 0.0005 ⓒ 0.0006 ⓓ 0.0007 ⓔ Các câu khác đều sai.

9. Cho phương trình $f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 16x - 21 = 0$. Với $x_0 = 2.0$ nghiệm gần đúng x_1 tính theo phương pháp Newton là:
   ⓐ 2.0500 ⓑ 2.0501 ⓒ 2.0502 ⓓ 2.0503 ⓔ Các câu khác đều sai.

10. Cho phương trình $f(x) = 5x^3 + 8x^2 + 15x + 17 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [-1.4,-1.3]. Trong phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, sai số của nghiệm gần đúng x_1 tính theo công thức sai số tổng quát là:
    ⓐ 0.0053 ⓑ 0.0054 ⓒ 0.0055 ⓓ 0.0056 ⓔ Các câu khác đều sai.

11. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = LU$ theo phương pháp Doolittle, tổng các phần tử $tr(U) = U_{11} + U_{22} + U_{33}$ của ma trận U là:
ⓐ 11.1912 ⓑ 12.1912 ⓒ 13.1912 ⓓ 14.1912 ⓔ Các câu khác đều sai.

12. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -5 & 15 & -2 \\ -4 & -2 & 69 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = BB^T$ theo phương pháp Choleski, phần tử B_{32} của ma trận B là:
ⓐ -7.5895 ⓑ -7.5893 ⓒ -7.5891 ⓓ -7.5889 ⓔ Các câu khác đều sai.

13. Cho $A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & -2 \\ 10 & \alpha & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Với điều kiện nào của α, ma trận A đối xứng và xác định dương
ⓐ $\alpha > 11.130$ ⓑ $\alpha > 11.131$ ⓒ $\alpha > 11.132$ ⓓ $\alpha > 11.133$ ⓔ Các câu khác đều sai.

14. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 7 \\ -7 & -8 & -4 \\ -6 & -7 & -3 \end{pmatrix}$. Số điều kiện tính theo chuẩn vô cùng của ma trận A là:
ⓐ 100.0567 ⓑ 100.0667 ⓒ 100.0767 ⓓ 100.0867 ⓔ Các câu khác đều sai.

15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 15x_1 - 2x_2 = 3 \\ -4x_1 + 8x_2 = 5 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.4, 0.3]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Jacobi, sử dụng công thức hậu nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.0800 ⓑ 0.0802 ⓒ 0.0804 ⓓ 0.0806 ⓔ Các câu khác đều sai.

16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 11x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 12x_2 = 6 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.7, 0.8]^T$, sử dụng phương pháp Jacobi, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_\infty < 0.0400$.
ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ 2 ⓓ 3 ⓔ Các câu khác đều sai.

17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 14x_1 + 7x_2 = 2 \\ -3x_1 + 14x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.7, 0.5]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Jacobi là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.011 \\ 0.270 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.013 \\ 0.268 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.015 \\ 0.266 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.017 \\ 0.264 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 = 2 \\ -3x_1 + 11x_2 = 5 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.5, 0.7]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel, sử dụng công thức tiên nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.0772 ⓑ 0.0774 ⓒ 0.0776 ⓓ 0.0778 ⓔ Các câu khác đều sai.

19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 = 2 \\ 5x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.4, 0.4]^T$, sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_1 < 0.0200$.
ⓐ 4 ⓑ 5 ⓒ 6 ⓓ 7 ⓔ Các câu khác đều sai.

20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 19x_1 - 5x_2 = 4 \\ -2x_1 + 13x_2 = 2 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.2, 0.7]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.260 \\ 0.196 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.262 \\ 0.194 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.264 \\ 0.192 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.266 \\ 0.190 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

CHỦ NHIỆM BỘ MÔN

Trường Đại Học Bách Khoa TP. HCM

Bộ môn Toán ứng dụng

ĐỀ SỐ: 9346

------ o O o ------

KIỂM TRA GIỮA KỲ
MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH
THỜI LƯỢNG: 40 PHÚT - NGÀY ...../...../.........

(Sinh viên được sử dụng tài liệu và máy tính)

---

1. Biết A có giá trị gần đúng là $a = 4.1675$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.77\%$. Ta làm tròn a thành $a^* = 4.17$. Sai số tuyệt đối của a^* là:
ⓐ 0.0345 ⓑ 0.0346 ⓒ 0.0347 ⓓ 0.0348 ⓔ Các câu khác đều sai.

2. Cho $a = 1.3380$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.86\%$. Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là:
ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4 ⓔ Các câu khác đều sai.

3. Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. Biết $x = 4.9494 \pm 0.0051$ và $y = 4.4214 \pm 0.0059$. Sai số tuyệt đối của f là:
ⓐ 0.7724 ⓑ 0.7725 ⓒ 0.7726 ⓓ 0.7727 ⓔ Các câu khác đều sai.

4. Phương trình $f(x) = 2x^3 + 7x - 13 = 0$ trên khoảng cách li nghiệm $[1, 2]$ có nghiệm gần đúng $x^* = 1.28$. Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của x^* là:
ⓐ 0.0118 ⓑ 0.0119 ⓒ 0.0120 ⓓ 0.0121 ⓔ Các câu khác đều sai.

5. Cho phương trình $f(x) = 4x^3 - 13x^2 + 13x - 10 = 0$ trong khoảng cách li nghiệm $[2, 3]$. Theo phương pháp chia đôi, nghiệm gần đúng x_5 của phương trình là:
ⓐ 2.2969 ⓑ 2.3069 ⓒ 2.3169 ⓓ 2.3269 ⓔ Các câu khác đều sai.

6. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{5x+4}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Sử dụng phương pháp lặp đơn, chọn $x_0 = 2.6$, tính số lần lặp nhỏ nhất để được nghiệm với sai số nhỏ hơn 10^{-10}.
ⓐ 16 ⓑ 17 ⓒ 18 ⓓ 19 ⓔ Các câu khác đều sai.

7. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{2x+5}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn $x_0 = 2.1$ thì nghiệm gần đúng x_2 theo phương pháp lặp đơn là:
ⓐ 2.0946 ⓑ 2.0947 ⓒ 2.0948 ⓓ 2.0949 ⓔ Các câu khác đều sai.

8. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{2x+5}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn $x_0 = 2.1$ thì sai số tuyệt đối nhỏ nhất của nghiệm gần đúng x_2 theo công thức tiên nghiệm là:
ⓐ 0.0002 ⓑ 0.0003 ⓒ 0.0004 ⓓ 0.0005 ⓔ Các câu khác đều sai.

9. Cho phương trình $f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 8x - 15 = 0$. Với $x_0 = 2.5$ nghiệm gần đúng x_1 tính theo phương pháp Newton là:
ⓐ 2.5446 ⓑ 2.5447 ⓒ 2.5448 ⓓ 2.5449 ⓔ Các câu khác đều sai.

10. Cho phương trình $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 17 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [-1.3,-1.2]. Trong phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, sai số của nghiệm gần đúng x_1 tính theo công thức sai số tổng quát là:
ⓐ 0.0002 ⓑ 0.0003 ⓒ 0.0004 ⓓ 0.0005 ⓔ Các câu khác đều sai.

11. Cho $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = LU$ theo phương pháp Doolittle, tổng các phần tử $tr(U) = U_{11} + U_{22} + U_{33}$ của ma trận U là:
ⓐ 2.9318 ⓑ 3.9318 ⓒ 4.9318 ⓓ 5.9318 ⓔ Các câu khác đều sai.

12. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = BB^T$ theo phương pháp Choleski, phần tử B_{32} của ma trận B là:
ⓐ -0.0006 ⓑ -0.0004 ⓒ -0.0002 ⓓ 0.0000 ⓔ Các câu khác đều sai.

13. Cho $A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 6 \\ -8 & \alpha & -6 \\ 6 & -6 & 8 \end{pmatrix}$. Với điều kiện nào của α, ma trận A đối xứng và xác định dương
ⓐ $\alpha > 9.399$ ⓑ $\alpha > 9.400$ ⓒ $\alpha > 9.401$ ⓓ $\alpha > 9.402$ ⓔ Các câu khác đều sai.

14. Cho $A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -7 \\ -8 & -2 & 8 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Số điều kiện tính theo chuẩn vô cùng của ma trận A là:
ⓐ 22.9993 ⓑ 23.0093 ⓒ 23.0193 ⓓ 23.0293 ⓔ Các câu khác đều sai.

15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 8x_2 = 2 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.4, 0.6]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Jacobi, sử dụng công thức hậu nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.0374 ⓑ 0.0376 ⓒ 0.0378 ⓓ 0.0380 ⓔ Các câu khác đều sai.

16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 18x_1 + 4x_2 = 4 \\ 4x_1 + 15x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.6, 0.7]^T$, sử dụng phương pháp Jacobi, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_\infty < 0.0400$.
ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4 ⓔ Các câu khác đều sai.

17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 17x_1 + 2x_2 = 2 \\ -2x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.8, 0.2]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Jacobi là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.026 \\ 0.720 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.028 \\ 0.718 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.030 \\ 0.716 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.032 \\ 0.714 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 12x_1 - 7x_2 = 7 \\ -6x_1 + 14x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.9, 0.4]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel, sử dụng công thức tiên nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.1923 ⓑ 0.1925 ⓒ 0.1927 ⓓ 0.1929 ⓔ Các câu khác đều sai.

19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 13x_1 - 3x_2 = 4 \\ 5x_1 + 15x_2 = 6 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.2, 0.3]^T$, sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_1 < 0.0600$.
ⓐ 2 ⓑ 3 ⓒ 4 ⓓ 5 ⓔ Các câu khác đều sai.

20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 13x_1 + 2x_2 = 7 \\ -4x_1 + 13x_2 = 7 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.8, 0.2]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.431 \\ 0.676 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.433 \\ 0.674 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.435 \\ 0.672 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.437 \\ 0.670 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

CHỦ NHIỆM BỘ MÔN

Trường Đại Học Bách Khoa TP. HCM

Bộ môn Toán ứng dụng

ĐỀ SỐ: 1363

------ o O o ------

KIỂM TRA GIỮA KỲ
MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH
THỜI LƯỢNG: 40 PHÚT - NGÀY ...../...../.........

(Sinh viên được sử dụng tài liệu và máy tính)

---

1. Biết A có giá trị gần đúng là $a = 4.7847$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.94\%$. Ta làm tròn a thành $a^* = 4.78$. Sai số tuyệt đối của a^* là:
   ⓐ 0.0496 ⓑ 0.0497 ⓒ 0.0498 ⓓ 0.0499 ⓔ Các câu khác đều sai.

2. Cho $a = 3.6631$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.24\%$. Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là:
   ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4 ⓔ Các câu khác đều sai.

3. Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. Biết $x = 3.8195 \pm 0.0076$ và $y = 3.7032 \pm 0.0074$. Sai số tuyệt đối của f là:
   ⓐ 0.6933 ⓑ 0.6934 ⓒ 0.6935 ⓓ 0.6936 ⓔ Các câu khác đều sai.

4. Phương trình $f(x) = 2x^3 + 12x - 15 = 0$ trên khoảng cách li nghiệm $[1, 2]$ có nghiệm gần đúng $x^* = 1.06$. Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của x^* là:
   ⓐ 0.0055 ⓑ 0.0056 ⓒ 0.0057 ⓓ 0.0058 ⓔ Các câu khác đều sai.

5. Cho phương trình $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 13x - 5 = 0$ trong khoảng cách li nghiệm $[0, 1]$. Theo phương pháp chia đôi, nghiệm gần đúng x_5 của phương trình là:
   ⓐ 0.4844 ⓑ 0.4944 ⓒ 0.5044 ⓓ 0.5144 ⓔ Các câu khác đều sai.

6. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{2x + 13}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Sử dụng phương pháp lặp đơn, chọn $x_0 = 2.6$, tính số lần lặp nhỏ nhất để được nghiệm với sai số nhỏ hơn 10^{-10}.
   ⓐ 7 ⓑ 8 ⓒ 9 ⓓ 10 ⓔ Các câu khác đều sai.

7. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{8x + 11}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [3,4]. Nếu chọn $x_0 = 3.4$ thì nghiệm gần đúng x_2 theo phương pháp lặp đơn là:
   ⓐ 3.3603 ⓑ 3.3604 ⓒ 3.3605 ⓓ 3.3606 ⓔ Các câu khác đều sai.

8. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{8x + 11}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [3,4]. Nếu chọn $x_0 = 3.4$ thì sai số tuyệt đối nhỏ nhất của nghiệm gần đúng x_2 theo công thức tiên nghiệm là:
   ⓐ 0.0026 ⓑ 0.0027 ⓒ 0.0028 ⓓ 0.0029 ⓔ Các câu khác đều sai.

9. Cho phương trình $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 19x - 16 = 0$. Với $x_0 = 0.9$ nghiệm gần đúng x_1 tính theo phương pháp Newton là:
   ⓐ 0.9497 ⓑ 0.9498 ⓒ 0.9499 ⓓ 0.9500 ⓔ Các câu khác đều sai.

10. Cho phương trình $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 17x + 22 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [-1.4,-1.3]. Trong phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, sai số của nghiệm gần đúng x_1 tính theo công thức sai số tổng quát là:
    ⓐ 0.0008 ⓑ 0.0009 ⓒ 0.0010 ⓓ 0.0011 ⓔ Các câu khác đều sai.

11. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = LU$ theo phương pháp Doolittle, tổng các phần tử $tr(U) = U_{11} + U_{22} + U_{33}$ của ma trận U là:
ⓐ -20.8095 ⓑ -19.8095 ⓒ -18.8095 ⓓ -17.8095 ⓔ Các câu khác đều sai.

12. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 22 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = BB^T$ theo phương pháp Choleski, phần tử B_{32} của ma trận B là:
ⓐ -4.2426 ⓑ -4.2424 ⓒ -4.2422 ⓓ -4.2420 ⓔ Các câu khác đều sai.

13. Cho $A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & \alpha & 7 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. Với điều kiện nào của α, ma trận A đối xứng và xác định dương
ⓐ $\alpha > 13.231$ ⓑ $\alpha > 13.232$ ⓒ $\alpha > 13.233$ ⓓ $\alpha > 13.234$ ⓔ Các câu khác đều sai.

14. Cho $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 7 & 5 & 9 \\ 2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$. Số điều kiện tính theo chuẩn vô cùng của ma trận A là:
ⓐ 4.0318 ⓑ 4.0418 ⓒ 4.0518 ⓓ 4.0618 ⓔ Các câu khác đều sai.

15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 = 3 \\ 2x_1 + 13x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.8, 0.6]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Jacobi, sử dụng công thức hậu nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.1574 ⓑ 0.1576 ⓒ 0.1578 ⓓ 0.1580 ⓔ Các câu khác đều sai.

16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 = 3 \\ -7x_1 + 12x_2 = 3 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.8, 0.4]^T$, sử dụng phương pháp Jacobi, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_\infty < 0.0600$.
ⓐ 9 ⓑ 10 ⓒ 11 ⓓ 12 ⓔ Các câu khác đều sai.

17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 13x_1 - 2x_2 = 6 \\ -6x_1 + 15x_2 = 6 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.3, 0.3]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Jacobi là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.550 \\ 0.621 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.552 \\ 0.619 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.554 \\ 0.617 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.556 \\ 0.615 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 = 6 \\ -7x_1 + 14x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.9, 0.2]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel, sử dụng công thức tiên nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.0279 ⓑ 0.0281 ⓒ 0.0283 ⓓ 0.0285 ⓔ Các câu khác đều sai.

19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 10x_1 + 6x_2 = 4 \\ -6x_1 + 12x_2 = 5 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.2, 0.7]^T$, sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_1 < 0.0800$.
ⓐ 2 ⓑ 3 ⓒ 4 ⓓ 5 ⓔ Các câu khác đều sai.

20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 = 7 \\ -5x_1 + 18x_2 = 6 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.7, 0.6]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.387 \\ 0.441 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.389 \\ 0.439 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.391 \\ 0.437 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.393 \\ 0.435 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

CHỦ NHIỆM BỘ MÔN

Trường Đại Học Bách Khoa TP. HCM

Bộ môn Toán ứng dụng

ĐỀ SỐ: 3482

------ o O o ------

KIỂM TRA GIỮA KỲ
MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH
THỜI LƯỢNG: 40 PHÚT - NGÀY ...../...../.........

(Sinh viên được sử dụng tài liệu và máy tính)

---

1. Biết A có giá trị gần đúng là $a = 0.9738$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.23\%$. Ta làm tròn a thành $a^* = 0.97$. Sai số tuyệt đối của a^* là:
   ⓐ 0.0059 ⓑ 0.0060 ⓒ 0.0061 ⓓ 0.0062 ⓔ Các câu khác đều sai.

2. Cho $a = 1.3657$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.23\%$. Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là:
   ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4 ⓔ Các câu khác đều sai.

3. Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. Biết $x = 2.1785 \pm 0.0031$ và $y = 4.6169 \pm 0.0043$. Sai số tuyệt đối của f là:
   ⓐ 0.3427 ⓑ 0.3428 ⓒ 0.3429 ⓓ 0.3430 ⓔ Các câu khác đều sai.

4. Phương trình $f(x) = 2x^3 + 14x - 30 = 0$ trên khoảng cách li nghiệm $[1, 2]$ có nghiệm gần đúng $x^* = 1.59$. Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của x^* là:
   ⓐ 0.0149 ⓑ 0.0150 ⓒ 0.0151 ⓓ 0.0152 ⓔ Các câu khác đều sai.

5. Cho phương trình $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 8x - 12 = 0$ trong khoảng cách li nghiệm $[1, 2]$. Theo phương pháp chia đôi, nghiệm gần đúng x_5 của phương trình là:
   ⓐ 1.7656 ⓑ 1.7756 ⓒ 1.7856 ⓓ 1.7956 ⓔ Các câu khác đều sai.

6. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{6x + 7}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Sử dụng phương pháp lặp đơn, chọn $x_0 = 2.9$, tính số lần lặp nhỏ nhất để được nghiệm với sai số nhỏ hơn 10^{-10}.
   ⓐ 12 ⓑ 13 ⓒ 14 ⓓ 15 ⓔ Các câu khác đều sai.

7. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{6x + 14}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [3,4]. Nếu chọn $x_0 = 3.2$ thì nghiệm gần đúng x_2 theo phương pháp lặp đơn là:
   ⓐ 3.2166 ⓑ 3.2167 ⓒ 3.2168 ⓓ 3.2169 ⓔ Các câu khác đều sai.

8. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{6x + 14}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [3,4]. Nếu chọn $x_0 = 3.2$ thì sai số tuyệt đối nhỏ nhất của nghiệm gần đúng x_2 theo công thức tiên nghiệm là:
   ⓐ 0.0005 ⓑ 0.0006 ⓒ 0.0007 ⓓ 0.0008 ⓔ Các câu khác đều sai.

9. Cho phương trình $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$. Với $x_0 = 2.0$ nghiệm gần đúng x_1 tính theo phương pháp Newton là:
   ⓐ 1.9998 ⓑ 1.9999 ⓒ 2.0000 ⓓ 2.0001 ⓔ Các câu khác đều sai.

10. Cho phương trình $f(x) = 3x^3 + 11x^2 + 6x + 8 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [-3.4,-3.3]. Trong phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, sai số của nghiệm gần đúng x_1 tính theo công thức sai số tổng quát là:
    ⓐ 0.0048 ⓑ 0.0049 ⓒ 0.0050 ⓓ 0.0051 ⓔ Các câu khác đều sai.

11. Cho $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = LU$ theo phương pháp Doolittle, tổng các phần tử $tr(U) = U_{11} + U_{22} + U_{33}$ của ma trận U là:
ⓐ 19.4286 ⓑ 20.4286 ⓒ 21.4286 ⓓ 22.4286 ⓔ Các câu khác đều sai.

12. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = BB^T$ theo phương pháp Choleski, phần tử B_{32} của ma trận B là:
ⓐ 0.7067 ⓑ 0.7069 ⓒ 0.7071 ⓓ 0.7073 ⓔ Các câu khác đều sai.

13. Cho $A = \begin{pmatrix} 13 & -10 & 8 \\ -10 & \alpha & -7 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Với điều kiện nào của α, ma trận A đối xứng và xác định dương
ⓐ $\alpha > 8.356$ ⓑ $\alpha > 8.357$ ⓒ $\alpha > 8.358$ ⓓ $\alpha > 8.359$ ⓔ Các câu khác đều sai.

14. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 7 & -8 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Số điều kiện tính theo chuẩn vô cùng của ma trận A là:
ⓐ 30.9375 ⓑ 30.9475 ⓒ 30.9575 ⓓ 30.9675 ⓔ Các câu khác đều sai.

15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 = 5 \\ -6x_1 + 12x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.5, 0.3]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Jacobi, sử dụng công thức hậu nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.1175 ⓑ 0.1177 ⓒ 0.1179 ⓓ 0.1181 ⓔ Các câu khác đều sai.

16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 12x_1 - 5x_2 = 4 \\ -4x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.8, 0.8]^T$, sử dụng phương pháp Jacobi, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_\infty < 0.0700$.
ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4 ⓔ Các câu khác đều sai.

17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 = 7 \\ -5x_1 + 18x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.3, 0.5]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Jacobi là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.664 \\ 0.400 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.666 \\ 0.398 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.668 \\ 0.396 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.670 \\ 0.394 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 17x_1 - 6x_2 = 2 \\ 3x_1 + 14x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.2, 1.0]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel, sử dụng công thức tiên nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.1568 ⓑ 0.1570 ⓒ 0.1572 ⓓ 0.1574 ⓔ Các câu khác đều sai.

19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 16x_1 - 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + 17x_2 = 3 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.3, 0.5]^T$, sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_1 < 0.0050$.
ⓐ 2 ⓑ 3 ⓒ 4 ⓓ 5 ⓔ Các câu khác đều sai.

20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 15x_1 + 7x_2 = 3 \\ -5x_1 + 16x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [1.0, 0.3]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.072 \\ 0.273 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.074 \\ 0.271 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.076 \\ 0.269 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.078 \\ 0.267 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

CHỦ NHIỆM BỘ MÔN

Trường Đại Học Bách Khoa TP. HCM
Bộ môn Toán ứng dụng

ĐỀ SỐ: 2664

------ o O o ------

KIỂM TRA GIỮA KỲ
MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH
THỜI LƯỢNG: 40 PHÚT - NGÀY ...../...../.........

(Sinh viên được sử dụng tài liệu và máy tính)

---

1. Biết A có giá trị gần đúng là $a = 1.1822$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.18\%$. Ta làm tròn a thành $a^* = 1.18$. Sai số tuyệt đối của a^* là:
ⓐ 0.0041 ⓑ 0.0042 ⓒ 0.0043 ⓓ 0.0044 ⓔ Các câu khác đều sai.

2. Cho $a = 6.6371$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.77\%$. Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là:
ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4 ⓔ Các câu khác đều sai.

3. Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. Biết $x = 4.6724 \pm 0.0011$ và $y = 0.9111 \pm 0.0010$. Sai số tuyệt đối của f là:
ⓐ 0.0800 ⓑ 0.0801 ⓒ 0.0802 ⓓ 0.0803 ⓔ Các câu khác đều sai.

4. Phương trình $f(x) = 3x^3 + 7x - 28 = 0$ trên khoảng cách li nghiệm $[1, 2]$ có nghiệm gần đúng $x^* = 1.75$. Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của x^* là:
ⓐ 0.0205 ⓑ 0.0206 ⓒ 0.0207 ⓓ 0.0208 ⓔ Các câu khác đều sai.

5. Cho phương trình $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 11x - 23 = 0$ trong khoảng cách li nghiệm $[2, 3]$. Theo phương pháp chia đôi, nghiệm gần đúng x_5 của phương trình là:
ⓐ 2.5681 ⓑ 2.5781 ⓒ 2.5881 ⓓ 2.5981 ⓔ Các câu khác đều sai.

6. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{3x + 6}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Sử dụng phương pháp lặp đơn, chọn $x_0 = 2.4$, tính số lần lặp nhỏ nhất để được nghiệm với sai số nhỏ hơn 10^{-10}.
ⓐ 13 ⓑ 14 ⓒ 15 ⓓ 16 ⓔ Các câu khác đều sai.

7. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{4x + 6}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn $x_0 = 2.5$ thì nghiệm gần đúng x_2 theo phương pháp lặp đơn là:
ⓐ 2.5240 ⓑ 2.5241 ⓒ 2.5242 ⓓ 2.5243 ⓔ Các câu khác đều sai.

8. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{4x + 6}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn $x_0 = 2.5$ thì sai số tuyệt đối nhỏ nhất của nghiệm gần đúng x_2 theo công thức tiên nghiệm là:
ⓐ 0.0014 ⓑ 0.0015 ⓒ 0.0016 ⓓ 0.0017 ⓔ Các câu khác đều sai.

9. Cho phương trình $f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 14x - 3 = 0$. Với $x_0 = 2.9$ nghiệm gần đúng x_1 tính theo phương pháp Newton là:
ⓐ 2.8729 ⓑ 2.8730 ⓒ 2.8731 ⓓ 2.8732 ⓔ Các câu khác đều sai.

10. Cho phương trình $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 13x + 13 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [-1.3,-1.2]. Trong phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, sai số của nghiệm gần đúng x_1 tính theo công thức sai số tổng quát là:
ⓐ 0.0002 ⓑ 0.0003 ⓒ 0.0004 ⓓ 0.0005 ⓔ Các câu khác đều sai.

11. Cho $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 8 & 1 & 4 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = LU$ theo phương pháp Doolittle, tổng các phần tử $tr(U) = U_{11} + U_{22} + U_{33}$ của ma trận U là:
ⓐ 4.3735 ⓑ 5.3735 ⓒ 6.3735 ⓓ 7.3735 ⓔ Các câu khác đều sai.

12. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = BB^T$ theo phương pháp Choleski, phần tử B_{32} của ma trận B là:
ⓐ -1.6330 ⓑ -1.6328 ⓒ -1.6326 ⓓ -1.6324 ⓔ Các câu khác đều sai.

13. Cho $A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & -4 \\ 8 & \alpha & -9 \\ -4 & -9 & 2 \end{pmatrix}$. Với điều kiện nào của α, ma trận A đối xứng và xác định dương
ⓐ $\alpha > 60.498$ ⓑ $\alpha > 60.499$ ⓒ $\alpha > 60.500$ ⓓ $\alpha > 60.501$ ⓔ Các câu khác đều sai.

14. Cho $A = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ -9 & -8 & -9 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Số điều kiện tính theo chuẩn vô cùng của ma trận A là:
ⓐ 12.5680 ⓑ 12.5780 ⓒ 12.5880 ⓓ 12.5980 ⓔ Các câu khác đều sai.

15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 16x_1 - 5x_2 = 2 \\ -3x_1 + 17x_2 = 2 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.2, 0.9]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Jacobi, sử dụng công thức hậu nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.1058 ⓑ 0.1060 ⓒ 0.1062 ⓓ 0.1064 ⓔ Các câu khác đều sai.

16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 15x_1 + 5x_2 = 3 \\ -6x_1 + 12x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.2, 1.0]^T$, sử dụng phương pháp Jacobi, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_\infty < 0.0200$.
ⓐ 5 ⓑ 6 ⓒ 7 ⓓ 8 ⓔ Các câu khác đều sai.

17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 3 \\ 5x_1 + 20x_2 = 2 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.5, 0.2]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Jacobi là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.273 \\ 0.024 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.275 \\ 0.022 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.277 \\ 0.020 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.279 \\ 0.018 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 16x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_1 + 8x_2 = 2 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.2, 0.4]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel, sử dụng công thức tiên nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.0074 ⓑ 0.0076 ⓒ 0.0078 ⓓ 0.0080 ⓔ Các câu khác đều sai.

19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 12x_1 + 6x_2 = 4 \\ 5x_1 + 11x_2 = 2 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.7, 0.9]^T$, sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_1 < 0.0500$.
ⓐ 2 ⓑ 3 ⓒ 4 ⓓ 5 ⓔ Các câu khác đều sai.

20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 19x_1 + 6x_2 = 3 \\ -4x_1 + 15x_2 = 5 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.3, 0.8]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.048 \\ 0.346 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.050 \\ 0.344 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.052 \\ 0.342 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.054 \\ 0.340 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

CHỦ NHIỆM BỘ MÔN

Trường Đại Học Bách Khoa TP. HCM

Bộ môn Toán ứng dụng

ĐỀ SỐ: 8385

------ o O o ------

KIỂM TRA GIỮA KỲ
MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH
THỜI LƯỢNG: 40 PHÚT - NGÀY ...../...../.........

(Sinh viên được sử dụng tài liệu và máy tính)

---

1. Biết A có giá trị gần đúng là $a = 4.6675$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.67\%$. Ta làm tròn a thành $a^* = 4.67$. Sai số tuyệt đối của a^* là:
ⓐ 0.0337 ⓑ 0.0338 ⓒ 0.0339 ⓓ 0.0340 ⓔ Các câu khác đều sai.

2. Cho $a = 1.6542$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.65\%$. Số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a là:
ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4 ⓔ Các câu khác đều sai.

3. Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. Biết $x = 0.3603 \pm 0.0041$ và $y = 3.3347 \pm 0.0093$. Sai số tuyệt đối của f là:
ⓐ 0.3286 ⓑ 0.3287 ⓒ 0.3288 ⓓ 0.3289 ⓔ Các câu khác đều sai.

4. Phương trình $f(x) = 5x^3 + 10x - 24 = 0$ trên khoảng cách li nghiệm $[1, 2]$ có nghiệm gần đúng $x^* = 1.31$. Sai số nhỏ nhất theo công thức đánh giá sai số tổng quát của x^* là:
ⓐ 0.0134 ⓑ 0.0135 ⓒ 0.0136 ⓓ 0.0137 ⓔ Các câu khác đều sai.

5. Cho phương trình $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 15x - 26 = 0$ trong khoảng cách li nghiệm $[4, 5]$. Theo phương pháp chia đôi, nghiệm gần đúng x_5 của phương trình là:
ⓐ 4.2969 ⓑ 4.3069 ⓒ 4.3169 ⓓ 4.3269 ⓔ Các câu khác đều sai.

6. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{4x + 10}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Sử dụng phương pháp lặp đơn, chọn $x_0 = 2.8$, tính số lần lặp nhỏ nhất để được nghiệm với sai số nhỏ hơn 10^{-10}.
ⓐ 11 ⓑ 12 ⓒ 13 ⓓ 14 ⓔ Các câu khác đều sai.

7. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{3x + 15}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn $x_0 = 2.9$ thì nghiệm gần đúng x_2 theo phương pháp lặp đơn là:
ⓐ 2.8688 ⓑ 2.8689 ⓒ 2.8690 ⓓ 2.8691 ⓔ Các câu khác đều sai.

8. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{3x + 15}$ thoả điều kiện lặp đơn trên [2,3]. Nếu chọn $x_0 = 2.9$ thì sai số tuyệt đối nhỏ nhất của nghiệm gần đúng x_2 theo công thức tiên nghiệm là:
ⓐ 0.0005 ⓑ 0.0006 ⓒ 0.0007 ⓓ 0.0008 ⓔ Các câu khác đều sai.

9. Cho phương trình $f(x) = 5x^3 - 16x^2 + 13x - 18 = 0$. Với $x_0 = 2.7$ nghiệm gần đúng x_1 tính theo phương pháp Newton là:
ⓐ 2.7310 ⓑ 2.7311 ⓒ 2.7312 ⓓ 2.7313 ⓔ Các câu khác đều sai.

10. Cho phương trình $f(x) = 2x^3 + 16x^2 + 12x + 6 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm [-7.3,-7.2]. Trong phương pháp Newton, chọn x_0 theo điều kiện Fourier, sai số của nghiệm gần đúng x_1 tính theo công thức sai số tổng quát là:
ⓐ 0.0013 ⓑ 0.0014 ⓒ 0.0015 ⓓ 0.0016 ⓔ Các câu khác đều sai.

11. Cho $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = LU$ theo phương pháp Doolittle, tổng các phần tử $tr(U) = U_{11} + U_{22} + U_{33}$ của ma trận U là:
ⓐ 8.5972 ⓑ 9.5972 ⓒ 10.5972 ⓓ 11.5972 ⓔ Các câu khác đều sai.

12. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = BB^T$ theo phương pháp Choleski, phần tử B_{32} của ma trận B là:
ⓐ 0.2037 ⓑ 0.2039 ⓒ 0.2041 ⓓ 0.2043 ⓔ Các câu khác đều sai.

13. Cho $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 \\ -6 & \alpha & 7 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Với điều kiện nào của α, ma trận A đối xứng và xác định dương
ⓐ $\alpha > 32.999$ ⓑ $\alpha > 33.000$ ⓒ $\alpha > 33.001$ ⓓ $\alpha > 33.002$ ⓔ Các câu khác đều sai.

14. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix}$. Số điều kiện tính theo chuẩn vô cùng của ma trận A là:
ⓐ 17.8616 ⓑ 17.8716 ⓒ 17.8816 ⓓ 17.8916 ⓔ Các câu khác đều sai.

15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 10x_1 - 6x_2 = 2 \\ -2x_1 + 9x_2 = 2 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.2, 0.2]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Jacobi, sử dụng công thức hậu nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.0598 ⓑ 0.0600 ⓒ 0.0602 ⓓ 0.0604 ⓔ Các câu khác đều sai.

16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 14x_1 + 6x_2 = 7 \\ 4x_1 + 14x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.2, 0.9]^T$, sử dụng phương pháp Jacobi, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_\infty < 0.0100$.
ⓐ 4 ⓑ 5 ⓒ 6 ⓓ 7 ⓔ Các câu khác đều sai.

17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 = 5 \\ -6x_1 + 13x_2 = 7 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.6, 0.7]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Jacobi là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.252 \\ 0.639 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.637 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.256 \\ 0.635 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.258 \\ 0.633 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 = 2 \\ -4x_1 + 15x_2 = 7 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.6, 0.6]^T$, sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ $x^{(2)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel, sử dụng công thức tiên nghiệm và chuẩn vô cùng là:
ⓐ 0.0521 ⓑ 0.0523 ⓒ 0.0525 ⓓ 0.0527 ⓔ Các câu khác đều sai.

19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 = 5 \\ -4x_1 + 15x_2 = 5 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.8, 0.5]^T$, sử dụng phương pháp Gauss-Seidel, tính chỉ số n nhỏ nhất để $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_1 < 0.0060$.
ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ 2 ⓓ 3 ⓔ Các câu khác đều sai.

20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 11x_1 + 5x_2 = 2 \\ -3x_1 + 11x_2 = 4 \end{cases}$. Với $x^{(0)} = [0.9, 0.2]^T$, vectơ $x^{(3)}$ tính theo phương pháp Gauss-Seidel là:
ⓐ $\begin{pmatrix} 0.012 \\ 0.372 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0.014 \\ 0.370 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} 0.016 \\ 0.368 \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} 0.018 \\ 0.366 \end{pmatrix}$ ⓔ Các câu khác đều sai.

CHỦ NHIỆM BỘ MÔN

DAP AN DE 1933:

1a,2c,3c,4b,5a,6b,7a,8a,9a,10d,11a,12a,13a,14b,15a,16d,17a,18a,19a,20b

DAP AN DE 9346:

1b,2b,3c,4b,5a,6a,7b,8a,9a,10c,11b,12d,13b,14c,15b,16c,17c,18b,19a,20c

DAP AN DE 1363:

1b,2b,3c,4c,5a,6c,7a,8b,9c,10b,11a,12a,13b,14b,15a,16b,17c,18b,19b,20a

DAP AN DE 3482:

1c,2c,3b,4b,5a,6b,7b,8c,9c,10c,11b,12c,13b,14a,15d,16d,17b,18b,19b,20a

DAP AN DE 2664:

1d,2a,3d,4b,5b,6a,7a,8a,9c,10c,11c,12a,13c,14d,15c,16a,17b,18c,19c,20a

DAP AN DE 8385:

1b,2b,3d,4d,5a,6c,7d,8b,9d,10d,11b,12c,13b,14a,15b,16c,17b,18a,19d,20c