TÀI LIỆU THAM KHẢO
TOÁN CAO CẤP A3 - GIẢI TÍCH 2

GIẢNG VIÊN: TS. NGUYỄN ĐỨC TRUNG

NĂM HỌC: 2017 -2018

TRANG CHỦ:
http://www.moon.vn/DaiHoc/TCC/

LỜI NÓI ĐẦU

CHƯƠNG TRÌNH GIẢNG DẠY TOÁN CAO CẤP TRÊN MOON.VN NĂM HỌC 2017 - 2018

Chúc mừng các bạn đã bước vào một ngưỡng cửa mới của cuộc đời. Việc đỗ Đại học mở ra cho các em một trang mới với đầy cơ hội nhưng không kém thách thức. Thách thức không chỉ ở việc học xa nhà hoặc ở môi trường mà cơ hội tiếp xúc để hỏi đáp với Giảng viên rất hạn chế trên những giảng đường lớn hàng trăm Sinh viên mà ở khối lượng kiến thức đồ xộ.

Tại bậc học Đại học, một môn học được chia ra làm các phân môn (hay còn gọi là học phần). Các học phần có tính độc lập tương đối về nội dung kiến thức nên được tổ chức học và đánh giá kết quả học tập độc lập hoàn.

Bài tập hoàn toàn được tập trung dồn vào cuối chương hoặc chuyên đề chứ không theo bài (các buổi học). Các bài tập cũng được giải theo tính chủ động học tập của Sinh viên. Rất nhiều bạn Sinh viên ngỡ ngàng với việc học ở bậc Đại học nên kết quả học tập các môn học Đại cương thường thấp hơn những môn học chuyên ngành ở năm thứ 3, thứ 4 (hoặc thứ 5).

Tuy nhiên, chương trình giảng dạy Toán Cao Cấp tại Moon.vn vẫn thiết kế bài tập tại cuối các bài học lý thuyết (qua Video theo truyền thống ở Moon.vn) và cuối các chương (Phần luyện tập chuyên đề). Cũng nhằm để làm quen với cách học ở Đại học, một số video bài tập được đưa ra với mục đích hướng dẫn các em cách làm bài tập và trình bầy ở bậc Đại học.

Thầy thiết kế chương trình với lịch phát sóng sớm để các em có cơ hội tiếp cận sớm với kiến và kỹ năng làm bài tập tốt. Hy vọng với sự chuẩn bị sớm và tốt, các em sẽ thành đạt bởi theo kinh nghiệm: 95% thành công do việc chuẩn bị.

Để các bạn Sinh viên tiện theo dõi chương trình học, Thầy thiết kế chương trình đào tạo được đánh mã số chi tiết theo các phân đoạn đơn vị kiến thức tuần tự để các em dễ dàng theo dõi. Các em có thể vào đường link sau để biết rõ về toàn bộ chương trình: http://www.moon.vn/DaiHoc/TCC/

Tại bậc Phổ thông, các em học một chương trình Toán duy nhất còn đối với Toán Cao Cấp thì sự khác biệt rất lớn được thể hiện ở từng Trường, thâm chí từng khối ngành học trong Trường.

- Đối với các khối ngành Kỹ thuật, Khoa học (Sư phạm, KHTN), Công nghệ, chương trình Toán Cao Cấp được học là Toán A gồm có 4 học phần riêng biệt với đường link chính cho Toán A (http://www.moon.vn/KhoaHoc/NoiDungKhoaHoc/1010/7):
    - Toán A1: Đại số tuyến tính
    - Toán A2: Giải tích 1
    - Toán A3: Giải tích 2
    - Toán A4: Giải tích 3
- Đối với các khối ngành Nông – Lâm – Y – Dược, chương trình Toán Cao Cấp được học là Toán B gồm có 2 học phần riêng biệt với đường link chính cho Toán B (http://www.moon.vn/KhoaHoc/NoiDungKhoaHoc/1011/7):
    - Toán B1: Đại số tuyến tính
    - Toán B2: Giải tích
- Đối với các khối ngành Kinh tế, Thương mại, Tài chính, Ngân hàng, Luật hoặc Quản trị kinh doan ... chương trình Toán Cao Cấp được học là Toán C gồm có 2 học phần riêng biệt với đường link chính cho Toán C (http://www.moon.vn/KhoaHoc/NoiDungKhoaHoc/1012/7):
    - Toán C1: Đại số tuyến tính
    - Toán C2: Giải tích

Tại Moon.vn, kiến thức lý thuyết đã được bố trí với các nội dung chi tiết cho từng khối ngành thông qua hệ thống video bài giảng cùng giáo trình đầy đủ cũng như các tóm tắt lý thuyết vận dụng để nhanh chóng có thể giải bài tập cho cả Toán A, Toán B và Toán C. Đi kèm lý thuyết cơ bản là một kho dữ liệu khổng bài tập được tổng hợp từ các Đề thi giữa và cuối Học kỳ các năm gần đây của các khối ngành:

- Toán A1, A2, A3 và A4: hơn 3500 bài tập
- Toán B1 và B2: gần 2000 bài tập
- Toán C1 và C2: gần 2000 bài tập

Các bài tập trọng yếu được quay Video đi kèm lời giải giúp các em ôn tập dễ dàng, tiếp cận phương pháp giải nhanh chóng và chính xác.

Thầy và đội ngũ các Supper Mods (cũng đều là các Giảng viên dạy Đại học) rất vui được trao đổi trên diễn đàn Toán cao cấp tại Moon.VN trên Facebook với đường link sau: https://www.facebook.com/groups/TCC.moon/

Các em cũng có thể thắc trực tiếp với thầy tại trang Facebook cá nhân với đường link sau: https://www.facebook.com/Thay.Trung.Toan

Chúc các em nhanh chóng thu lượm được những kiến thức, hoàn thiện kỹ năng và vận dụng sáng tạo !

MỤC LỤC

Chương 1: Hàm số nhiều biến

§1. Tổng quan hàm số nhiều biến

1.1. Định nghĩa hàm nhiều biến

1.1.1. Định nghĩa :

Cho $D \subset R^2$, ánh xạ f : $D \to R$ được gọi là hàm số hai biến số.

Kí hiệu là :

$$f : D \to R$$

$$(x, y) \to Z = f(x, y)$$

- D là miền xác định của f ; x,y là hai biến số độc lập.
- $f(D) = \{z = f(x, y) / (x, y) \in D\}$ gọi là miền giá trị của hàm f

Hàm số n biến $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ được định nghĩa tương tự.

Miền xác định :

Cho hàm số $Z = f(x, y)$, miền xác định của hàm f là tập hợp các cặp (x, y) sao cho $f(x, y)$ có nghĩa. Ký hiệu là D.

- D được gọi là liên thông trong R^2 nếu với M_1, M_2 bất kỳ thuộc D luôn có thể nối với nhau bởi đường cong liên tục nằm hoàn toàn trong D
- D được gọi là mở nếu những điểm biên L của D không thuộc D
- D được gọi là đóng nếu mọi điểm biên L của D đều thuộc D
- D được gọi là đơn liên nếu nó bị giới hạn bởi nhiều đường cong kín rời nhau từng đôi một.

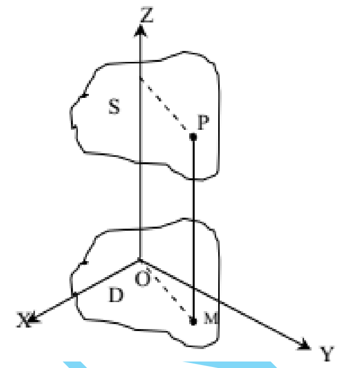
1.1.2. Biểu diễn hình học của hàm hai biến số.

Giả sử $Z = f(x, y)$ xác định trong miền D của mặt phẳng xOy

MP // OZ và $\overline{MP} = f(x,y) = Z$

Khi M biến thiên trong D thì P biến thiên trong R^3 và sinh ra mặt S, S gọi là đồ thị của hàm $Z = f(x,y)$ và $Z = f(x,y)$ còn gọi là phương trình của mặt S.

Mỗi đường thẳng song song với trục OZ cắt mặt S không quá một điểm.



1.2 Giới hạn của hàm số hai biến số

Định nghĩa :

Cho hàm số $f(M) = f(x,y)$, xác định trong miền D chứa điểm $M_0(x_0,y_0)$, có thể trừ điểm M_0 . Ta nói rằng L là giới hạn của $f(x,y)$ khi điểm $M(x,y)$ dần tới điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu với mọi dãy $M_n(x_n,y_n)$ thuộc D dần tới M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = L$$

Kí hiệu : $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

hay : $$\lim_{M\to M_0} f(M) = L$$

1.3. Tính liên tục của hàm số hai biến số :

1.3.1. Khái niệm:

Cho hàm số $f(M) = f(x,y)$, xác định trong miền D, $M_0(x_0,y_0)$ là một điểm thuộc D. Ta nói hàm số $f(x,y)$ liên tục tại M_0 nếu tồn tại :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

và $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Hàm số $f(x,y)$ gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

1.3.2. Chú ý:

Đặt $x = x_0 + \Delta_x$; $y = y_0 + \Delta_y$ ta có :

$$f(x,y) = f(x_0 + \Delta_x; y_0 + \Delta_y) \text{ và } \Delta f = f(x_0 + \Delta_x; y_0 + \Delta_y) - f(x_0, y_0)$$

Có thể phát biểu: Hàm số $f(x,y)$ liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu :

$$\lim_{(\Delta_x, \Delta_y) \to (0,0)} \Delta f = 0$$

Ví dụ 1.1: Tìm giới hạn (nếu có) của hàm số sau

a. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} (x \to 0, y \to 0)$

b. $f(x,y) = \sin \dfrac{\pi x}{2x + y} (x \to \infty, y \to \infty)$

Lời giải:

a. Nếu cho $(x,y) \to (0,0$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thì ta có

$$f(x,kx) = \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \to \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \text{ khi } x \to 0$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0$ theo những phương khác nhau thì $f(x,y)$ dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$.

b. Nếu cho $(x,y) \to (0,0$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thì ta có

$$f(x,kx) = \sin \frac{\pi x}{2x + kx} = \sin \frac{\pi}{2 + k} \to \sin \frac{\pi}{2 + k} \text{ khi } x \to 0$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0$ theo những phương khác nhau thì $f(x,y)$ dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$.

§2. Đạo hàm riêng.

2.1. Đạo hàm riêng:

2.1.1. Định nghĩa:

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D, điểm $M_0(x_0,y_0) \in D$. Nếu cho $y = y_0$, với y_0 là hằng số, mà hàm số một biến số $x \to f(x,y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng đối với x của hàm số $f(x,y)$ tại (x_0,y_0) .

Ký hiệu : $f'_x(x_0,y_0)$ hay $\dfrac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)$ hay $\dfrac{\delta z}{\delta x}(x_0,y_0)$

Nghĩa là : $f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

Tương tự : Đạo hàm riêng đối với y của hàm số $f(x,y)$ tại (x_0,y_0), kí hiệu:

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Chú ý :

- Đạo hàm riêng của hàm số n biến độc lập (n > 2) định nghĩa tương tự.
- Khi tính đạo hàm riêng của một biến nào đó xem biến còn lại như một hằng số.

2.1.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng:

Gọi S là đồ thị của hàm số $z = f(x,y)$.

C_1 là giao tuyến của S với mặt phẳng $y = y_0$.

T_1 là tiếp tuyến của giao tuyến C_1 của mặt phẳng S với mặt phẳng $y = y_0$ tại điểm $P(x_0,y_0,z_0)$.

(C_1 là đồ thị của hàm 1 biến số $y = f(x, y_0)$ trên mặt phẳng $y = y_0$)

T_2 là tiếp tuyến của giao tuyến C_2 của mặt phẳng S với mặt phẳng $x = x_0$

- $f'_x(x_0, y_0)$ = Hệ số góc của tiếp tuyến T_1 của C_1 tại $P(x_0, y_0, z_0)$ với $z_0 = f(x_0, y_0)$.
- $f'_y(x_0, y_0)$ = Hệ số góc của tiếp tuyến T_2 của C_2 tại $P(x_0, y_0, z_0)$ với $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2.2. Đạo hàm riêng cấp cao:

2.2.1 Định nghĩa :

Cho hàm số $z = f(x, y)$. Các đạo hàm f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp một gọi là các đạo hàm riêng cấp hai. Các đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp hai gọi là đạo hàm riêng cấp ba,....

Ký hiệu đạo hàm riêng cấp hai như sau :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y)$$

2.2.2 Định lý :

Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

Ví dụ 2.1: Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

b) $z = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$

c) $z = x^{y^3}$

d) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

e) $u = x^{y^z}, (x, y, z > 0)$

f) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}, (x, y, z > 0)$

Lời giải:

a.

$$z'_x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; z'_y = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

b.

$$z'_x = y\cos\frac{x}{y}; z'_y = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}.$$

c.

$$z'_x = y^3 x^{y^3-1}; z'_y = 3y^2 \ln x . x^{y^3}$$

d.

$$z'_x = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$$

$$z'_y = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$$

e.

$$u'_x = y^z x^{y^z-1}; u'_y = x^{y^z} z y^{z-1}. \ln x; u'_z = x^{y^z} y^z \ln y \ln x$$

f.

$$u'_x = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}.\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}; u'_y = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}; u'_z = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Ví dụ 2.2: Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của đạo hàm riêng của các hàm số $f(x,y)$ sau :

a.

$$f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

b.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Lời giải:

a. Ta dễ thấy hàm số liên tục với mọi $(x,y) \neq (0,y)$.

Xét $x=0$, vì $\left|x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| \leq \frac{\pi}{2}|x|$ nên $\lim\limits_{x\to 0} x.\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 = f(0,y)$.

Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Với $x \neq 0$ các đạo hàm riêng tồn tại và liên tục:

$$z'_x = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2x^2y^2}{x^4+y^4}, z'_y = \frac{2x^3y}{x^4+y^4}$$

Xét tại $x=0$,

$$\begin{cases} f'_x(0,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{y}\right)^2 = \left[\begin{array}{l} 0, y=0 \\ \frac{\pi}{2}, y \neq 0 \end{array}\right. \\ f'_y(0,y) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,y+k)-f(0,y)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0 \end{cases}$$

Vậy ta thấy $f'_x(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$; $f'_y(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, còn tại $(0,0)$ thì

$$0 \le \left|\frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\left(\frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x}\right|$$

nên

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}\right| = 0$$

Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 2.3:

Giả sử $z = yf\left(x^2-y^2\right)$, ở đó f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thoả mãn

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$$

Lời giải:

Ta có

$$z'_x = yf\left(x^2-y^2\right).2x, z'_y = f\left(x^2-y^2\right) + y.f\left(x^2-y^2\right).(-2y)$$

nên

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{f\left(x^2-y^2\right)}{y} = \frac{z}{y^2}$$

Ví dụ 2.4:

Tìm đạo hàm của hàm số hợp sau đây

a. $z = e^{u^2-2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2+y^2}.$

b. $z = \ln\left(u^2 + v^2\right), u = xy, v = \frac{x}{y}$.

c. $z = \arcsin\left(x - y\right), x = 3t, y = 4t^3$.

Lời giải:

a. Ta có

$$\begin{cases} u'_x = -\sin x \\ u'_y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} v'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ v'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} z'_x = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2+y^2\right)}\left[-\sin 2x - 4x\right] \\ z'_y = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2+y^2\right)}\left[-4y\right]. \end{cases}$$

b. Ta có

$$\begin{cases} u'_x = y \\ u'_y = x \end{cases} ; \begin{cases} v'_x = \frac{1}{y} \\ v'_y = \frac{-x}{y^2} \end{cases}$$

nên

$$z'_x = \frac{2}{x}, z'_y = \frac{2\left(y^4 - 1\right)}{y\left(y^4 + 1\right)}$$

c. Ta có

$$\begin{cases} x'_t = 3 \\ y'_t = 12t^2 \end{cases}$$

nên

$$z'_t = \frac{1}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}\left(3 - 12t^2\right)$$

§3: Vi phân toàn phần và vi phân cấp hai

3.1 Định nghĩa :

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền $D \subset R^2$, $M_0(x_0,y_0)$ và $M(x_0+\Delta_x; y_0+\Delta_y)$ là hai điểm thuộc D.

Nếu số gia $\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta_x; y_0+\Delta_y) - f(x_0,y_0)$ có thể biểu diễn dưới dạng $\Delta f(x_0,y_0) = A\Delta_x + B\Delta y + \alpha\Delta_x + \beta\Delta_y$ thì ta nói hàm số $f(x,y)$ khả vi tại $M_0(x_0,y_0)$, biểu thức $A\Delta_x + B\Delta_y$ gọi là vi phân toàn phần của hàm số $f(x,y)$ tại (x_0,y_0) ứng với các số gia Δ_x, Δ_y và được ký hiệu là $df(x_0,y_0)$ hay dz.

Hàm số $f(x,y)$ gọi là khả vi trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

Chú ý :

- Nếu $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0) thì tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$.
- Khác với hàm số một biến , nếu hàm số hai biến $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ thì chưa chắc nó đã khả vi tại (x_0,y_0).

3.2. Điều kiện khả vi của hàm số nhiều biến :

Định lý :

Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng trong một miền D, chứa điểm $M_0(x_0,y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì hàm số $f(x,y)$ khả vi tại M_0, vi phân toàn phần của $f(x,y)$ tại M_0 được tính theo công thức :

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta_x + f'_y(x_0,y_0)\Delta_y$$

Chú ý : Ta có $\Delta_x = dx; \Delta_y = dy$ do đó :

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$$

3.3. Ứng dụng của vi phân toàn phần vào tính gần đúng:

Khi Δ_x, Δ_y khá nhỏ, ta có thể xem $\Delta f\left(x_0, y_0\right)$ xấp xỉ bằng $df\left(x_0, y_0\right)$ tức là:

$$\Delta f\left(x_0, y_0\right) = f'_x\left(x_0, y_0\right)\Delta_x + f'_y\left(x_0, y_0\right)\Delta_y \quad \text{hay}$$

$$f\left(x_0 + \Delta_x; y_0 + \Delta_y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + f'_x\left(x_0, y_0\right)\Delta_x + f'_y\left(x_0, y_0\right)\Delta_y \ .$$

3.4. Điều kiện để biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là một vi phân toàn phần:

Định lý:

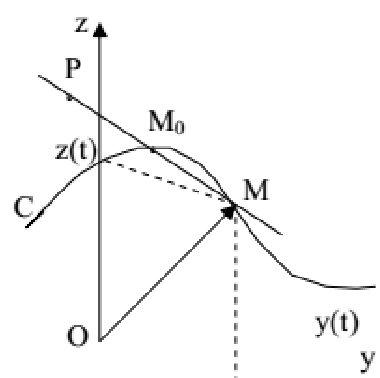
Giả sử các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền D nào đó. Biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là một vi phân toàn phần khi và chỉ khi :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \forall (x,y) \in D$$

3.5. Phương trình của tiếp tuyến, pháp diện của đường cong tại một điểm.

3.5.1. Đường cong trong không gian.

Cho $I \subset R, t \in I$, Ánh xạ cho tương ứng mỗi số thực t với một vecto trong R^3 duy nhất $\overline{r}(t)$ gọi là một hàm vecto. Nếu $x(t), y(t), z(t)$ là ba thành phần của vecto $\overline{r}(t)$ thì ta viết :



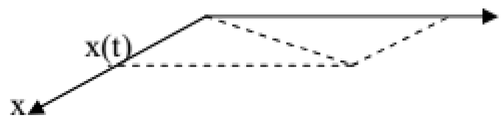
$$\overline{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$$

hay $\quad \overline{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Đặt $\overline{OM} = \overline{r}(t)$, điểm M có tọa độ là $x(t), y(t), z(t)$.Giả sử các hàm số $x(t), y(t), z(t)$ liên tục trên I.

Khi t biến thiên trong I điểm M vạch nên một đường cong C liên tục trong R^3. Ta nói rằng $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ là các phương trình tham số của đường cong C.

$\overline{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ là phương trình vecto của đường cong C.



3.5.2. Phương trình của tiếp tuyến.

Giả sử các điểm

$$M_0\left(x(t_0),y(t_0),z(t_0)\right) \text{ và } M\left(x(t_0+h),y(t_0+h),z(t_0+h)\right)$$

thuộc đường cong C. Các hàm số $x(t),y(t),z(t)$ khả vi tại t_0 thì $\overline{r}'(t_0)=\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)$. Vị trí giới hạn của cát tuyến M_0M khi M dần tới M_0 trên đường cong C nếu tồn tại là tiếp tuyến của C tại M_0. Điểm $P(x,y,z)$ thuộc tiếp tuyến C tại M_0 khi và chỉ khi $\overline{M_0P}$ cùng phương với $\overline{r}'(t_0)$, nghĩa là phương trình tiếp tuyến của đường cong C tại M_0 là :

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

3.5.3. Pháp diện của đường cong :

Mặt phẳng đi qua M_0 vuông góc với tiếp tuyến của đường cong C tại M_0 gọi là pháp diện của đường cong C tại M_0. Điểm $P(x,y,z)$ nằm trên pháp diện của đường cong C tại M_0 khi và chỉ khi $\overline{M_0P}\perp\overline{r}'(t_0)$ hay $\overline{M_0P}.\overline{r}'(t_0)=0$, nghĩa là phương trình pháp diện của đường cong C tại M_0 là :

$$\left[x-x(t_0)\right]x'(t_0)+\left[y-y(t_0)\right]y'(t_0)+\left[z-z(t_0)\right]z'(t_0)=0$$

Ví dụ 3.1:

Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a. $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$.

b. $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$

c. $z = arctg\dfrac{x+y}{x-y}$

d. $u = x^{y^2 z}$.

Lời giải:

a.

$$dz = \cos\left(x^2 + y^2\right)(2xdx + 2ydy)$$

b.

$$dz = \frac{2}{\sin\frac{2y}{x}}.\left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right).$$

c.

$$dz = \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x-y)^2 + (x+y)^2}.$$

d.

$$du = x^{y^2 z}\left(\frac{y^2 z}{x}dx + 2yz\ln x dy + y^2 \ln x dz\right).$$

Ví dụ 3.2:

Tính gần đúng

a. $A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$

b. $B = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$

Lời giải:

a. Xét hàm $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}, \Delta x = 0,02; \Delta y = 0,05; x = 1; y = 0$. Ta có

$$f'_x = \frac{1}{3(x^2+y^2)^{2/3}}2x; f'_y = \frac{1}{3(x^2+y^2)^{2/3}}2y$$

Khi đó

$$f(1+\Delta x, 0+\Delta y) \approx f(1,0) + f'_x(1,0)\Delta x + f'_y(1,0)\Delta y$$

$$= 1 + \frac{2}{3}.0,02 + 0.0,05 = 1,013.$$

b. Xét hàm

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right); x = 1; y = 1; \Delta x = 0,03; \Delta y = 0,02$$

Ta có

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}; f'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{3y^{\frac{3}{4}}}$$

Khi đó

$$f(1+\Delta x, 1+\Delta y) \approx f(1,1) + f'_x(1,1)\Delta x + f'_y(1,1)\Delta y$$

$$= 0 + \frac{1}{3}.0,03 + \frac{1}{4}(-0,02) = 0,005.$$

§4. Đạo hàm của hàm số hợp. Đạo hàm của hàm số ẩn.

4.1. Đạo hàm của hàm số hợp

4.1.1. Định nghĩa:

Cho hàm số $z = f(u,v)$, trong đó $u = u(x), v = v(x)$ là những hàm số của x. Ta nói rằng $z = f(u(x), v(x))$ là hàm số hợp của x.

Định lý :

Nếu $z = f(u,v)$ là hàm số khả vi của u, v và $u = u(x), v = v(x)$ là những hàm số khả vi của x thì z là hàm số khả vi của x và ta có :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} \qquad (1)$$

4.1.2. Định nghĩa 2:

Cho $z = f(u,v)$, trong đó $u = u(x,y), v = v(x,y)$ là những hàm số của hai biến số độc lập x,y. Khi đó $z = f(u(x,y), v(x,y))$ là hàm số hợp của x,y.

Định lý :

Nếu hàm số $z = f(u,v)$ là hàm số khả vi của u,v và các hàm số $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ có các đạo hàm riêng u'_x, u'_y, v'_x, v'_y thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ và ta có :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

4.2. Đạo hàm của hàm số ẩn.

4.2.1. Định nghĩa hàm ẩn:

Giả sử hai biến số x,y rằng buộc với nhau bởi phương trình $F(x,y)=0$. Ta nói $y=f(x)$ là một hàm số xác định trong một khoảng nào đó sao cho khi thế $y=f(x)$ vào phương trình $F(x,y)=0$ ta được một đồng nhất thức.

4.2.2. Đạo hàm của hàm ẩn

Nếu $F(x,y)$ khả vi trừ một số điểm, hàm số $y=f(x)$ khả vi thì :

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)y'=0$$

hay $\quad y'=y'=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ nếu $F'_y(x,y)\neq 0$

<u>Ví dụ 4.1</u>:

Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a. $x^3y-y^3x=a^4$; tính y'

b. $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a}=\dfrac{y}{a}$; tính y'

c. $x+y+z=e^z$; tính z'_x,z'_y

d. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, tính z'_x,z'_y

<u>Lời giải:</u>

a. Xét hàm số ẩn $F(x,y)=x^3y-y^3x-a^4=0$, có $F'_x=3x^2y-y^3; F'_y=x^3-3y^2x$.

Vậy

$$y'=\frac{-F'_x}{F'_y}=-\frac{3x^2y-y^3}{x^3-3y^2x}$$

b. Xét hàm số ẩn

$$F(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a}-\frac{y}{a} \text{ có } \begin{cases} F'_x=\dfrac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2}=\dfrac{a}{a^2+(x+y)^2} \\ F'_y=\dfrac{a}{a^2+(x+y)^2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-a^2-(x+y)^2}{a\left(a^2+(x+y)^2\right)} \end{cases}$$

nên

$$y' = \frac{a}{(x+y)^2}.$$

c. Xét hàm số ẩn

$$F(x,y,z) = x + y + z - e^z \text{ có } F'_x = 1; F'_y = 1; F'_z = 1 - e^z$$

nên

$$z'_x = \frac{-1}{1-e^z}; z'_y = \frac{-1}{1-e^z}$$

d. Xét hàm số ẩn

$$F(x,y) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \text{ có } F'_x = 3x^2 - 3yz;$$

$$F'_y = 3y^2 - 3xz; F'_z = 3z^2 - 3xy$$

nên

$$z'_x = \frac{3yz - 3x^2}{3z^2 - 3xy}; z'_x = \frac{3xz - 3y^2}{3z^2 - 3xy}$$

__Ví dụ 4.2__:

Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $z.e^z = x.e^x + y.e^y$

__Lời giải:__

Xét hàm số

$$F(x,y,z) = ze^z - xe^x - ye^y = 0 \text{ có } \begin{cases} F'_x = -(e^x + xe^x) \\ F'_y = -(e^y + ye^y) \\ F'_z = e^z + ze^z \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{(1+z'_x).(y+z)-(x+z)(z'_x)}{(y+z)^2} = \dfrac{\left(1+\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}\right)-(x+z)\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}}{(y+z)^2} \\ u'_y = \dfrac{(x+z).\left(1+z'_y\right)-(y+z)\left(z'_y\right)}{(y+z)^2} = \dfrac{(x+z).\left(1+\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}\right)-(y+z)\left(\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}\right)}{(y+z)^2} \end{cases}$$

Ví dụ 4.3:

Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy đạo hàm hai vế của các phương trình của hệ ta có

$$\begin{cases} 1+y'_x+z'_x &= 0 \\ 2x+2yy'_x+2zz'_x &= 0 \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{z-x}{y-z} \\ z'_x = \dfrac{x-y}{y-z} \end{cases}$$

Ví dụ 4.4:

Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a. $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$

b. $z = x^2 \ln\left(x^2 + y^2\right)$

c. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Lời giải:

a. Ta có $\begin{cases} z'_x = x\sqrt{x^2+y^2} \\ z'_y = y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

nên $\begin{cases} z''_{xx} = \sqrt{x^2+y^2} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z''_{yy} = \sqrt{x^2+y^2} + y\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z''_{xy} = \dfrac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

b. Ta có $\begin{cases} z'_x = 2x\ln(x+y) + \dfrac{x^2}{x+y} \\ z'_y = \dfrac{x^2}{x+y} \end{cases}$

nên $\begin{cases} z''_{xx} = 2\ln(x+y) + \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{2x(x+y) - x^2}{(x+y)^2} \\ z''_{xy} = \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{-x^2}{(x+y)^2} \\ z''_{yy} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$

c. Ta có $\begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\dfrac{-y}{x^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ z'_y = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$

nên $\begin{cases} z''_{xx} = \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ z''_{xy} = \dfrac{-\left(x^2+y^2\right)+y.2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ z''_{yy} = \dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{cases}$

<u>Ví dụ 4.5</u>:

Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau

a. $z = xy^2 - x^2y$

b. $z = \dfrac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$

<u>Lời giải:</u>

a. Ta có $dz = \left(y^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy - x^2\right)dy$ nên

$$d^2z = -2y\,(dx)^2 + 4\,(y-x)\,dxdy + (2y)\,(dy)^2$$

b. Ta có $dz = \frac{x}{2\left(x^2+y^2\right)^2}dx + \frac{y}{2\left(x^2+y^2\right)^2}dy$ nên

$$d^2z = \frac{y^2-3x^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}(dx)^2 - \frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^3}dxdy + \frac{x^2-3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}(dy)^2$$

§5. Cực trị

5.1. Cực trị tự do của hàm số hai biến số:

5.1.1. Định nghĩa :

Hàm số $z=f(x,y)$ gọi là đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu mọi điểm $M(x,y)$ khá gần điểm M_0 nhưng khác M_0 hiệu $f(M)-f(M_0)$ có dấu không đổi.

- $F(M)-f(M_0)>0 \Rightarrow M_0$ điểm cực tiểu; $f(M_0)$ giá trị cực tiểu.
- $f(M)$ - $f(M_0)$<0 $\Rightarrow$ M_0 điểm cực đại ; $f(M_0)$ giá trị cực đại.
- Cực đại hay cực tiểu gọi chung là cực trị , Điểm M_0 được gọi là điểm cực trị.

5.1.2. Điều kiện cần của cực trị

Định lý :

Nếu hàm số $z=f(x,y)$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0,y_0)$và tại đó các đạo hàm riêng tồn tại thì $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$

Những điểm mà tại đó các đạo hàm riêng cấp một bằng 0, gọi là điểm dừng.

5.1.3. Điều kiện đủ của cực trị :

Giả sử $M_0(x_0,y_0)$là một điểm dừng của hàm số $f(x,y)$ và hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai ở lân cận điểm M_0. Đặt $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$. Khi đó :

- Nếu $B^2-AC<0$ thì $f(x,y)$ đạt cực trị tại M_0 và đạt cực tiểu nếu $A>0$., cực đại nếu $A<0$
- Nếu $B^2-AC>0$ thì $f(x,y)$ không đạt cực trị tại M_0

- Nếu $B^2 - AC = 0$. thì chưa kết luận được $f(x,y)$ đặt cực trị jay không đạt cực trị tại M_0 .

5.2. Cực trị có điều kiện:

5.2.1. Khái niệm:

Cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ trong đó các biến số x và y bị ràng buộc bởi hệ thức $g(x,y) = 0$ là cực trị có điều kiện.

5.2.2. Định lý:

Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị có điều kiện $g(x,y) = 0$. Nếu ở lân cận M_0 hàm số $f(x,y), g(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và các đạo hàm riêng g'_x, g'_y không đồng thời bằng 0 tại M_0, khi đó ta có tại M_0:

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_x \end{vmatrix} = 0$$

Chú ý:

Nếu các điều kiện của định lý thỏa mãn thì tồn tại một số λ sao cho tại điểm M_0 ta có :

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này cùng với phương trình $g(x,y) = 0$ giúp tìm λ, x_0, y_0 . Số λ được gọi là nhân tử Lagrange. Phương pháp tìm λ, x_0, y_0 đươc gọi là phương pháp nhân tử Lagrange.

5.3. Giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm hai biến số trong một miền đóng giới nội.

Muốn tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $f(x,y)$ trong một miền đóng giới nội D ta thực hiện các bước sau:

- Tính các giá trị của f tại các điểm dừng thuộc miền D
- Tính các giá trị của f tại các điểm biên của D
- Số lớn nhất trong các giá trị đã tính ở trên là giá trị lớn nhất, số bé nhất trong các giá trị đã tính ở trên là giá trị bé nhất cần tìm.

Ví dụ 5.1:

Tìm cực trị có điều kiện của hàm số

$$z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \text{ với điều kiện } \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$$

Lời giải:

Xét hàm số Lagrange $\phi(x,y,\lambda)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2})$.

Từ hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2\lambda}{x^3}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3}\\ \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}=0\end{cases}$$

ta thu được các điểm tới hạn là $M_1(a\sqrt{2},a\sqrt{2})$ ứng với $\lambda_1=-\frac{a}{\sqrt{2}}$,

$M_2(-a\sqrt{2},-a\sqrt{2})$ ứng với $\lambda_2=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Ta có

$$d^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dy^2=\left(\frac{2}{x^3}+\frac{6\lambda}{x^4}\right)dx^2+\left(\frac{2}{y^3}+\frac{6\lambda}{y^4}\right)dy^2$$

Từ điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0$ suy ra $-\frac{2}{x^3}dx - \frac{2}{y^3}dy = 0$

nên $dy = -\frac{y^3}{x^3}dx$, thay vào biểu thức $d^2\phi$ ta có

- Tại M_1, $d^2\phi(M_1) = -\frac{\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2 + dy^2) = -\frac{2\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2) < 0$ nên M_1 là điểm cực đại có điều kiện.
- Tại M_2, $d^2\phi(M_2) = \frac{\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2 + dy^2) = \frac{2\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2) > 0$ nên M_2 là điểm cực tiểu có điều kiện.

Chương 2: Tích phân bội

§1. Tích phân kép:

1.1. Phép đổi biến số trong tích phân kép

1.1.1. Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền D là giao của hai họ đường cong. Xét tích phân kép: $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó $f(x,y)$ liên tục trên D. Thực hiện phép đổi biến số $x = x(u,v), y = y(u,v)$ (1) thỏa mãn:

- $x = x(u,v), y = y(u,v)$ là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng D_{uv} của mặt phẳng O'_{uv} .
- Các công thức (1) xác định song ánh từ $D_{uv} \to D$.
- Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$

Khi đó ta có công thức:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)|J|\text{dud}v$$

Chú ý

- Mục đích của phép đổi biến số là đưa việc tính tích phân từ miền D có hình dáng phức tạp về tích phân trên miền D_{uv} đơn giản hơn như là hình thang cong hoặc hình chữ nhật. Trong nhiều trường hợp, phép đổi biến số còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tích phân $f(x,y)$.

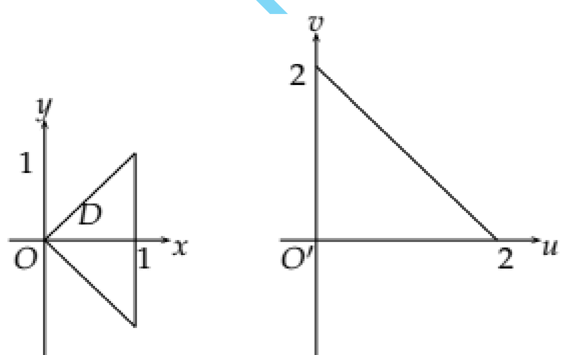
- Một điều hết sức chú ý trong việc xác định miền D_{uv} đó là phép đổi biến số tổng quát sẽ biến biên của miền D thành biến của miền D_{uv}, biến miền D bị chặn thành miền D_{uv} bị chặn.
- Có thể tính J thông qua :

$$J^{-1}=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$$

<u>Ví dụ 2.01.1</u>. Chuyển tích phân sau sang hai biến u,v :

a) $\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} f(x,y)dxdy$, nếu đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$

b) Áp dụng tính với $f(x,y)=(2-x-y)^2$



Lời giải:

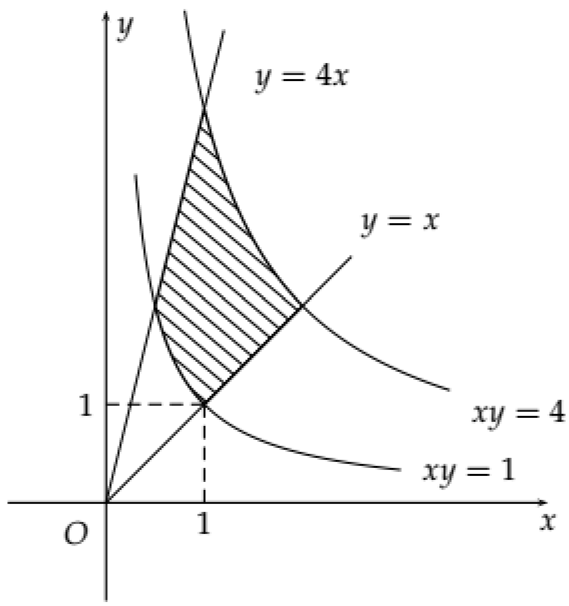
$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases} \quad ;|J|=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2$$

hơn nữa

$$D\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ -x\le y\le x \end{cases} \leftrightarrow D_{uv}\begin{cases} 0\le u\le 2 \\ 0\le v\le 2-u \end{cases}$$

nên $$I = \frac{1}{2}\int_0^2 du \int_0^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$$

<u>Ví dụ 2.01.2</u>. Tính $I = \iint_D \left(4x^2 - 2y^2\right) dxdy$, trong đó $D: \begin{cases} 1 \le xy \le 4 \\ x \le y \le 4x \end{cases}$



Lời giải:

Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}; D_{uv}: \begin{cases} 1 \le u \le 4 \\ 1 \le v \le 4 \end{cases}, J^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\dfrac{u}{v}}} = 2v$$

Khi đó

$$I = \int_1^4 du \int_1^4 \left(4\frac{u}{v} - 2uv\right).\frac{1}{2v} dv = \int_1^4 du \int_1^4 \left(\frac{2u}{v^2} - u\right) dv = \int_1^4 \frac{-3}{2} u du = -\frac{45}{4}$$

1.1.2. Phép đổi biến số trong tọa độ cực

Trong rất nhiều trường hợp, việc tính toán tích phân kép trong tọa độ cực đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính tích phân trong tọa độ Descartes, đặc biệt là khi miền D có dạng hình trong, quạt tròn, cardioids,... và hàm dưới dấu tích phân có biểu thức $\left(x^2+y^2\right)$ .Tọa độ của điểm $M\left(x,y\right)$ là bộ $\left(r,\varphi\right)$, trong đó :

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Công thức đổi biến :

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

trong đó miền biến thiên của r,φ phụ thuộc vào hình dạng của miền D.

Khi đó $J=\dfrac{D\left(x,y\right)}{D\left(r,\varphi\right)}=r$, và $I=\iint\limits_{D_{r\varphi}} f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi\right)rdrd\varphi$

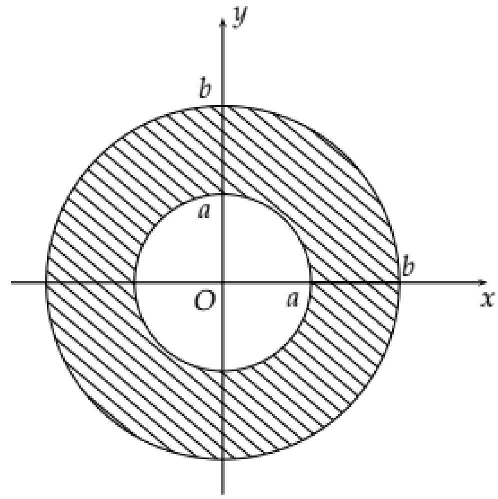
Đặc biệt , nếu

$$D:\begin{cases} \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2 \\ r_1\left(\varphi\right)\le r\le r_2\left(\varphi\right) \end{cases}$$

thì : $$I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi\right)rdr$$

<u>Ví dụ 2.01.3</u>.Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực $I=\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy$,trong đó D là miền xác định như sau:

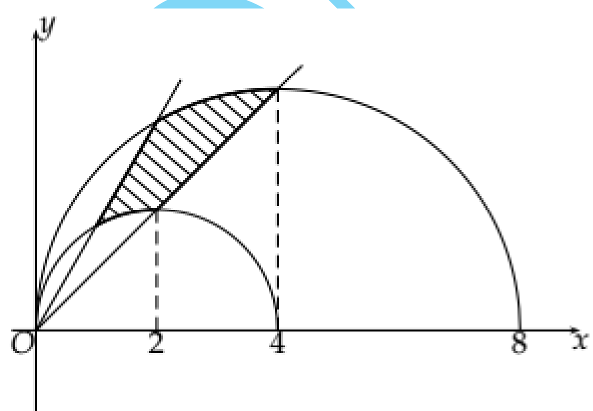
a) $a^2\le x^2+y^2\le b^2$



Lời giải:

$$D:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ a\le r\le b\end{cases}\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^b f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)rdr$$

b) $x^2+y^2\ge 4x, x^2+y^2\le 8x, y\ge x, y\le 2x$



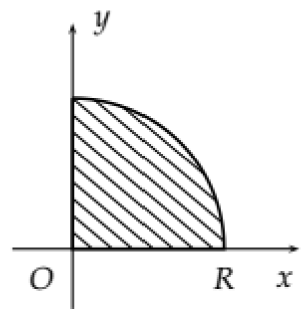
Lời giải:

Ta có :

$$D:\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}\\ 4\cos\varphi\le r\le 8\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)rdr$$

<u>Ví dụ 2.01.4</u>. Dùng phép đổi viến số trong tọa độ cực, hãy tính các tích phân sau:

a) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy \left(R>0\right)$



Lời giải:

Từ biểu thức tính tích phân ta suy ra biểu thức giải tích của miền D là

$$\begin{cases} 0 \le x \le R \\ 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$$

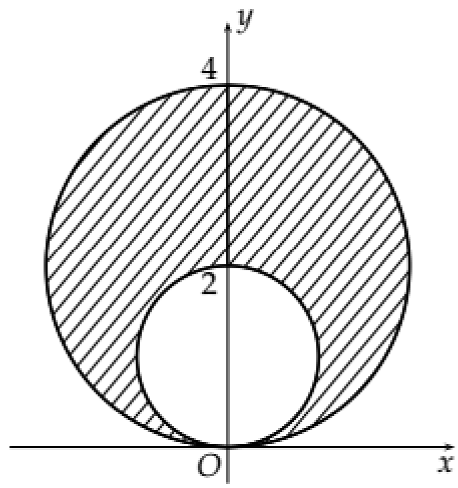
nên ta chuyển sang tọa độ cực, đặt :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{thì} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \ln\left(1+r^2\right) r dr = \frac{\pi}{4}\int_0^R \ln\left(1+r^2\right) d\left(1+r^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\left(R^2+1\right)\ln\left(R^2+1\right) - R^2\right]$$

b) Tính $\iint_D xy^2 dxdy$, D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + \left(y-1\right)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$



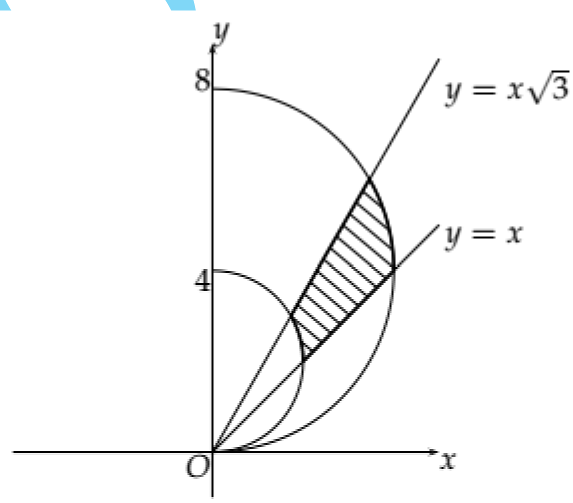
Lời giải:

Đặt : $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 2\sin\varphi \le r \le 4\sin\varphi \end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r\cos\varphi.(r\sin\varphi)^2\, rdr = 0$$

<u>Ví dụ 2.01.5</u>. Tính các tích phân sau :

a) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)}$, trong đó $D: \begin{cases} 4y \le x^2 + y^2 \le 8y \\ x \le y \le x\sqrt{3} \end{cases}$



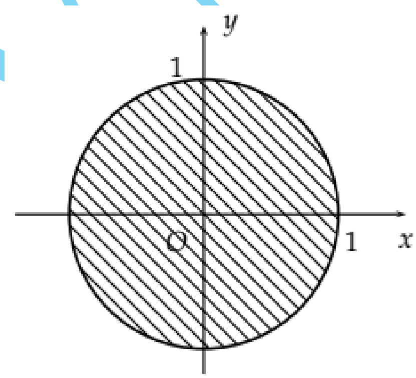
Lời giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ 4\sin\varphi \le r \le 8\sin\varphi \end{cases}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \frac{1}{r^4} r\,dr = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{64\sin^2\varphi} - \frac{1}{16\sin^2\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \frac{3}{128}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

b) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy$, trong đó $D: x^2+y^2 \le 1$



Lời giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

Ta có :

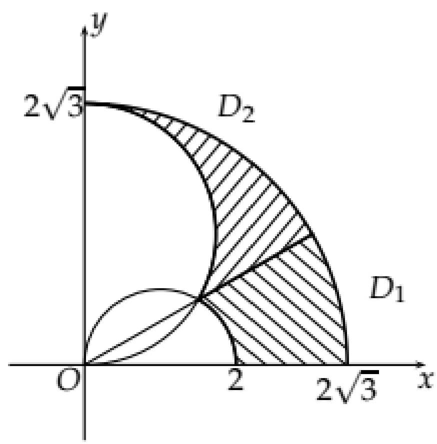
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr \overset{u=r^2}{=} 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{1-u}{1+u}} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$

$$I = \pi \int_0^1 t\left(-\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2} \right) dt = -\pi \int_0^1 \frac{4dt}{1+t^2} + 4\pi \int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$= -4\operatorname{arctg}t \Big|_0^1 + 4\pi \left[\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}t \right]\Bigg|_0^1$$

c) $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$ trong đó $D:\begin{cases} x^2+y^2 \le 12 \\ x^2+y^2 \ge 2x \\ x^2+y^2 \ge 2\sqrt{3}y \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$



Lời giải:

Chia miền D thành hai miền như hình vẽ

$$D = D_1 \cup D_2, D_1 = \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6} \\ 2\cos\varphi \le r \le 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{3}\sin\varphi \le r \le 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $I = I_1 + I_2$ trong đó

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12-4\cos^2\varphi\right)d\varphi = \ldots = \frac{17}{32}$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\sqrt{3}\sin\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} r dr = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12-12\sin^2\varphi\right)d\varphi = ... = \frac{27}{32}$$

nên $I = \frac{11}{8}$

1.1.3. Phép đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng

Phép đổi biến trong tọa độ cực suy rộng được sử dụng khi miền D có hình dạng ellipse hoặc hình tròn có tâm không nằm trên các trục tọa độ.Khi sử dụng phép đổi biến này, bắt buộc phải tính lại các Jacobian của phép đổi biến.

1. Nếu $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}, J = abr$$

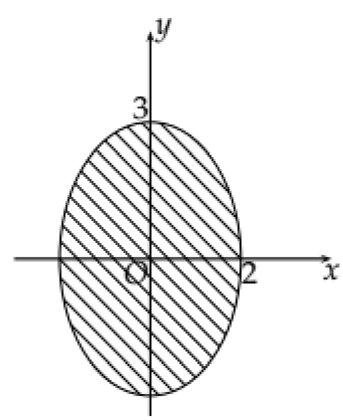
2. Nếu $D: (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}, J = r$$

3. Xác định miền biến thiên của r, φ trong phép đổi biến trong hệ tọa độ cực suy rộng.
4. Thay vào công thức biến đổi biến tổng quát và hoàn tất quá trình đổi biến.

<u>Ví dụ 2.01.6</u>. Tính

$$\iint_D \left|9x^2 - 4y^2\right| dxdy \text{ trong đó } D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$$



Lời giải:

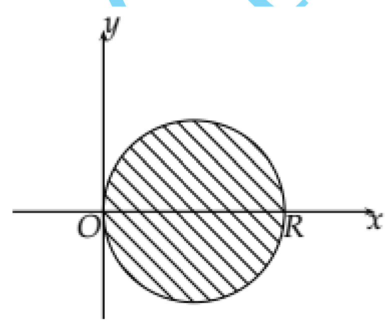
Đặt $\begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = 6r, \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

Ta có :

$$I = 6\iint\limits_{D_{r\varphi}} \left|36r^2\cos^2\varphi - 36r^2\sin^2\varphi\right| rdrd\varphi = 36.6\int_0^{2\pi}\left|\cos 2\varphi\right| d\varphi \int_0^1 r^3 dr = ... = 216$$

Ví dụ 2.01.7. Tính

$$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{Rx - x^2 - y^2}\,dy, (R > 0)$$



Lời giải:

Từ biểu thức tính tích phân suy ra biểu thức giải tích của D là :

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le R \\ -\sqrt{Rx - x^2} \le y \le \sqrt{Rx - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4}$$

Đăt $\begin{cases} x = \dfrac{R}{2} + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r, \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \dfrac{R}{2} \end{cases}$

Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2}\, rdr = 2\pi.\frac{-1}{2}\int_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2}\, d\left(\frac{R^2}{4} - r^2\right) = \frac{\pi R^3}{12}$$

§2. Tích phân bội ba

2.1. Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 2.2

Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn V của không gian Oxyz. Chia miền V một cách tùy ý thành n miền nhỏ. Gọi các miền đó và thể tích của chúng là $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Trong mỗi miền Δ_i lấy một điểm tùy ý

$M(x_i, y_i, z_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$. Nếu khi $n \to +\infty$ sao cho max

$\{\Delta V_i \to 0\}$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm $M(x_i, y_i, z_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là tích phân bội ba của hàm số $f(x,y,z)$ trong miền V, kí hiệu là $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$

Khi đó ta nói rằng hàm số $f(x,y,z)$ khả tích trong miền V.

Do tích phân bội ba không phụ thuộc vào cách chia miền V thành các miền nhỏ nên ta có thể chia V bởi ba họ mặt thẳng song song với các mặt phẳng tọa độ, khi đó $dV = dxdydz$ và ta có thể viết

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

Các tính chất cơ bản

- Tính chất tuyến tính

$$\iiint\limits_V \left[f(x,y,z) + g(x,y,z)\right]dxdydz$$

$$= \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$$

$$= \quad \iiint kf(x,y,z)dxdydz = k\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $V = V_1 \cup V_2$ và $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ thì :

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \quad \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

2.2. Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Cũng giống như việc tính toán tích phân kép, ta cần phải đưa tích phân ba lớp về tích phân lặp. Việc chuyển đổi này sẽ được thực hiện qua trung gian là tích phân kép.

$$\boxed{\text{Tích phân ba lớp} \Rightarrow \text{Tích phân hai lớp} \Rightarrow \text{Tích phân lặp}}$$

Sơ đồ trên cho thấy việc tính tích phân ba lớp được chuyển về tính tích phân kép (việc tính tích phân kép đã được nghiên cứu ở bài trước). Đương nhiên việc chuyển đổi này phụ thuộc chặt chẽ vào hình dáng của miền V. Một lần nữa, kĩ năng vẽ hình là rất quan trọng. Nếu miền V được giới hạn bởi mặt $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$, trong đó $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$ là các hàm số liên tục trên miền D, D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy thì ta có :

$$I = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Thuật toán chuyển tích phân ba lớp về tích phân hai lớp

1. Xác định hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy.
2. Xác định biên dưới $z = z_1(x,y)$ và biên trên $z = z_2(x,y)$ của V.
3. Sử dụng công thức (2.1) để hoàn tất việc chuyển đổi.

Đến đây mọi việc chỉ mới xong một nửa, vấn đề còn lại bây giờ là:

Xác định D và các biên $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$ như thế nào?

Có hai cách để xác định : Dùng hình học hoặc là dựa vào biểu thức giải tích của miền V. Mỗi cách đều có những ưu và nhược điểm riêng. Cách dùng hình học tuy khó thực hiện hơn nhưng có ưu điểm là rất trực quan, dễ hiểu. Cách dùng biểu thức giải tích của V tuy có thể áp dụng cho nhiều bài nhưng thường khó hiểu và phức tạp. Chúng tôi khuyên các em sinh viên hãy cố gắng thử cách vẽ hình trước. Muốn làm được điều này, đòi hỏi các bạn sinh viên phải có kĩ năng vẽ các mặt cong cơ bản trong không gian như mặt phẳng, mặt trụ, mặt nón, mặt cầu, ellipsoit, paraboloit, hyperboloit 1 tầng, ... hơn nữa các bạn cần có trí tưởng tượng tốt để hình dung ra sự giao cắt của các mặt.

Chú ý:

Cũng giống như khi tính tích phân kép, việc nhận xét được tính đối xứng của miền V và tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ đôi khi giúp sinh viên giảm được khối lượng tính toán đáng kể.

Định lý 2.5

Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z=0(\text{Ox}y)$ và $f(x,y,z)$ là hàm lẻ đối với z thì :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = 0$$

Định lý 2.6

Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z=0(\text{Ox}y)$ và $f(x,y,z)$ là hàm số chẵn đối với z thì :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = 2\iiint\limits_{V^+} f(x,y,z)dxdydz$$

trong đó V^+ là phần phía trên mặt phẳng $z=0$ của V.

Tất nhiên chúng ta có thể thay đổi vai trò của z trong hai định lý trên bằng x hoặc y . Hai định lý trên có thể được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp đổi biến số.

<u>Ví dụ 2.01.8</u>.Tính $\iiint\limits_V zdxdydz$ trong đó miền V được xác định bởi :

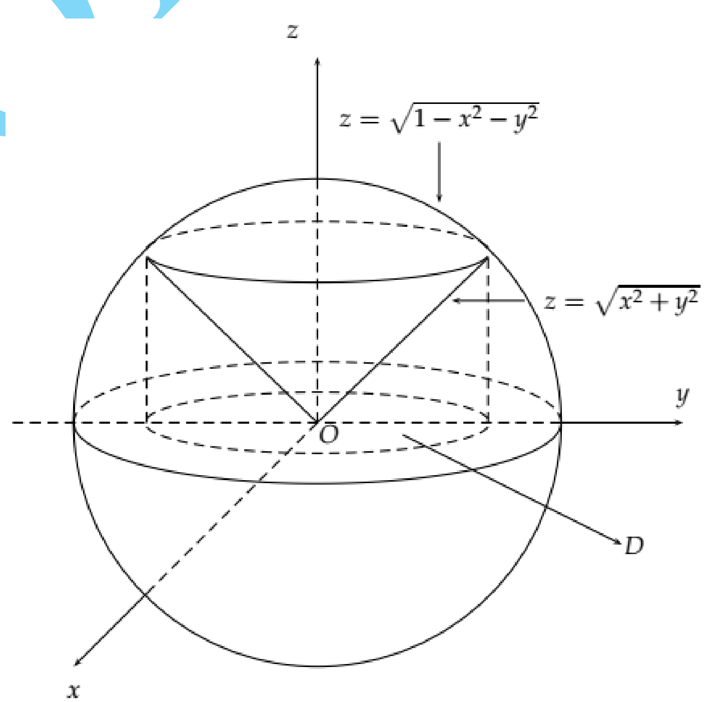
$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1}{4} \\ x \le y \le 2x \\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

Lời giải :

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} \frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{10}{3}x^3\right)dx = \frac{43}{3072}$$

<u>Ví dụ 2.01.9</u>.Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$ trong đó miền V được xác định bởi :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$$



Lời giải :

Do tính chất đối xứng , $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$

$= 2\iiint\limits_{V_1} \left(x^2+y^2\right)dzdydz = 2I$

, trong đó V_1 là nửa phía trên mặt phẳng Oxy của V. Ta có

$$\begin{cases} V_1 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \\ D : x^2+y^2 \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

với D là hình chiếu của V_1 lên Oxy. Ta có :

$$I_1 = \iint\limits_D x^2+y^2 dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r, \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ nên

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2} - r\right)dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2} - r\right)dr = \ldots = \frac{2\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$$

Vậy

$$I = \frac{4\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$$

2.3. Phương pháp đổi biến số trong tích phân bội ba

Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền V là giao của ba họ mặt cong. Giả sử cần tính $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ trong đó $f(x,y,z)$ liên tục trên V. Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v,\mathrm{w}) \\ y = y(u,v,\mathrm{w}) \\ z = z(u,v,\mathrm{w}) \end{cases}$$

thỏa mãn :

- z, y, z cùng với các đạo hàm riêng của nó là các hàm số liên tục trên miền đóng V_{uvw} của mặt phẳng O'_{uvw}.
- Công thức (2.2) xác định song ánh $V_{uvw} \to V$
- $J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,\mathrm{w})} \neq 0$ trong V_{uvw}. Khi đó

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \iiint_{V_{\mathrm{uvw}}} f\left[x(u,v,\mathrm{w}), y(u,v,\mathrm{w}), z(u,v,\mathrm{w})\right]|J|\,\mathrm{dud}v dw$$

Cũng giống như phép đổi biến trong tích phân kép, phép đổi biến trong tích phân bội ba cũng biến biên của miền V thành biên của miền V_{uvw}, biến miền V bị chặn thành miền V_{uvw} bị chặn.

<u>**Ví dụ 2.01.10**</u>.Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} x+y+z=\pm 3 \\ x+2y-z=\pm 1 \\ z+4y+z=\pm 2 \end{cases}$

biết $V = \iiint_V dzdydz$

Lời giải :

Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+2y-z \\ \mathrm{w} = x+4y+z \end{cases}$. Vì phép đổi biến biên của V thành biên

của V_{uvw} nên V_{uvw} giới hạn bởi : $\begin{cases} u=\pm 3 \\ v=\pm 1 \\ \mathrm{w}=\pm 2 \end{cases}$

$$J^{-1} = \frac{D(u,v,\mathrm{w})}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow V = \frac{1}{6}\iiint_{V_{uvw}} \mathrm{dud}v dw = 8$$

Phép đổi biến số trong tọa độ trụ

Khi miền V có biên là các mặt như mặt phẳng paraboloit, mặt nón, mặt trụ và có hình chiếu D là Oxy là hình tròn, hoặc hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức (x^2+y^2) thì ta hay sử dụng công thức đổi biến trong hệ tọa độ cực của điểm M' là hình chiếu của điểm M lên Oxy.

Công thức đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Định thức Jacobian của phép biến đổi là

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$$

ta có :

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \iiint_{V_{r\varphi z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,rdrd\varphi dz$$

Nếu miền V :

$$\begin{cases} (x,y) \in D \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$$

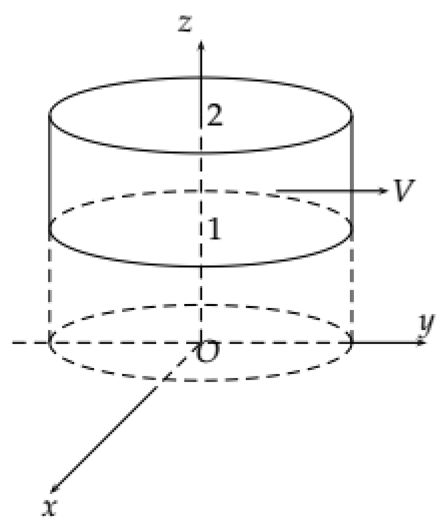
trong đó D:

$$\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{cases}$$

thì :

$$I=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}rdr\int_{z_1(r\cos\varphi,r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi,r\sin\varphi)}f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z\right)dz$$

<u>Ví dụ 2.01.11</u>.Tính $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, trong đó $V;\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ 1\le z\le 2\end{cases}$



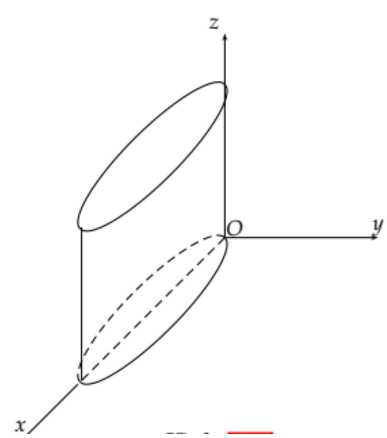
Lời giải :

Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ thì $\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 1\\ 1\le z\le 2\end{cases}$. Ta có

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2dr\int_1^2 zdz=...=\frac{3\pi}{4}$$

<u>Ví dụ 2.01.12</u>.Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\mathrm{dydz}$, trong đó

a) V là miền giới hạn bởi mặt trụ : $x^2+y^2=2x$ và các mặt phẳng $z=0,z=a\left(a>0\right)$.



b) V là nửa của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, z \ge 0 \left(a > 0\right)$

Lời giải :

a) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$. Từ $x^2 + y^2 = 2x$ suy ra $r = 2\cos\varphi$. Do đó :

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ 0 \le z \le a \end{cases}$$

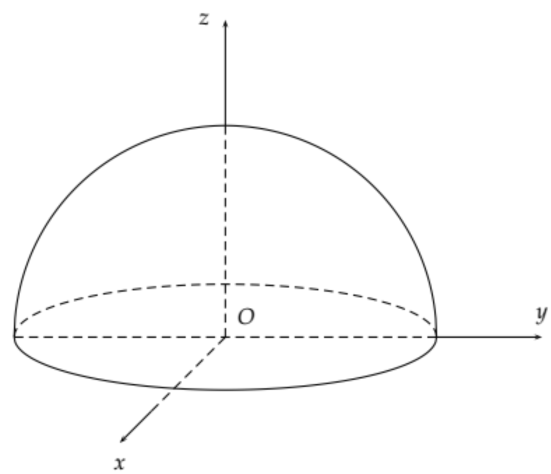
Vậy

$$I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_0^a z dz = \ldots = \frac{16a^2}{9}$$

b)

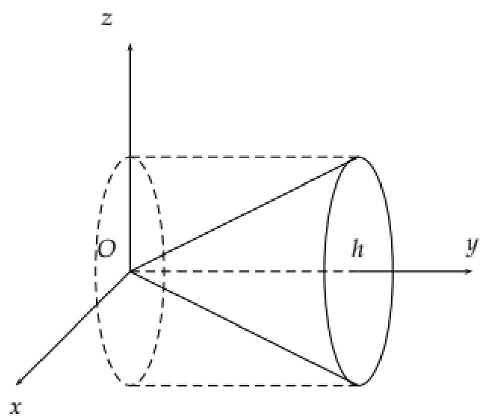
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$,

ta có $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \\ 0 \le z \le \sqrt{a^2 - r^2} \end{cases}$ Vậy :



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr \int_0^a z dz = 2\pi \int_0^a r^2 . \frac{a^2 - r^2}{2} dr = \frac{2\pi a^5}{15}$$

Ví dụ 2.01.13.Tính $I = \iiint\limits_V y dxdydz$, trong đó V giới hạn bởi : $\begin{cases} y = \sqrt{z^2 + x^2} \\ y = h \end{cases}$



Lời giải :

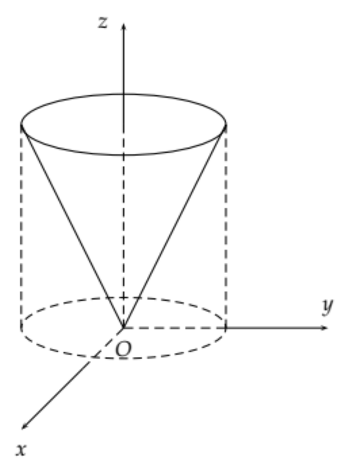
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le h \\ r \le y \le h \end{cases}$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h y dy = 2\pi \int_0^h r . \frac{h^2 - r^2}{2} dr = \frac{\pi h^4}{4}$$

Ví dụ 2.01.14.Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$ trong đó V

giới hạn bởi :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

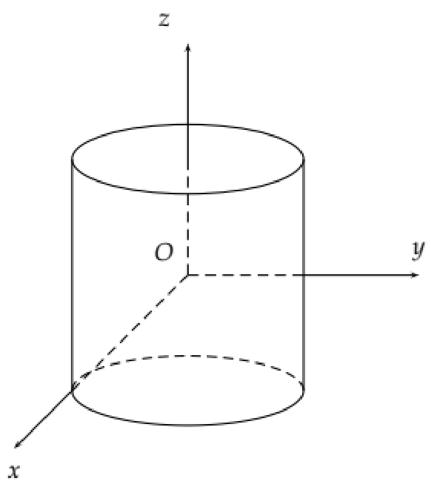


Lời giải :

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ ta có $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r \le z \le 1 \end{cases}$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 dz = 2\pi \int_0^1 r^2(1-r)dr = \frac{\pi}{6}$$

<u>Ví dụ 2.01.15</u>. Tính $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, trong đó $V: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ |z| \le 1 \end{cases}$



Lời giải :

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \Rightarrow |J| = r, V_{r\varphi z} : \\ z' = z - 2 \end{cases} \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ -3 \le z' \le -1 \end{cases}$ ta có :

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr\int_{-3}^{-1}\frac{dz'}{\sqrt{r^2+z'^2}}$$

$$=\pi\int_0^1 r\ln\left(z'+\sqrt{r^2+z'^2}\right)\Big|_{z'=-3}^{z'=-1}dr$$

$$=2\pi\left[\int_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+1}-1\right)dr-\int_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+9}-3\right)dr\right]$$

$$=2\pi\left(I_1-I_2\right)$$

Vì $\lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+1}-1\right)=\lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+9}-3\right)=0$ nên thực chất I_1, I_2 là các tích phân xác định.

Đặt $\sqrt{r^2+1}=t\Rightarrow rdr=tdt$, ta có

$$\int r\ln\left(\sqrt{r^2+1}-1\right)dr$$

$$=\int t\ln(t-1)dt$$

$$=\frac{t^2}{2}\ln(t-1)-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{t-1}dt$$

$$=\frac{t^2-1}{2}\ln(t-1)-\frac{t^2}{4}-\frac{t}{2}+C$$

nên

$$I_1=\left[\frac{t^2-1}{2}\ln(t-1)-\frac{t^2}{4}-\frac{t}{2}\right]\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Tương tự, $I_2=\dfrac{t^2-9}{2}\ln(t-3)-\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{3t}{2}+C$ nên

$$I_2=\left[\frac{t^2-9}{2}\ln(t-3)-\frac{t^2}{4}-\frac{3t}{2}\right]\Bigg|_3^{\sqrt{10}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{10}-3\right)-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\left(\sqrt{10}-3\right)$$

Vậy

$$I = 2\pi\left(I_1 - I_2\right) = \pi\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - 8 - \sqrt{2}\right)$$

Phép đổi biến trong tọa độ cầu

Trong trường hợp miền V có dạng hình cầu , chỏm cầu , múi cầu,... và khi hàm lấy tích phân $f\left(x,y,z\right)$ có chứa biểu thức $\left(x^2+y^2+z^2\right)$ thì ta hay sử dụng phép đổi biến trong tọa độ cầu.

Tọa độ cầu của điểm $M\left(x,y,z\right)$ trong không gian là bộ ba $\left(r,\theta,\varphi\right)$, trong đó :

$$\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \theta = \left(\overrightarrow{OM}, Oz\right) \\ \varphi = \left(\overrightarrow{OM'}, Ox\right) \end{cases}$$

Công thức của phép đổi biến là :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Định thức Jacobian $J = \dfrac{D\left(x,y,z\right)}{D\left(r,\theta,\varphi\right)} = -r^2\sin\theta$, ta có :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{V_{r\theta\varphi}} f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

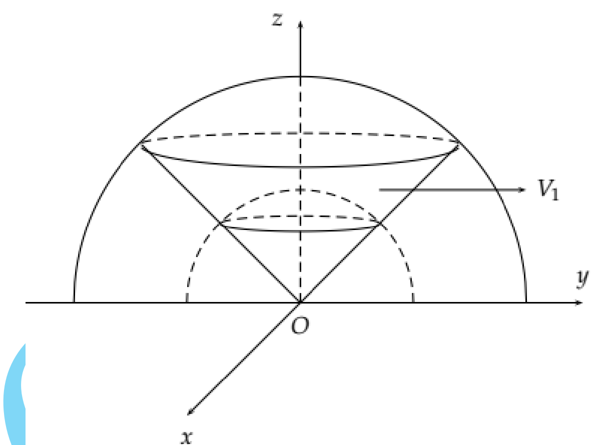
Đặc biệt, nếu $V_{r\theta\varphi}$:

$$\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, (\varphi_2 - \varphi_1 \le 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) \le r \le r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$$

thì :

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} \sin\theta d\theta \int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 dr$$

Ví dụ 2.01.16. Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, trong đó $V: \begin{cases} 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \le z^2 \end{cases}$



Lời giải :

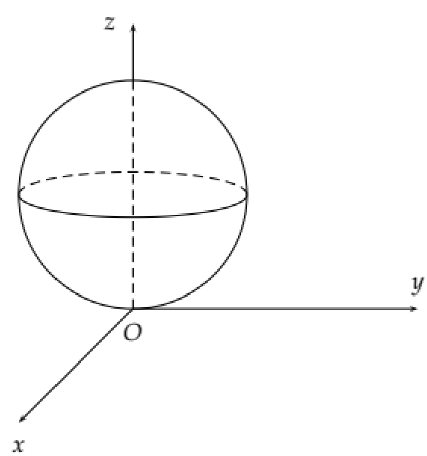
Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$. Do $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ nên $1 \le r \le 2$, trên mặt nón có phương trình $x^2+y^2=z^2$ nên $\theta = \frac{\pi}{4}$. Vậy

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$$

nên

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_1^2 r^2 r^2 dr = 2.2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} . \frac{r^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{4.31\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

<u>Ví dụ 2.01.17</u>. Tính $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó $V: x^2+y^2+z^2 \le z$



Lời giải :

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$. Nhìn hình vẽ ta thấy $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

Do $x^2+y^2+z^2 \le z$ nên $0 \le r \le \cos\theta$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{\cos\theta} rr^2 dr = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta.\frac{1}{4}\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{10}$$

Phép đổi biến trong tọa độ cầu suy rộng.

Tương tự như khi tính tích phân kép , khi miền V có dạng hình ellipsoit hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục tọa độ thì ta sẽ sử dụng phép đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng. Khi đó ta phải tính lại Jacobian của phép đổi biến.

1. Nếu miền V có dạng hình ellipsoit hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục tọa độ nên nghĩ tới phép biến số trong tọa độ cầu suy rộng.
2. Nếu V : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi, J = -abcr^2\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

Nếu V: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = a + r\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + r\sin\theta\sin\varphi, J = -r^2\sin\theta \\ z = c + r\cos\theta \end{cases}$$

3. Xác định miền biến thiên của r,θ,φ .
4. Dùng công thức đổi biến tổng quát để hoàn tất việc đổi biến.

Ví dụ 2.01.18. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó V là nửa của khối ellipsoit

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\le 1, z\ge 0, (a,b>0)$$

Lời giải :

Đặt $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = a^2br^2\sin\theta \\ z = br\cos\theta \end{cases}$

$$V_{r\varphi z'} = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1\right\}$$

Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 br\cos\theta.ar\sin\theta.a^2b\sin\theta = 2a^3b^2\pi\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\pi d\theta\int_0^1 r^4dr = \frac{2\pi a^3b^2}{15}$$

<u>Ví dụ 2.01.19</u>. Tính $\iiint\limits_V \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, trong đó

$$V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1, (a,b,c > 0)$$

Lời giải :

Đặt $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$

$$V_{r\varphi z'} = \{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le r \le 1\}$$

Vậy

$$I = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2r^2\sin\theta = \frac{4\pi}{5}abc$$

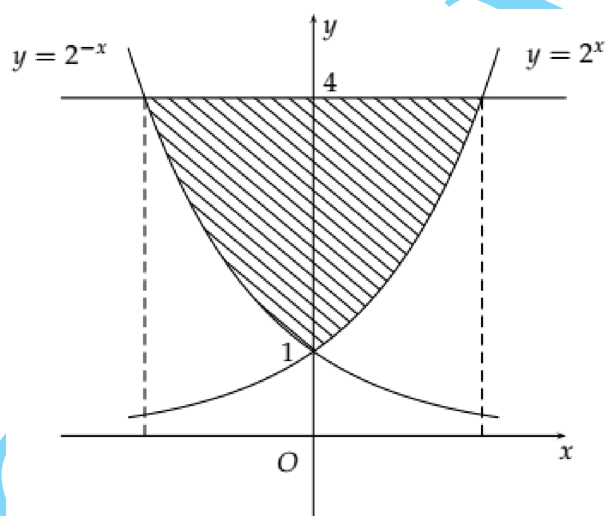
§3. Các ứng dụng của tích phân bội

3.1. Tính diện tích hình phẳng

Công thức tổng quát :

$$S = \iint_D dxdy$$

Ví dụ 2.01.20. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases}$



Lời giải :

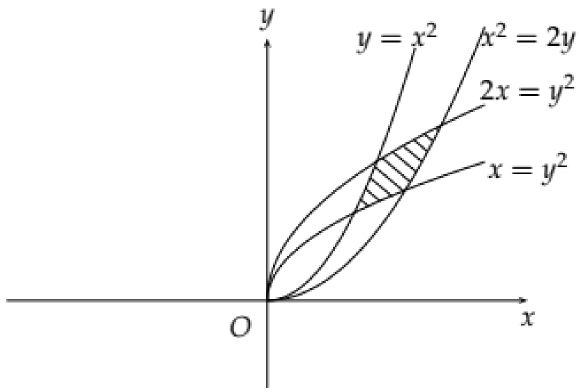
Nhận xét :

$$D = D_1 \cup D_2, D_1 \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 2^{-x} \le y \le 4 \end{cases}, D_2 \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 2^x \le y \le 4 \end{cases}$$

nên

$$S = \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy = 2\iint_{D_1} dxdy = ... = 2\left(8 - \frac{3}{\ln 2}\right)$$

Ví dụ 2.01.21. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y \end{cases}$



Lời giải :

Ta có $S = \iint\limits_D dxdu$. Thực hiện phép đổi biến

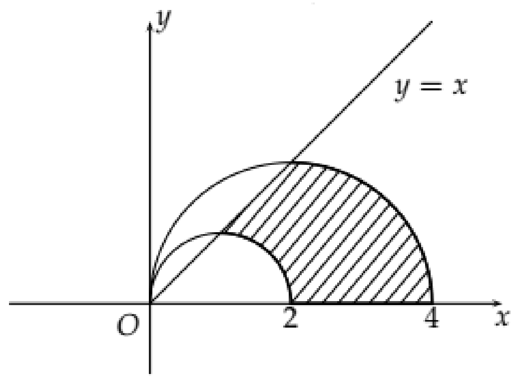
$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$$

thì $$J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{-y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & \dfrac{-x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3$$

Vậy $$S = \iint\limits_{D_{uw}} \frac{1}{3} \mathrm{dud}w = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 2.01.22. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x \\ x = y, y = 0 \end{cases}$$



Lời giải :

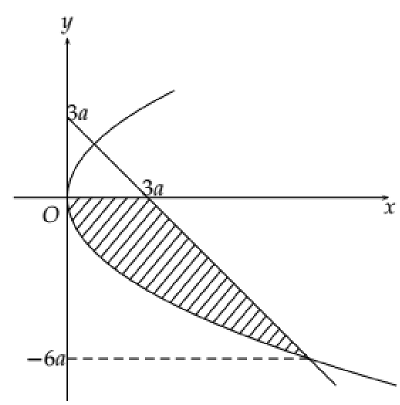
Ta có

$$S=\iint\limits_D dxdy \text{ , đặt } \begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \text{ thì } D:\begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi\le r\le 4\cos\varphi \end{cases} \text{ nên}$$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}12\cos^2\varphi d\varphi=\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$$

<u>Ví dụ 2.01.23</u>. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y=0, y^2=4x \\ x+y=3a, y\le 0\left(a>0\right) \end{cases}$$



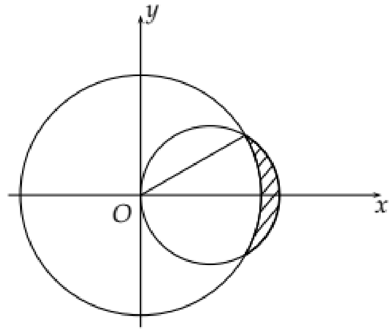
Lời giải :

Nhìn hình vẽ ta thấy $D:\begin{cases} -6a\le y\le 0 \\ \dfrac{y^2}{4a}\le x\le 3a-y \end{cases}$ nên

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int_{-6a}^{0} dy\int_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx=\int_{-6a}^{0}\left(3a-y-\frac{y^2}{4a}\right)dy=18a^2$$

<u>Ví dụ 2.01.24</u>. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi đường tròn

$$r=1, r=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi \;.$$



Lời giải :

Giao tại giao điểm của 2 đường tròn:

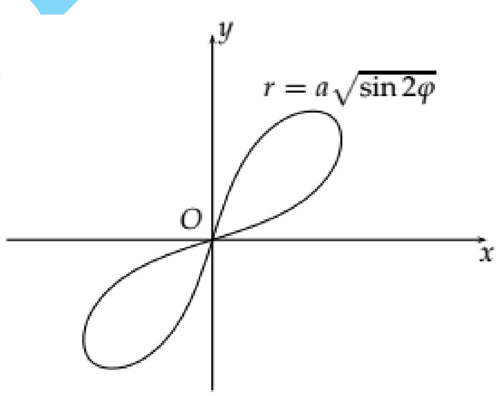
$$r=1=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi \Leftrightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{6}$$

nên

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi}rdr=2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{4}{3}\cos^2\varphi-1\right)d\varphi=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{18}$$

<u>Ví dụ 2.01.25</u>. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi đường

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy\left(a>0\right)$$



Lời giải :

Tham số hóa đường cong đã cho , đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương trương với $r^2 = a^2\sin 2\varphi$. Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ tọa độc cực . Ta có

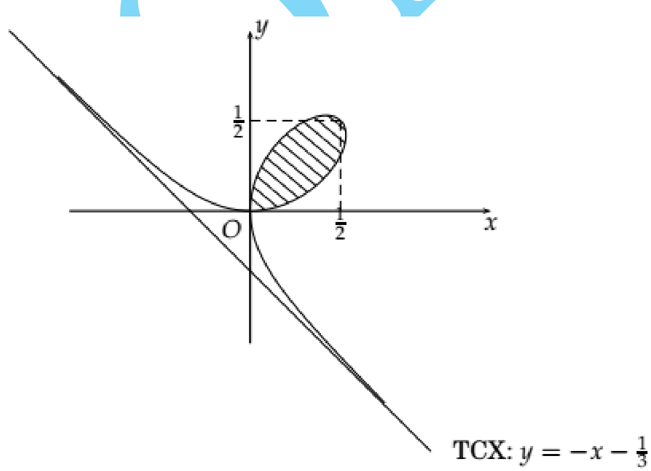
$$D:\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2} \\ 0 \le r \le a\sqrt{\sin 2\varphi} \end{cases}$$

Do tính đối xứng của hình vẽ nên

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} rdr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin 2\varphi d\varphi = a^2$$

Ví dụ 2.01.26. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi đường

$$x^3 + y^3 = axy\left(a > 0\right)$$



Lời giải :

Tham số hóa đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với

$$r = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$$

Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ tọa độ cực . Ta có :

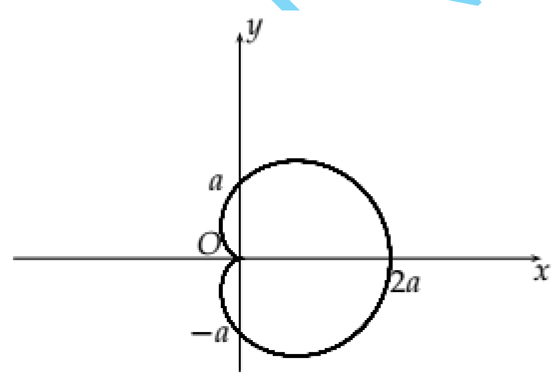
$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le \dfrac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} \end{cases}$$

nên

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}} rdr = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi\right)} d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{d\left(t^3+1\right)}{\left(t^3+1\right)^2} = \frac{a^2}{6}$$

<u>Ví dụ 2.01.27</u>. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi đường

$$r = a\left(1+\cos\varphi\right)\left(a>0\right)$$



Lời giải :

Ta có :

$$D = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le a\left(1+\cos\varphi\right)\right\}$$

nên

$$S = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} rdr = a^2\int_0^{\pi}\left(1+\cos\varphi\right)^2 d\varphi = \ldots = \frac{3\pi a^2}{2}$$

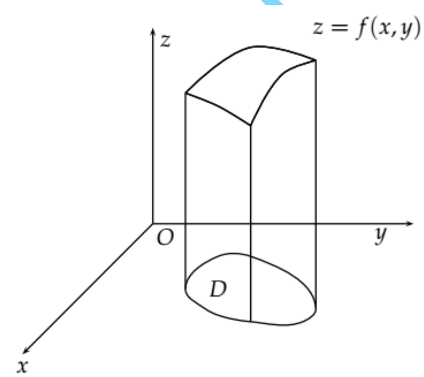
3.2. Tính thể tích vật thể

Công thức tổng quát :

$$V = \iiint_V dxdydz$$

Các trường hợp đặc biệt :

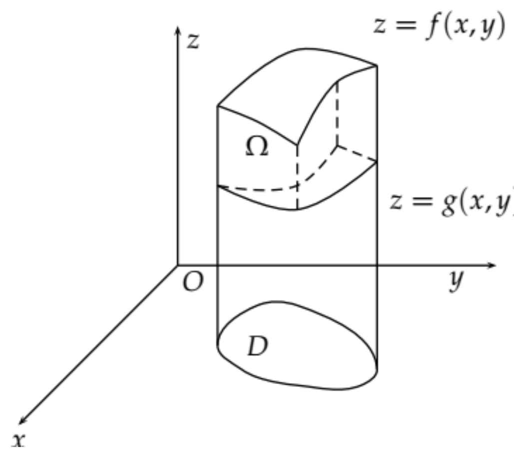
1. Vật thể hình trụ, mặt xung quanh là mặt trụ có đường kính sinh song song với trục Oz, đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x,y), f(x,y) \geq 0$ và liên tục trên D thì :



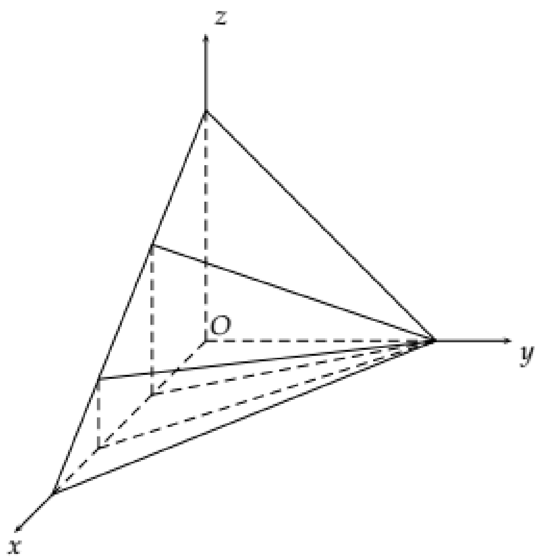
$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

2. Vật thể là khối trụ , giới hạn bởi các đường sinh song song với trục Oz, hai mặt $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$. Chiếu các mặt này lên mặt phẳng Oxy ta được miền D , $z_1(x,y), z_2(x,y)$ là các hàm liên tục , có đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó :

$$V = \iint_D |z_1(x,y) - z_2(x,y)|\,dxdy$$



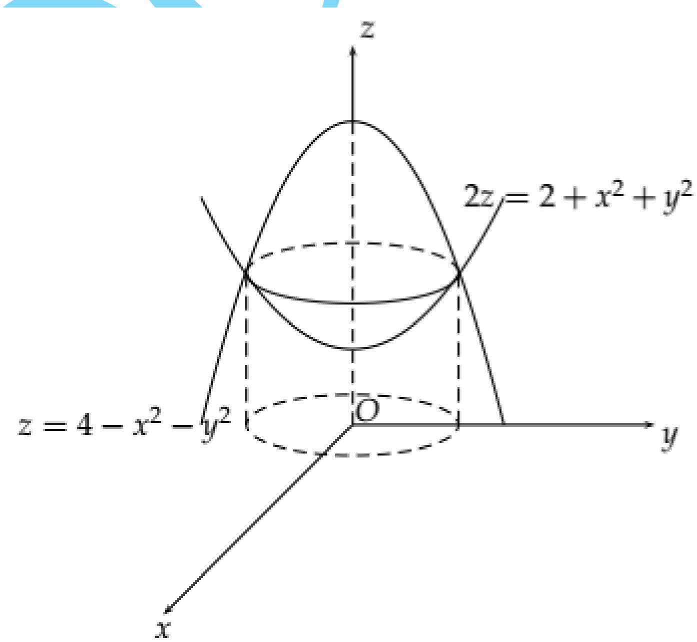
Ví dụ 2.01.28. Tính diện tích miền giới hạn bởi $\begin{cases} 3x + y \geq 1 \\ 3x + 2y \leq 2 \\ y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$



Lời giải :

$$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{\frac{1-y}{3}}^{\frac{2-2y}{3}}(1-x-y)\,dx=\frac{1}{6}\int_0^1\left(1-2y+y^2\right)dy=\frac{1}{18}$$

<u>**Ví dụ 2.01.29**</u>. Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z=4-x^2-y^2 \\ 2z=2+x^2+y^2 \end{cases}$



Lời giải :

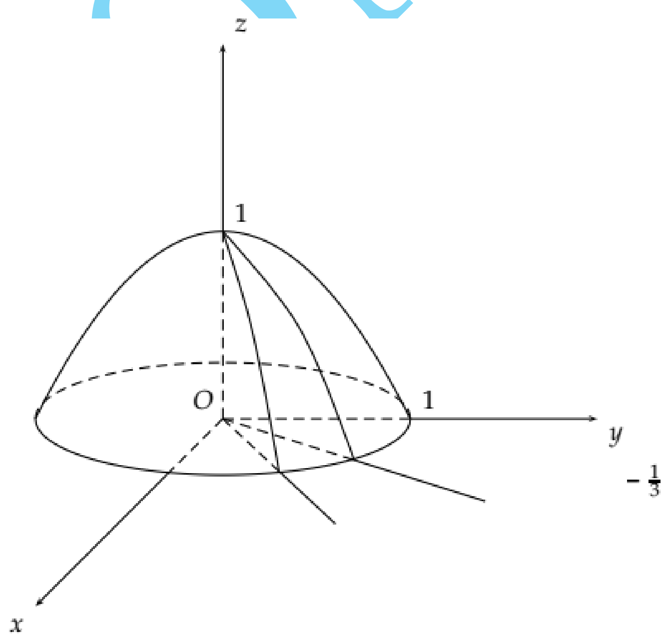
Giao tuyến của hai mặt cong $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases}$, nên hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là $D: x^2+y^2\le 2$. Hơn nữa trên D thì $4-x^2-y^2 \ge \dfrac{2+x^2+y^2}{2}$ nên ta có:

$$V=\iint\left(4-x^2-y^2-\frac{2+x^2+y^2}{2}\right)dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le\sqrt{2} \end{cases}$, do đó

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(3-\frac{3}{2}r^2\right)rdr=...=3\pi$$

<u>Ví dụ 2.01.30</u>. Tính thể tích của V $\begin{cases} 0\le z\le 1-x^2-y^2 \\ y\ge x, y\le\sqrt{3}x \end{cases}$



Lời giải :

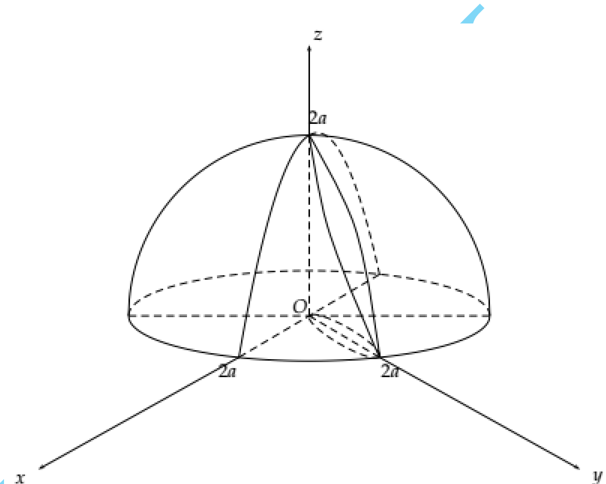
Do $x\le y\le\sqrt{3}x$ nên $x,y\ge 0$. Ta có

$$V = \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$. Vậy

$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 \left(1 - r^2\right) r dr = \ldots = \frac{\pi}{48}$$

<u>Ví dụ 2.01.31</u>. Tính thể tích của V $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay \le 0 \end{cases}$



Lời giải :

Do tính chất đối xứng của miền V nên

$$V = 4\iint \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

trong đó D là nửa hình tròn $D: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay \le 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2a\sin\varphi \end{cases}$

Vậy

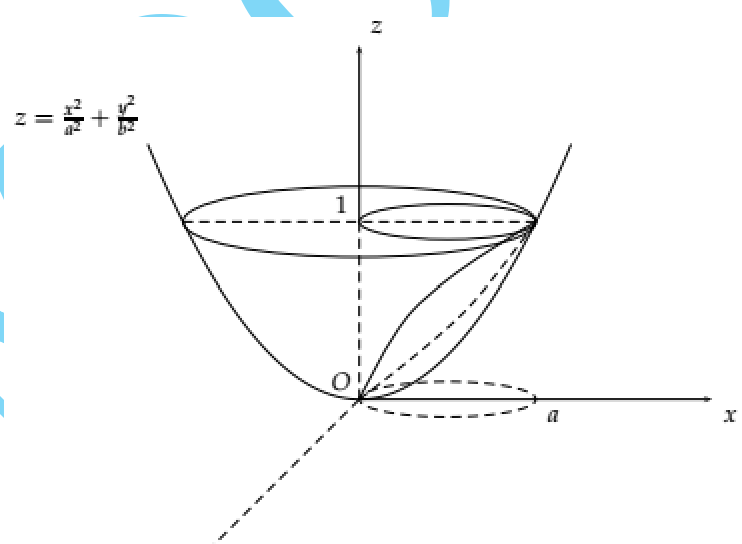
$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r dr$$

$$= 4.\frac{-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(4a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=2a\sin\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8a^3 - 8a^3\cos^3\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{32a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

<u>Ví dụ 2.01.32</u>. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2x}{a} \end{cases}$



Lời giải :

Ta có hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là miền $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$. Do tính chất đối xứng của miền V nên :

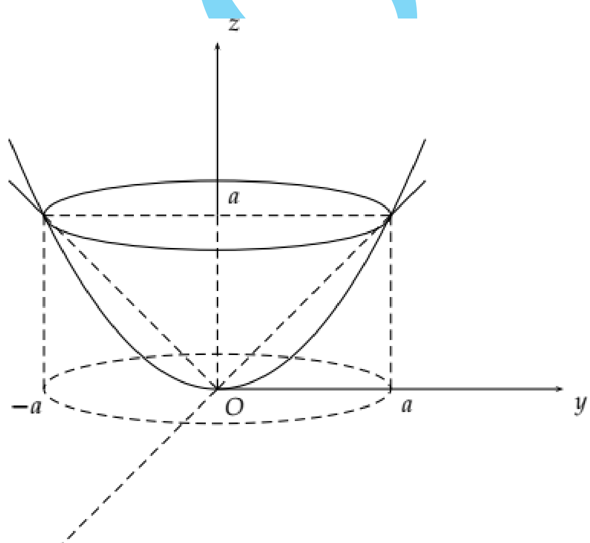
$$V = 2\iint_{D^+} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dxdy$$

trong đó D^+ là nửa ellipse $D^+ : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}, y \geq 0$

Đặt $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$ thì $|J| = abr, \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2\cos\varphi \end{cases}$. Vậy

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 rdr = ... = \frac{3\pi}{2}$$

<u>Ví dụ 2.01.33</u>. Tính thể tích của miền V $\begin{cases} az = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$



Lời giải :

Giao tuyến của hai đường cong :

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{a}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=a\end{cases}$$

Vậy là hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là

$$D: x^2+y^2=a^2$$

Nhận xét rằng , ở trong miền D thì mặt nón ở phía trên mặt paraboloit nên :

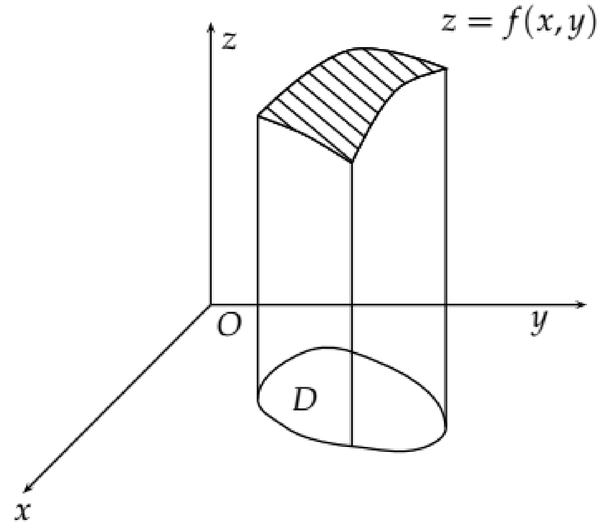
$$V=\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{a}\right)dxdy$$

Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ thì $\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le a\end{cases}$. Vậy

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left(r-\frac{r^2}{a}\right)rdr=...=\frac{\pi a^3}{6}$$

GT2_02_06.03 Tính diện tích mặt cong

Mặt $z=f(x,y)$ giới hạn bởi một đường cong kín, hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là D. $f(x,y)$ là hàm số liên tục , có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó :



$$\sigma=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy, p=f_x', q=f_y'$$

Chương 3: Tích phân đường

§1. Tích phân đường loại I

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên một cung phẳng AB . Chia cung AB thành n cung nhỏ, gọi tên và độ dài của chúng lần lượt là $\Delta_{S_1}, \Delta_{S_2}, \ldots \Delta_{S_n}$. Trên mỗi cung Δ_{S_i} lấy một điểm M_i bất kì. Giới hạn, nếu có , của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta_{S_i}$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta_{S_i} \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia cung AB và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại I của hàm số $f(x,y)$ dọc theo cung AB, kí hiệu là $\int_{AB} f(x,y)ds$.

Chú ý :

- Tích phân đường loại I không phụ thuộc vào hướng của cung AB.
- Nếu cung AB có khối lượng riêng tại $M(x,y)$ là $\rho(x,y)$ thì khối lượng của nó là $\int_{AB} \rho(x,y)ds$ nếu tích phân đó tồn tại.
- Chiều dài của cung AB được tính theo công thức $l = \int_{AB} ds$
- Tích phân đường loại một cố các tính chất giống như tích phân xác định

1.2. Các công thức tính tích phân đường loại I

1. Nếu cung AB cho bởi phương trình $y = y(x), a \le x \le b$ thì :

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

2. Nếu cung AB cho bởi phương trình $x = x(y), c \le y \le d$ thì :

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}dy.$$

3. Nếu cung AB cho bởi phương trình $x = x(t)$, $y = y(t), t_1 \le t \le t_2$ thì :

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

4. Nếu cung AB cho bởi phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ thì coi nó như là phương trình dưới dạng tham số , ta được :

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi \quad \text{và}$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$$

<u>Ví dụ 2.03.1</u>. Tính $\int\limits_C (x-y)ds$, C là đường tròn có phường trình $x^2+y^2=2x$

Lời giải :

Đặt $\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (1+\cos t-\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}dt = 2\pi$$

<u>Ví dụ 2.03.2</u>. Tính $\int\limits_C y^2 ds$, C là đường tròn cong $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$

Lời giải :

$$\begin{cases} x'(t) = a(1-\cos t) \\ y'(t) = a\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 .2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{256a^3}{15}$$

Ví dụ 2.03.3. Tính $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, C là đường

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$$

Lời giải :

$$\begin{cases} x'(t) = at\cos t \\ y'(t) = at\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = at$$

$$\Rightarrow I = \int \sqrt{a^2\left[(\cos t + \sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right]}atdt = \frac{a^3}{3}\left(\sqrt{(1+4\pi^2)^3} - 1\right)$$

§2. Tích phân đường loại II

2.1. Định nghĩa

Cho hai hàm số $P(x,y),Q(x,y)$ xác định trên cung AB. Chia cung AB thành n cung nhỏ Δ_{S_i} bởi các điểm chia $A_0=A,A_1,A_2,...A_n=B$. Gọi tọa độ của vectow $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}=(\Delta x_i,\Delta y_i)$ và lấy điểm M_i bất kì trên mỗi cung Δ_{S_i}. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum_{i=1}^{n}\left[P(M_i)\Delta x_i+Q(M_i)\Delta y_i\right]$ sao cho $\max\Delta x_i\to 0$, không phụ thuộc vào cách chia cung AB và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại II của các hàm số $P(x,y),Q(x,y)$ dọc theo cung AB, kí hiệu là :

$$\int_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Chú ý :

- Tích phân đường loại II phụ thuộc vào hướng của cung AB, nếu đổi chiều trên đường lấy tích phân đổi dấu,
$$\int_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_{BA}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
- Tích phân đường loại hai có các tính chất giống như tích phân xác định.

2.2. Các công thức tính tích phân đường loại II

1. Nếu cung AB được cho bởi phương trình $y=y(x)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $x=a,x=b$ thì :

$$\int_{AB}Pdx+Qdy=\int_a^b P\left(x,y(x)+Q(x,y(x)).y'(x)\right)dx$$

2. Nếu cung AB được cho bởi phương trình $x = x(y)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $y = x, y = d$ thì :

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int \left[P\left(x(y).x'(y) \right) \right] dy, y + Q\left(x(y), y \right)$$

3. Nếu cung AB được cho bởi phương trình $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, điểm đầu và điểm cuối tương ứng với $t = t_1, t = t_2$ thì

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t) \right).x'(t) + Q\left(x(t) \right) y'(t) \right] dt$$

<u>**Ví dụ 2.03.4**</u>. Tính $\int_{AB} \left(x^2 - 2xy \right) dx + \left(2xy - y^2 \right) dy$, trong đó AB là cung parabol $y = x^2$ từ $A(1,1)$ đến $B(2,4)$

Lời giải :

Áp dụng công thức (5) ta có :

$$I = \int \left[\left(x^2 - 2x^3 \right) + \left(2x^3 - x^4 \right) 2x \right] dx = -\frac{41}{30}$$

<u>**Ví dụ 2.03.5**</u>. Tính $\int_C \left(x^2 - 2xy \right) dx + \left(2xy - y^2 \right) dy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ theo chiều tăng của t, $0 \le t \le 2\pi, a > 0$

Lời giải :

Ta có : $\begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \sin t \end{cases}$ nên:

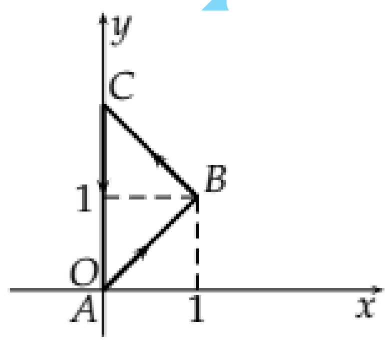
$$I=\int_0^{2\pi}\left\{\left[2a(t-\sin t)-a(1-\cos t)\right]a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t\right\}dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left[(2t-2)+\sin 2t+(t-2)\sin t-(2t-2)\cos t\right]dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left[(2t-2)+t\sin t-2t\cos t\right]dt$$

$$=a^2\left(4\pi^2-6\pi\right)$$

Ví dụ 2.03.6. Tính $\int_{ABCA} 2\left(x^2+y^2\right)dx+x(4y+3)dy$ ở đó ABCA là đường gấp khúc đi qua $A(0,0),B(1,1),C(0,2)$



Lời giải :

Ta có :

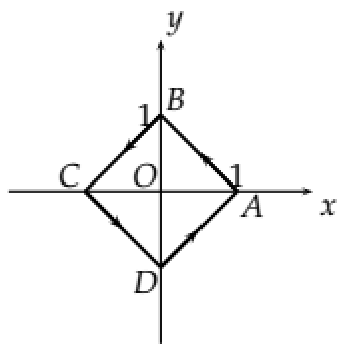
- Phương trình đường thẳng $AB: x=y$
- Phương trình đường thẳng $BC: x=2-y$
- Phương trình đường thẳng $CA: x=0$

nên : $I=\int_{AB}...+\int_{BC}...+\int_{CA}...$

$$=\int_0^1\left[2\left(y^2+y^2\right)+y(4y+3)\right]dy+\int_1^2 2\left[(2-y)^2+y^2\right].(-1)+(2-y)(4y+3)dy+0$$

$=3$

Ví dụ 2.03.7. Tính $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ ở đó ABCDA là đường gấp khúc đi qua $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$



Lời giải :

Ta có :

$$\begin{cases} AB: x+y=1 \Rightarrow dx+dy=0 \\ BC: x-y=-1 \Rightarrow dx=dy \\ CD: x+y=-1 \Rightarrow dx+dy=0 \\ DA: x-y=1 \Rightarrow dx=dy \end{cases}$$

nên :

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{AB} \ldots + \int\limits_{BC} \ldots + \int\limits_{CD} \ldots + \int\limits_{DA} \ldots \\ &= 0 + \int\limits_{BC} \frac{dx}{x+y} + 0 + \int\limits_{DA} \frac{2dx}{x-y} \\ &= \int_0^{-1} 2dx + \int_0^1 2dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>Ví dụ 2.03.8</u>. Tính $\int\limits_C \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{2}dx + dy$ trong đó $\begin{cases} x = t\sin\sqrt{t} \\ y = t\cos\sqrt{t} \\ 0 \le t \le \frac{\pi^2}{4} \end{cases}$ theo chiều tăng của t.

Lời giải :

Đặt $u = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \le u \le \pi, \begin{cases} x = u^2\sin u \\ y = u^2\cos u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(u) = 2u\sin u + u^2\cos u \\ y'(u) = 2u\cos u - u^2\sin u \end{cases}$

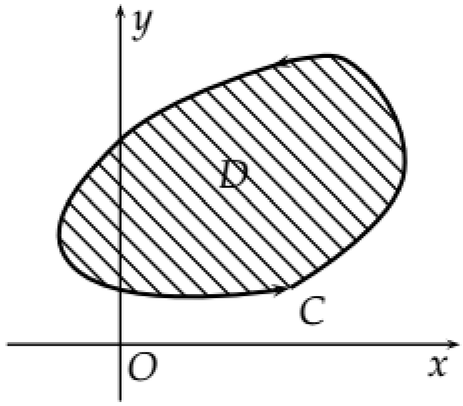
$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{u}{2}\left(2u\sin u + u^2\cos u\right) + 2u\cos u - u^2\sin u \right] du$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{u^3}{2} + 2u \right) \cos u\, du$$

$$= \frac{-3}{2}\pi^2 + 2$$

2.3. Công thức Green

Hướng dương của đường cong kín : Nếu đường lấy tích phân là đường cong kín thì ta quy ước hướng dương của đường cong là hướng sao cho một người đi dọc theo đường cong theo hướng ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó ở gần phía mình nhất nằm về phía bên trái.



Giả sử $D \subset R^2$ là miền đơn liên, liên thông, bị chặn với biên giới D là đường cong kín với hướng dương, hơn nữa P,Q cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên D . Khi đó

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Chú ý:

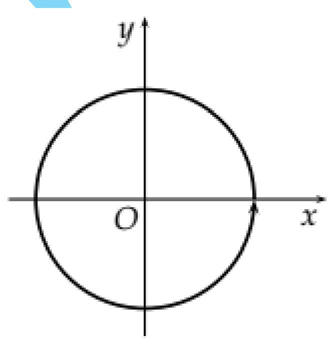
- Nếu D có hướng âm thì :

$$\int_C Pdx + Qdy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

- Trong nhiều bài toán, nếu C là đường cong không kín, ta có thể bổ sung C để được đường cong kín và áp dụng công thức Green.

Ví dụ 2.03.9.Tính các tích phân sau $\int_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ bằng hai cách: tính trực tiếp , tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả , với C là đường :

a) $x^2 + y^2 = R^2$



Lời giải :

Cách 1: Tính trực tiếp

Đặt $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \Rightarrow 0 \le t \le \pi$

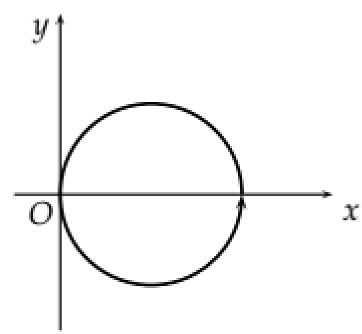
$$I = ...$$
$$= \frac{R^3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos t\cos 2t + \sin t\cos 2t\right)dt$$
$$= 0$$

Cách 2: Sử dụng công thức Green

$$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$$

$$\Rightarrow I = \iint_{x^2+y^2\le R^2}(y-x)dxdy$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le R^2} ydxdy - \iint_{x^2+y^2\le R^2} xdxdy$$
$$= 0$$

b) $x^2 + y^2 = 2x$



Cách 1: Tính trực tiếp

Ta có $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ nên

Đặt $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

$$I = \int\left\{\left[(1 = \cos t)\sin t + 1 + \cos t + \sin t\right](-\sin t) + \left[(1+\cos t)\sin t + 1 + \cos t - \sin t\right]\cos t\right\}dt$$

$$= \int\left(-2\sin^2 t + \cos^2 t - \cos t\sin t + \cos t - \sin t - \cos t\sin^2 t + \cos^2 t\sin t\right)dt$$

$$= ....$$
$$= -\pi$$

Cách 2: Sử dụng công thức Green.

Ta có : $\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = y - x$

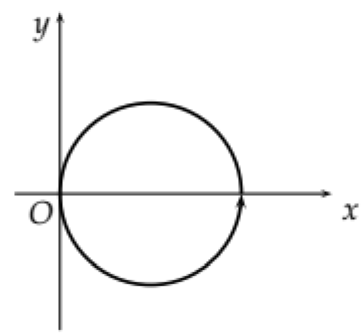
$\Rightarrow I = \iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} (y-x)\,dxdy$, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

$$I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (r\sin\varphi - 1 - r\cos\varphi)\,rdr$$

$$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(\sin\varphi - \cos\varphi).4\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\right]d\varphi$$

$= -\pi$

<u>Ví dụ 2.03.10</u>. Tính $\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2=2x} x^2\left(y + \frac{x}{4}\right)dy - y^2\left(x + \frac{y}{4}\right)dx$



Lời giải :

Áp dụng công thức Green ta có :

$$I = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_D \left(4xy + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2\right)dxdy = \frac{3}{4}\int_D (\,$$

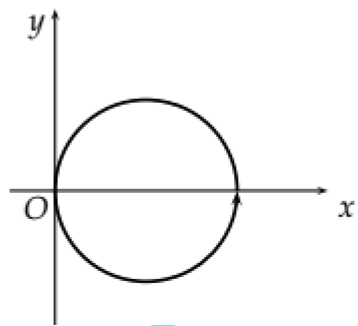
vì $\displaystyle\int_D 4xydxdy = 0$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, ta có :

$\dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi$. Vậy

$$I = \frac{3}{4}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} r^2 r dr = \frac{3}{4}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi = \frac{9}{8}\pi$$

<u>Ví dụ 2.03.11</u>. Tính $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} \left(xy + e^x \sin x + x + y\right)dx - \left(xy - e^{-y} + x - \sin y\right)dy$



Lời giải :

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = xy + e^x \sin x + x + y \\ Q(x,y) = xy - e^{-y} + x - \sin y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y - x - 2$

Áp dụng công thức Green ta có ;

$$I = \iint\limits_D -y - x - 2dxdy$$

$$= \iint\limits_D -x - 2dxdy$$

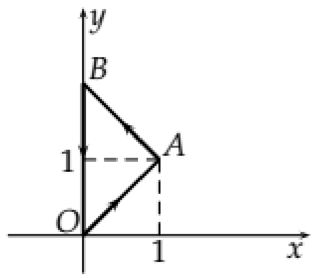
vì $\iint\limits_D ydxdy = 0$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi$

$$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} \left(-r\cos\varphi - 2\right) r dr$$

$$= -3\pi$$

Ví dụ 2.03.12. Tính $\oint\limits_{OABO} e^x\left[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy\right]$ trong đó OABO là đường gấp khúc $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$



Lời giải :

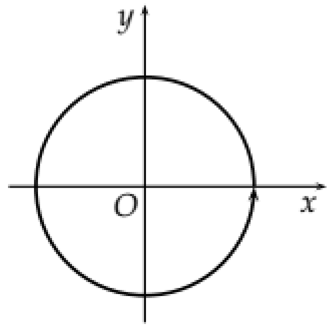
Đặt $\begin{cases} P(x,y)=e^x(1-\cos y) \\ Q(x,y)=-e^x(y-\sin y) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-e^x y$

Áp dụng công thức Green ta có :

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D -e^x ydxdy \\ &= \int_0^1 dx \int_x^{2-x} -e^x ydy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^x(4x-4)dx \\ &= 4-2e \end{aligned}$$

Ví dụ 2.03.13. Tính $\oint\limits_C \left(xy^4+x^2+y\cos xy\right)dx+\left(\dfrac{x^3}{3}+xy^2-x+x\cos xy\right)dy$

trong đó $C\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} (a>0)$



Lời giải :

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = 4xy^4 + x^2 + y\cos xy \\ Q(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1$

Áp dụng công thức Green ta có :

$$I = \iint_D x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1dxdy$$

$$= \iint_D x^2 + y^2 - 1dxdy$$

vì $\iint_D 4xy^3 dxdy = 0$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le ra$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r^2 - 1\right) rdr$$

$$= \pi\left(\frac{a^4}{2} - a^2\right)$$

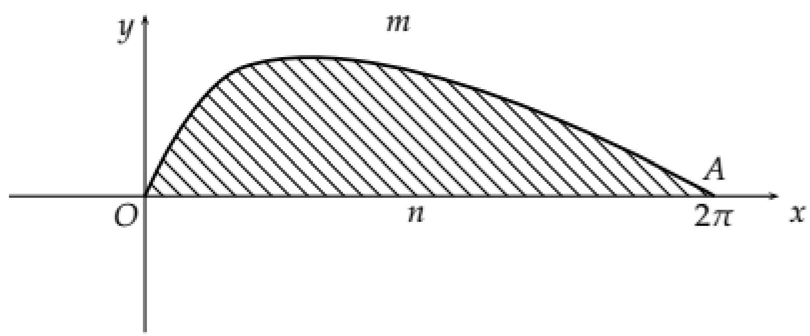
2.4. Ứng dụng của tích phân đường loại II

Áp dụng công thức Green cho hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ thỏa mãn $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ ta có :

$$S(D)=\iint_D 1dxdy=\iint_{\partial D} Pdx+Qdy$$

- Lấy $P(x,y)=0, Q(x,y)=x$ thì $S(D)=\int_{\partial D} xdy$
- Lấy $P(x,y)=-y, Q(x,y)=0$ thì $S(D)=\int_{\partial D} -ydx$
- Lấy $P(x,y)=\frac{1}{2}x, Q(x,y)=\frac{1}{2}y$ thì $S(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy-ydx$

Ví dụ 2.03.14. Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp xycloit $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ và $Ox\,(a>0)$



Lời giải :

Áp dụng công thức

$$S(D)=\int_{\partial D} xdy=\int_{AmO} xdy+\int_{OnA} xdy=\int_{2\pi}^{0} a(t-\sin t)a\sin tdt=3\pi a^2$$

2.5. Điều kiện để lấy tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân.

Giả sử rằng D là miền đơn liên, liên thông, P, Q cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên $\overline{D}$. Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương:

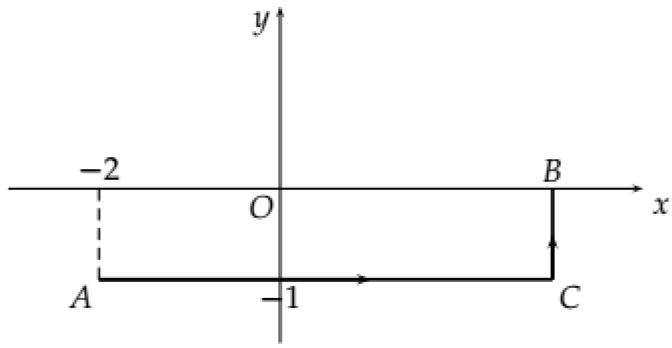
1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ với mọi $(x, y) \in D$
2. $\int\limits_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong đóng kín L nằm trong D.
3. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = 0$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B, với mọi đường cong AB nằm trong D
4. $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần. Nghĩa là có hàm số $u(x, y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$. Hàm u có thể được tìm theo công thức:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy$$

Giải bài toán tính tích phân đường không phụ thuộc đường đi:

1. Kiểm tra điều kiện $P'_y = Q'_x$ (1)
2. Nếu điều kiện (1) được thỏa mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì $I = 0$
3. Nếu điều kiện (1) được thỏa mãn và cần tính tích phân trên cung AB không đóng thì ta chọn đường tính tích phân sao cho việc tính tích phân là đơn giản nhất , thông thường ta chọn là đường thẳng nối A và B , hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục tọa độ. Mặt khác, nếu tìm được hàm F sao cho $du = Pdx + Qdy$ thì $I = u(B) - u(A)$.

Ví dụ 2.03.15. Tính $\int\limits_{(-2,1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$



Lời giải :

Nhận xét rằng $\left(x^4+4xy^3\right)'_y=\left(6x^2y^2-5y^4\right)'_x$ nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi. Vậy ta chọn đường đi là gấp khúc ACB như hình vẽ :

$$I=\int_{AC}Pdx+Qdy+\int_{CB}Pdx+Qdy=62$$

Chương 4:Tích phân mặt

§1. Tích phân mặt loại I

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác đính trên mặt cong S. Chia mặt cong S thành n mặt nhỏ $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trên mỗi ΔS_i lấy một điểm M_i bất kì. Giới hạn, nếu có , của tổng $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ khi $n \to \infty$ và $\max_{1\le i\le n} d(\Delta S_i) \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia mặt cong S và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân mặt loại I của hàm số $f(M)$ trên mặt cong S, kí hiệu là :

$$\iint_S f(x,y,z)dS$$

1.2 Các công thức tính tích phân mặt loại I

Giả sử S là mặt được cho bởi phương trình $z = z(x,y),((x,y) \in D \subset R^2)$ hay là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là D, ở đó $z(x,y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên D. Khi đó

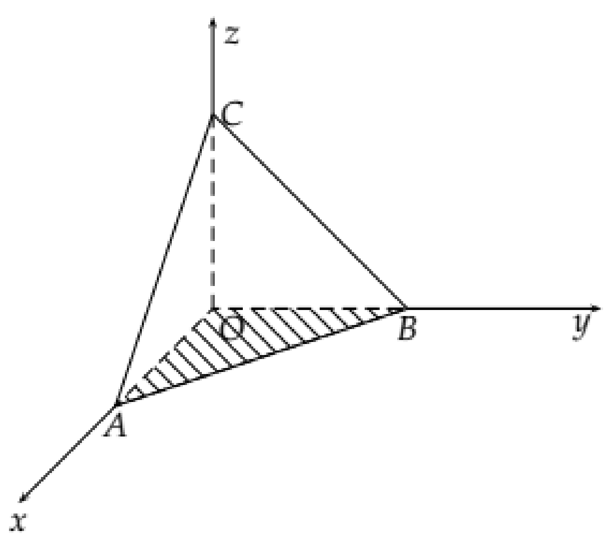
$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

<u>Ví dụ 2.04.1</u>.

Tính $\iint_S \left(z+2x+\frac{4y}{3}\right)dS$ trong đó

$S = \left\{(x,y,z)/\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$

Lời giải :



Ta có hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy là :

$$D=\left\{(x,y)/\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}=\left\{(x,y)/0\le x\le 2, 0\le y\le 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

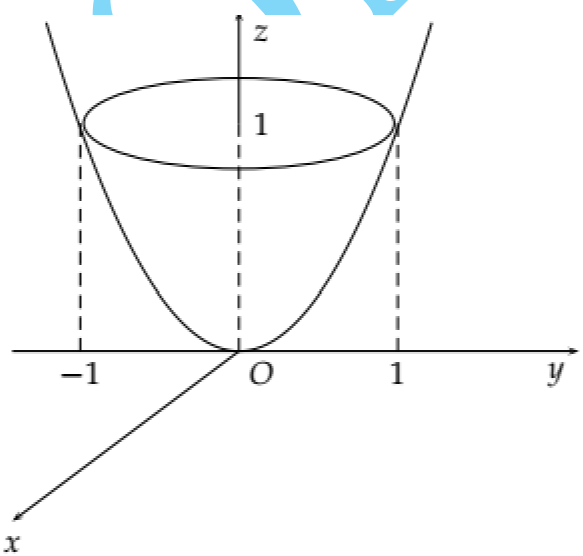
Mặt khác $z=4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}p=z_x^{'}=-2\\ q=z_y^{'}=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow dS=\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$

nên :

$$I=\iint_D\left[4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)+2x+\frac{4y}{3}\right]\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=4\frac{\sqrt{61}}{3}\int_0^2 dx\int_0^{3-\frac{3x}{2}}dy=4\sqrt{61}$$

<u>Ví dụ 2.04.2</u>. Tính $\iint_S\left(x^2+y^2\right)dS$ trong đó

$$S=\left\{(x,y,z)/z=z^2+y^2, 0\le z\le 1\right\}$$



Lời giải :

Ta có hình chiếu cảu mặt cong lên mặt phẳng Oxy là $D=\left\{(x,y)/x^2+y^2\le 1\right\}$

Mặt khác , $z = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} p = z'_x = 2x \\ q = z'_y = 2y \end{cases}$ nên

$$I = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\sqrt{1 + 4r^2}\,rdr = \frac{\pi}{4}\int_0^1 r^2\sqrt{1 + 4r^2}\,rdr$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_1^5 \frac{t-1}{4}\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{16}\left(\frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{15}\right)$$

§

2. Tích phân mặt loại II

2.1. Định hướng mặt cong

Cho mặt cong S trong không gian. Tại mỗi điểm M chính quy của mặt cong S có hai vectow pháp tuyến đơn vị là $\vec{n}$ và $-\vec{n}$.

- Nếu có thể chọn được tại mỗi điểm M của mặt một vecto pháp tuyến đơnv ị n sao cho vecto n biến thiên liên tục trên S thì ta nói mặt S định hướng được. Khi đó ta chọn một hướng làm hương dương thì hướng còn lại được gọi là hướng âm.
- Ngược lại, thì mặt S gọi là không định hướng được. Ví dụ như lá Mobius.

2.2. Định nghĩa tích phân mặt loại II

Cho một mặt cong định hướng S trong miền $V \subset R^3$ và $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là vecto pháp tuyến đơn vị theo hướng dương được chọn của S tại điểm $M(x,y,z)$. Giả trường vecto $\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ biến thiên liên tục trên V, nghĩa là các tọa độ $P(M), Q(M), R(M)$ của nó là những hàm số liên tục trên V. Chia mặt S thành n mặt cong nhỏ, gọi tên và cả diện tích của chúng lần lượt là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trên mỗi ΔS_i lấy một điểm M_i bất kì và gọi vecto pháp tuyến đơn vị theo hướng dương đã chọn của nó là $n_i = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$. Giới hạn, nếu có , của tổng $\sum\left[P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i\right]\Delta S_i$ được gọi là tích phân mặt loại II của các hàm số $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ trên mặt S, và được kí hiệu là :

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{dydz} + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

2.3. Các công thức tính tích phân mặt loại II

Giả sử :

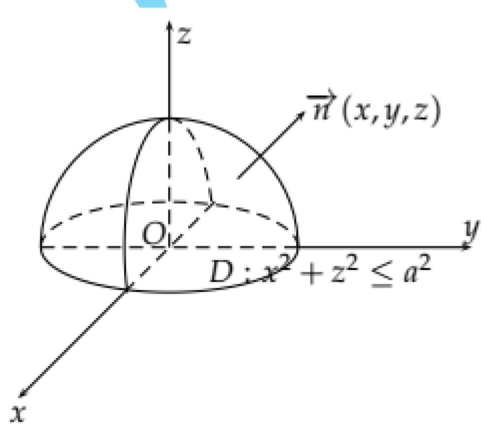
$$I = \iint_S Pdydz + \iint_S Qdzdx + \iint_S Rdxdy$$

Người ta tính tích phân mặt loại II bằng cách đưa về tích phân kép. Chẳng hạn xét tích phân I_3 . Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x, y), z(x, y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên miền D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy. Khi đó :

- Nếu vecto pháp tuyến đơn vị theo hướng dương $\vec{n}$ tạo với Oz một góc nhọn thì
$$\iint_S Rdxdy = \iint_D R(x, y, z(x, y))dxdy$$
- Nếu vecto pháp tuyến đơn vị theo hướng dương $\vec{n}$ tạo với Oz một góc tù thì
$$\iint_S Rdxdy = -\iint_D R(x, y, z(x, y))dxdy$$

Tương tự như vậy chúng ta có thể đưa I_1, I_2 về tích phân kép

<u>Ví dụ 2.04.3</u>. Tính $\iint_S z(x^2 + y^2)dxdy$ trong đó S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, hướng của S là phía ngoài mặt cầu



Lời giải :

Ta có mặt $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là miền

$D: x^2+y^2\le 1$, hơn nữa $\vec{n}$ tạo với Oz một góc nhọn nên:

$$I=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le 1$

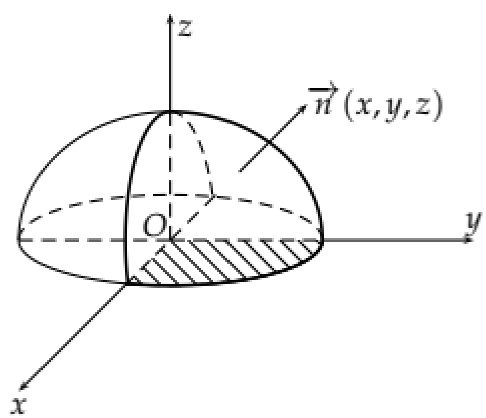
$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}r^3dr$$

$$=\frac{4\pi}{15}$$

<u>**Ví dụ 2.04.4**</u>. Tính $\iint_S z\left(x^2+y^2\right)dxdy$

trong đó S là nửa mặt cầu

$x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$, hướng của S là phía ngoài mặt cầu



Lời giải :

Tính $I_1=\iint_S ydxdz$

- Mặt $S: y=2\sqrt{1-x^2-z^2}$
- Hình chiếu của S lên Oxz là hình $\frac{1}{4}$ hình tròn ,

  $D_1: x^2+z^2\le 1, x\ge 0, z\ge 0$
- $\beta=\vec{n},Oy$ là góc nhọn.

nên:

$$I=\iint_{D_1} 2\sqrt{1-x^2-z^2}dxdz$$

đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 2\sqrt{1-r^2}\, r dr$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

Tính $I_2 = \iint\limits_S z^2 dxdy$

- Mặt $S: z^2 = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}$
- Hình chiếu của S lên Oxz là $\dfrac{1}{4}$ elip, $D_2: x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1, x \ge 0, y \ge 0$
- $\gamma = \overrightarrow{n}, Oz$ là góc nhọn.

nên :

$$I = \iint\limits_{D_2} 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} dxdy$$

đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1, J = -2r$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left(1 - r^2\right) 2r dr$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

2.4. Công thức Ostrogradsky, Stokes

Giả sử P, Q, R là các hàm khả vi , liên tục trên miền bị chặn, đo được trong $V \subset R^3$. V giới hạn bởi mặt cong kín S trơn hay trơn từng mảnh khi đó :

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

trong đó tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến ngoài.

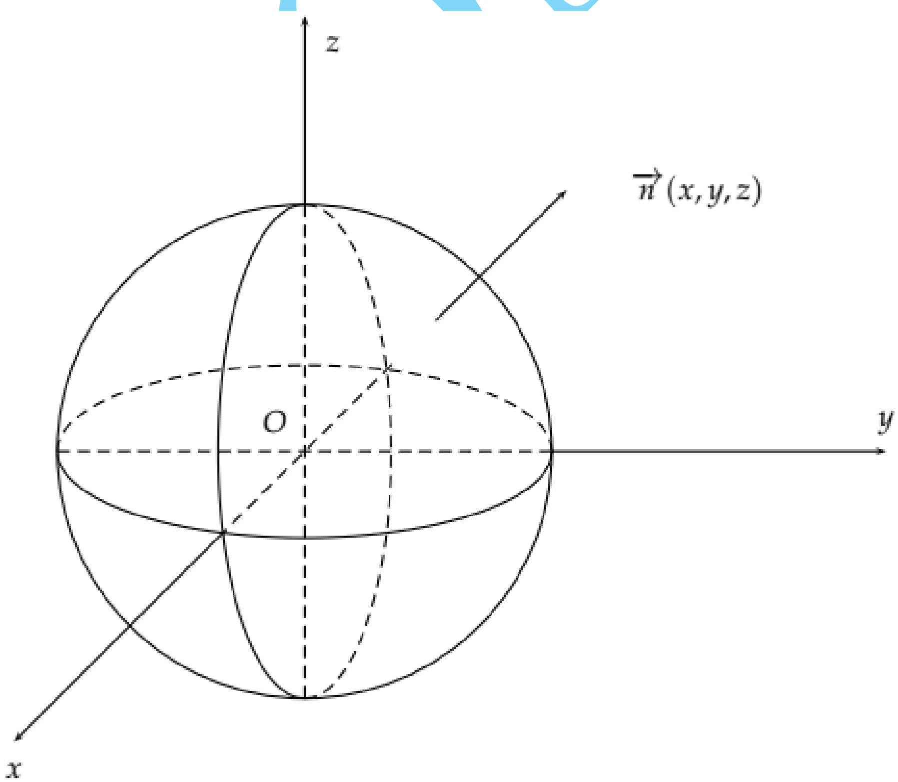
Chú ý

- Nếu tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến trong thì

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

- Nếu mặt cong S không kín, có thể bổ sung thành mặt cong S' kín để áp dụng công thức Ostrogradsky, rồi trừ đi phần bổ sung.

<u>Ví dụ 2.04.6</u>. Tính $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ trong đó S phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



Lời giải :

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V 3dxdydz = 3V = 4\pi a^2$$

<u>Ví dụ 2.04.7</u>. Tính $\iint_S x^3 \mathrm{dydz} + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ trong đso S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Lời giải :

Xem hình vẽ 5.6 , áp dụng công thức Ostrogradsky ta có :

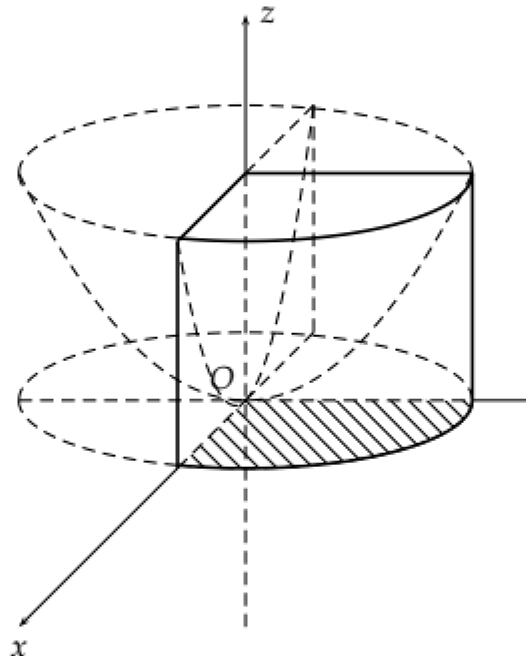
$$I = \iiint_V 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$$

đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \quad , J = -r^2 \sin\theta \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} r^4 \sin\theta dr$$

$$= \frac{12\pi R^5}{5}$$

<u>Ví dụ 2.04.8</u>. Tính $\iint_S y^2 zdxdy + xzdydz + x^2 ydxdz$ trong đó S là phía ngoài của miền $x \le 0, y \le 0, x^2 + y^2 \le 1, z \le x^2 + y^2$



Lời giải :

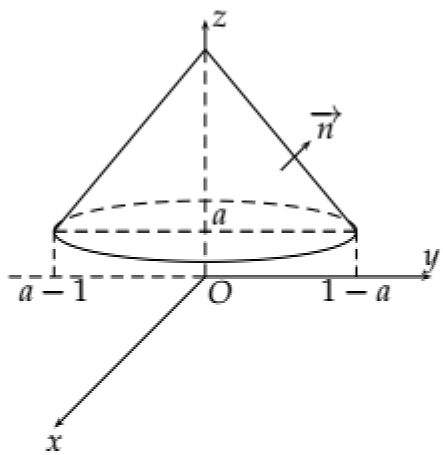
Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có :

$$I = \iiint\limits_V \left(y^2 + z + x^2\right)dxdydz$$

đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le r^2 \end{cases}, J = -r$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{r^2} \left(r^2 + z\right)rdr$$

<u>Ví dụ 2.04.9</u>. Tính $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ trong đó S là phía ngoài của miền $(z-1)^2 \le x^2 + y^2, a \le z \le 1, a > 0$



Lời giải :

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có :

$$I = \iiint_V 3dxdydz = 3V = 3\frac{1}{3}Bh = \pi(1-a)^3$$

2.5. Công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II.

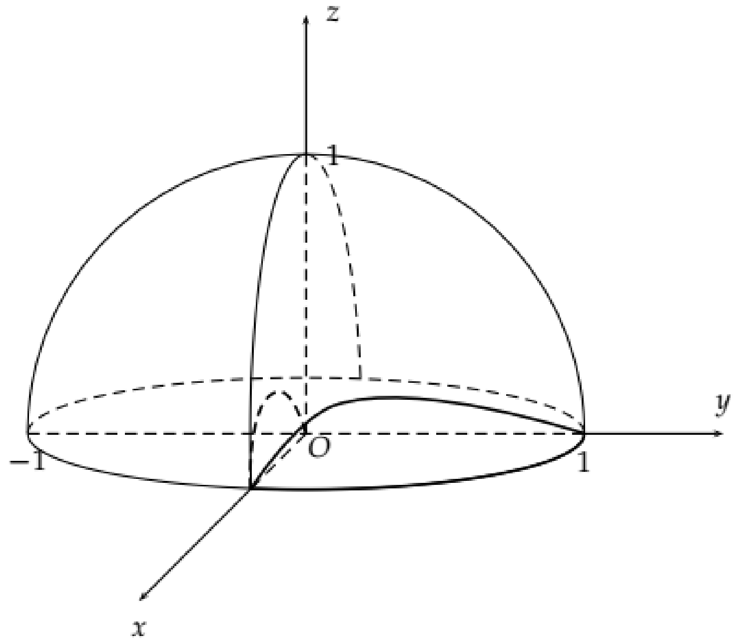
$$\iint_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]dS$$

$$= \iint_S P(x,y,z)\mathrm{dydz} + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là cosin chỉ phương của vecto pháp tuyến đơn vị của mặt S.

<u>**Ví dụ 2.04.10**</u>. Gọi S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm trong mặt trụ $x^2 + x + z^2 = 0, y \ge 0$, hướng S phía ngoài. Chứng minh rằng

$$\iint_S (x-y)dxdy + (y-z)\mathrm{dydz} + (z-x)dxdz = 0$$



Lời giải :

Ta có : $y=\sqrt{1-x^2-y^2}$ nên vecto pháp tuyến của S là $\vec{n}=\pm\left(-y'_x,1,-y'_z\right)$. Vì $\left(\vec{n},Oy\right)<\dfrac{\pi}{2}$ nên

$$\vec{n}=\left(-y'_x,1,-y'_z\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}},1,\frac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\right)$$

Do đó $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{\dfrac{x^2}{1-x^2-z^2}+1+\dfrac{z^2}{1-x^2-z^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}}$. vậy

$$\begin{cases}\cos\alpha=\cos\left(\vec{n},Ox\right)=\dfrac{n_1}{\left|\vec{n}\right|}=x\\[2ex] \cos\beta=\cos\left(\vec{n},Oy\right)=\dfrac{n_2}{\left|\vec{n}\right|}=y\\[2ex] \cos\gamma=\cos\left(\vec{n},Oz\right)=\dfrac{n_3}{\left|\vec{n}\right|}=x\end{cases}$$

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và II ta có ;

$$I = \iint_S \left[(x-y)\cos\gamma + (y-z)\cos\beta + (z-x)\cos\alpha \right] dS$$

$$= \iint_S (x-y)z + (y-z)x + (z-x)y dS$$

$$= 0$$

Chương 5: Lý thuyết trường

§1. Trường vô hướng

1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 6.3. Cho Ω là một tập con mở của R^3 (hoặc R^2) . Một hàm số

$$u:\Omega \to R$$
$$(x,y,z) \to u = u(x,y,z)$$

được gọi là một trường vô hướng xác định trên Ω.

Cho $c \in R$, khi đó mặt $S = \{(x,y,z) \in \Omega / u(x,y,z) = c\}$ được gọi là mặt mức ứng với giá trị c (đẳng trị).

1.2. Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa 6.4 . Cho $u = u(x,y,z)$ là một trường vô hướng xác định trên Ω và $M_0 \in \Omega$. Với $\vec{l}$ là một vecto khác không bất kì và $M(x,y,z)$ sao cho M_0M cùng phương với $\vec{l}$, đặt

$$\rho = \begin{cases} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \\ -\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \end{cases}$$

giới hạn (nếu có) của tỉ số $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\Delta u}{\rho}$ được gọi là đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ tại M_0 của trường vô hướng u và được kí hiệu là $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$

Chú ý:

- Giới hạn trong công thức trên có thể được thay bằng

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\vec{l}$

- Nếu $\vec{l} \uparrow\uparrow Ox$ thì $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)$
- Đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ tại điểm M_0 của trường vô hướng u thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại M_0 theo hướng $\vec{l}$.

Định lý 6.16. Nếu $u = u(x,y,z)$ khả vi tại $M(x_0,y_0,z_0)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l} \neq 0$ tại M_0 và

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0).\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0).\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\vec{l}$.

1.3. Gradient

Định nghĩa 6.5. Cho $u(x,y,z)$ là trường vô hướng có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Người ta gọi gradient của u tại M_0 là vecto

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right)$$

và được kí hiệu là $\overrightarrow{gradu}(M_0)$.

Định lý 6.17. Nếu trường vô hướng $u(x,y,z)$ khả vi tại M_0 thì tịa đó ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{gradu}.\vec{l}$$

Chú ý : $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại M_0 theo hướng $\vec{l}$. Từ công thức

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{gradu}\left|\vec{l}.\cos\left(\overrightarrow{gradu}, \vec{l}\right)\right|$$

ta có $\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{gradu}\right|\left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{gradu}$. Cụ thể :

- Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{gradu}$.
- Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{gradu}$.

<u>Ví dụ 2.05.1</u>. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ của

$$u = x^3 + 2y^3 - 3z^3 \text{ tại } A(2,0,1), \vec{l} = \overrightarrow{AB}, B(1,2,-1)$$

Lời giải :

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-1,2,-2)$ nên

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-1}{3}, \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 12$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{2}{3}, \frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 0$$

$$\cos\gamma = \frac{-2}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-2}{3}, \frac{\partial u}{\partial z} = -9z^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = -9$$

Áp dụng công thức 6.2 ta có :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(A) = 12.\frac{-1}{3} + 0.\frac{2}{3} + (-9)\frac{-2}{3} = 2$$

<u>Ví dụ 2.05.2</u>. Tính mondun của $\overrightarrow{gradu}$ với $u = x^3 + y^3 + z^3$ tại $A(2,1,1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{gradu} \perp Oz$, khi nào $\overrightarrow{gradu} = 0$

Lời giải :

Ta có :

$$\overrightarrow{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3zx, 3z^2 - 3xy\right)$$

nên $\overrightarrow{gradu} = (9,-3,-3)$ và

- $\overrightarrow{gradu} \perp Oz \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{gradu}, \vec{k}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow z^2 = xy$

- $\overrightarrow{gradu} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = zx \\ z^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$

<u>Ví dụ 2.05.3</u>. Tính $\overrightarrow{gradu}$ với $u = r^2 + \dfrac{1}{r} + \ln r$ và $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

<u>Ví dụ 2.05.4</u>. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x\sin z - y\cos z$ từ gốc tọa độ $O(0,0)$ là lớn nhất ?

Lời giải :

Từ công thức $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O) = \overrightarrow{gradu}.\vec{l} = \left|\overrightarrow{gradu}\right|\left|\vec{l}\right|.\cos\left(\overrightarrow{gradu}, \vec{l}\right)$ ta có $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{gradu}\right|\left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{gradu}(O) = (0,-1,0)$

<u>Ví dụ 2.05.5</u>. Tính góc giữa hai vecto $\overrightarrow{gradz}$ của hàm

$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $M(3,4)$

Lời giải :

Ta có ;

- $\overrightarrow{gradz_1} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ nên $\overrightarrow{gradz_1}(M) = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

- $\overrightarrow{grad}z_2 = \left(1+\dfrac{\sqrt{3y}}{2\sqrt{x}}, -3+\dfrac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{y}}\right)$ nên $\overrightarrow{grad}z_2(M) = \left(2, \dfrac{-9}{4}\right)$

Vậy $$\cos\alpha = \frac{\left(\overrightarrow{grad}z_1, \overrightarrow{grad}z_2\right)}{\left|\overrightarrow{grad}z_1\right|\left|\overrightarrow{grad}z_2\right|} = \frac{-12}{5\sqrt{145}}$$

§2. Trường vecto

2.1 Định nghĩa

Cho Ω là một miền mở trong R^3 . Một hàm vecto

$$\vec{F}:\Omega \to R^3$$
$$M \to \vec{F} = \vec{F}(M)$$

trong đó :

$$\vec{F} = Fx(M)\vec{i} + Fy(M)\vec{j} + F_2(M)\vec{k}$$

2.2. Thông lượng, dive, trường ống.

a. Thông lượng: Cho S là một mặt định hướng và $\vec{F}$ là một trường vecto. Đại lượng

$$\phi = \iint Fxdydz + Fydzdx + F2dxdy$$

được gọi là thông lượng của $\vec{F}$ đi qua mặt cong S.

b. Dive : Cho $\vec{F}$ là một trường vecto có thành phần F_x, F_y, F_z là các hàm số có đạo hàm riêng cấp một thì tổng $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ được gọi là dive của trường vecto $\vec{F}$ và kí hiệu là div $\vec{F}$.

c. Trường vecto $\vec{F}$ xác định trên Ω được gọi là một trường ống nếu div $\vec{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.

Tính chất : Nếu $\vec{F}$ là một trường ống thì thông lượng đi vào bằng thông lượng đi ra.

2.3. Hoàn lưu, vecto xoáy.

a. Hoàn lưu: Cho $\mathcal{C}$ là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian. Đại lượng

$$\int_C Fxdx + Fydy + Fzdz$$

được gọi là hoàn lưu của $\vec{F}$ dọc theo đường cong $\mathscr{C}$

b. Vecto xoáy : Vecto

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} : \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$ được gọi là

vecto xoáy (hay vecto rota) của trường vecto $\vec{F}$.

2.4 Trường thế - hàm thế vị

Trường vecto $\vec{F}$ được goi là trường thế (trên Ω) nếu tồn tịa trường vô hướng u sao cho $\overrightarrow{gradu} = \vec{F}$. Khi đó hàm y được gọi là hàm thế vị.

Định lý 6.18. Điều kiện cần và đủ để trường vecto $\vec{F} = \vec{F}(M)$ là một trường thế là $\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$ với mọi $M \in \Omega$.

Chú ý : Nếu $\vec{F}$ là trường thế thì hàm thế vị u được tính theo công thức

$$u = \int_{x_0}^{x} Fx(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} F_y(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} Fz(x, y, z)dz + C$$

<u>Ví dụ 2.05.6</u>. Trong các trường sau, trường nào là trường thế ?

a. $\vec{a} = 5(x^2 - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + \vec{k}$

b. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$

c. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$

Lời giải :

a. Ta có :

$$\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) = (0,0,6x-20y) \neq 0$$

nên $\vec{a}$ không phải là trường thế.

b. Ngoài cách tính $\overrightarrow{rot}\vec{a}$, sinh viên có thể dễ dàng nhận thấy tồn tại hàm thế vị $u = xyz$ nên $\vec{a}$ là hàm thế.

c. Ta có

$$\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) = (0,0,0)$$

nên $\vec{a}$ là trường thế.

<u>**Ví dụ 2.05.7**</u>. Cho $\vec{F} = xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} + zy^2\vec{k}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2=1$ hướng ra ngoài.

Lời giải :

Theo công thức tính thông lượng 6.3 ta có :

$$\phi = \iint_S xz^2 dydz + yx^2 dxdz + zy^2 dxdy$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có :

$$\phi = \iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$$

Thực hiện phép đổi biến trong tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$

Ta có :

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 r^2 \sin\theta dr = \frac{4\pi}{5}$$

Ví dụ 2.05.8. Cho $\vec{F} = x(y+z)\vec{i} + y(x+z)\vec{j} + z(x+y)\vec{k}$ và L là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 + y = 0$ và nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$. Chứng minh rằng lưu số của $\vec{F}$ dọc theo L bằng 0

Lời giải :

Theo công thức tính lưu số 6.4

$$I = \oint_L x(y+z)dx + y(z+x)dy + z(x+y)dz$$

Áp dụng công thức Stokes ta có :

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} \mathrm{dydz} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix} dzdx + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy$$

$$= \iint_S (z-y)\mathrm{dydz} + (x-z)dzdx + (y-x)dxdy$$

$$= 0$$