Chương 1: Hàm số một biến số

Trần Minh Toàn [1]

Viện Toán ứng dụng và Tin học, ĐHBK Hà Nội

Hà Nội, tháng 8 năm 2013

[1] Email: toantm24@gmail.com

Nội dung

Khái niệm hàm số một biến số

Các ký hiệu logic

- Mệnh đề toán học là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai, không có mệnh đề vừa đúng vừa sai. Một mệnh đề thường ký hiệu bởi các chữ cái in hoa như $A, B, C, \ldots$.
- Giả sử có hai mệnh đề A và B. Ký hiệu
  - $A \Longrightarrow B$: từ mệnh đề A suy ra mệnh đề B, hay B là điều kiện cần để có A và A là điều kiện đủ để có B.
  - $A \Longleftrightarrow B$: mệnh đề A tương đương với mệnh đề B, hay A là điều kiện cần và đủ để có B và ngược lại.
- Ký hiệu $:=$ (có nghĩa là, hay được định nghĩa là).

$\forall x$ đọc là với mọi x, $\exists y$ đọc là tồn tại y,

$\nexists y$ đọc là không tồn tại y.

Khái niệm hàm số một biến số

Các ký hiệu logic

- Mệnh đề toán học là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai, không có mệnh đề vừa đúng vừa sai. Một mệnh đề thường ký hiệu bởi các chữ cái in hoa như $A, B, C, \ldots$.
- Giả sử có hai mệnh đề A và B. Ký hiệu
  - $A \Longrightarrow B$: từ mệnh đề A suy ra mệnh đề B, hay B là điều kiện cần để có A và A là điều kiện đủ để có B.
  - $A \Longleftrightarrow B$: mệnh đề A tương đương với mệnh đề B, hay A là điều kiện cần và đủ để có B và ngược lại.
- Ký hiệu $:=$ (có nghĩa là, hay được định nghĩa là).

$$\forall x \text{ đọc là với mọi } x, \quad \exists y \text{ đọc là tồn tại } y,$$

$$\nexists y \text{ đọc là không tồn tại } y.$$

Khái niệm hàm số một biến số

Các ký hiệu logic

- Mệnh đề toán học là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai, không có mệnh đề vừa đúng vừa sai. Một mệnh đề thường ký hiệu bởi các chữ cái in hoa như $A, B, C, \ldots$.
- Giả sử có hai mệnh đề A và B. Ký hiệu
  - $A \Longrightarrow B$: từ mệnh đề A suy ra mệnh đề B, hay B là điều kiện cần để có A và A là điều kiện đủ để có B.
  - $A \Longleftrightarrow B$: mệnh đề A tương đương với mệnh đề B, hay A là điều kiện cần và đủ để có B và ngược lại.
- Ký hiệu $:=$ (có nghĩa là, hay được định nghĩa là).

$$\forall x \text{ đọc là với mọi } x, \quad \exists y \text{ đọc là tồn tại } y,$$

$$\nexists y \text{ đọc là không tồn tại } y.$$

Khái niệm hàm số một biến số

Các ký hiệu logic

- Mệnh đề toán học là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai, không có mệnh đề vừa đúng vừa sai. Một mệnh đề thường ký hiệu bởi các chữ cái in hoa như $A, B, C, \ldots$.
- Giả sử có hai mệnh đề A và B. Ký hiệu
  - $A \Longrightarrow B$: từ mệnh đề A suy ra mệnh đề B, hay B là điều kiện cần để có A và A là điều kiện đủ để có B.
  - $A \Longleftrightarrow B$: mệnh đề A tương đương với mệnh đề B, hay A là điều kiện cần và đủ để có B và ngược lại.
- Ký hiệu $:=$ (có nghĩa là, hay được định nghĩa là).

$$\forall x \text{ đọc là với mọi } x, \quad \exists y \text{ đọc là tồn tại } y,$$

$$\nexists y \text{ đọc là không tồn tại } y.$$

Khái niệm hàm số một biến số

Các ký hiệu logic

- Mệnh đề toán học là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai, không có mệnh đề vừa đúng vừa sai. Một mệnh đề thường ký hiệu bởi các chữ cái in hoa như $A, B, C, \ldots$.
- Giả sử có hai mệnh đề A và B. Ký hiệu
  - $A \Longrightarrow B$: từ mệnh đề A suy ra mệnh đề B, hay B là điều kiện cần để có A và A là điều kiện đủ để có B.
  - $A \Longleftrightarrow B$: mệnh đề A tương đương với mệnh đề B, hay A là điều kiện cần và đủ để có B và ngược lại.
- Ký hiệu $:=$ (có nghĩa là, hay được định nghĩa là).

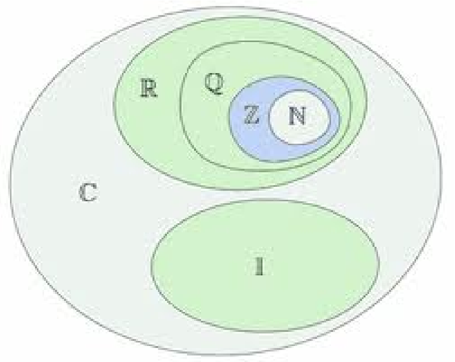
$\forall x$ đọc là với mọi x, $\exists y$ đọc là tồn tại y,

$\nexists y$ đọc là không tồn tại y.

Khái niệm hàm số một biến số

Số thực, trị tuyệt đối của số thực

Số thực bao gồm tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ, ký hiệu là $\mathbb{R}$.

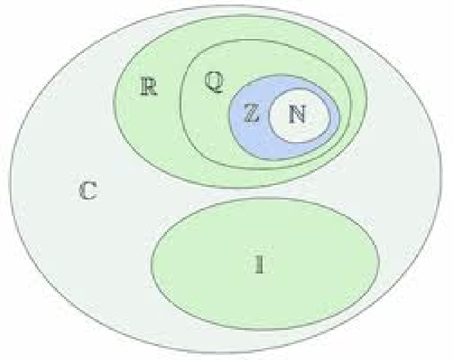


- Khoảng $(a, b) := a < x < b$;
- Đoạn $[a, b] := a \leq x \leq b$;
- Khoảng kín bên phải $(a, b] := a < x \leq b$;
- Khoảng kín bên trái $[a, b) := a \leq x < b$;
- Khoảng vô hạn $\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty) := -\infty < x < +\infty$.

Khái niệm hàm số một biến số

Số thực, trị tuyệt đối của số thực

Số thực bao gồm tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ, ký hiệu là $\mathbb{R}$.

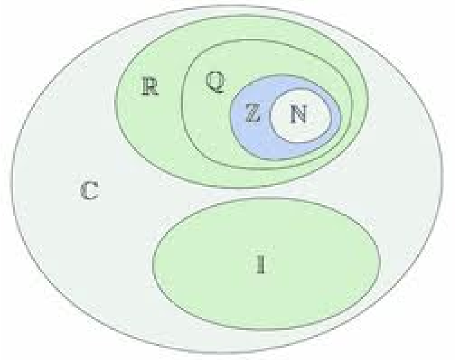


- Khoảng $(a, b) := a < x < b$;
- Đoạn $[a, b] := a \leq x \leq b$;
- Khoảng kín bên phải $(a, b] := a < x \leq b$;
- Khoảng kín bên trái $[a, b) := a \leq x < b$;
- Khoảng vô hạn $\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty) := -\infty < x < +\infty$.

Khái niệm hàm số một biến số

Số thực, trị tuyệt đối của số thực

Số thực bao gồm tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ, ký hiệu là $\mathbb{R}$.

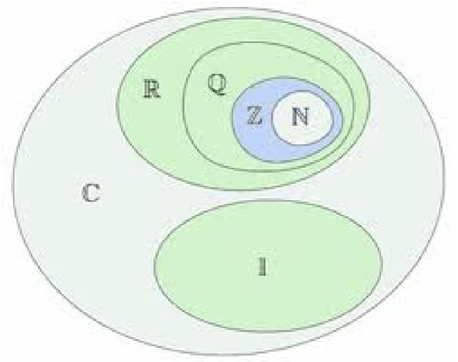


- Khoảng $(a, b) := a < x < b$;
- Đoạn $[a, b] := a \leq x \leq b$;
- Khoảng kín bên phải $(a, b] := a < x \leq b$;
- Khoảng kín bên trái $[a, b) := a \leq x < b$;
- Khoảng vô hạn $\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty) := -\infty < x < +\infty$.

Khái niệm hàm số một biến số

Số thực, trị tuyệt đối của số thực

Số thực bao gồm tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ, ký hiệu là $\mathbb{R}$.

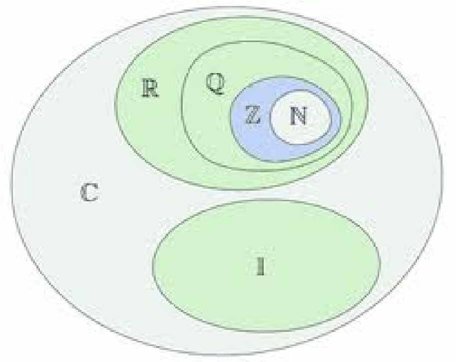


- Khoảng $(a, b) := a < x < b$;
- Đoạn $[a, b] := a \leq x \leq b$;
- Khoảng kín bên phải $(a, b] := a < x \leq b$;
- Khoảng kín bên trái $[a, b) := a \leq x < b$;
- Khoảng vô hạn $\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty) := -\infty < x < +\infty$.

Khái niệm hàm số một biến số

Số thực, trị tuyệt đối của số thực

Số thực bao gồm tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ, ký hiệu là $\mathbb{R}$.



- Khoảng $(a, b) := a < x < b$;
- Đoạn $[a, b] := a \leq x \leq b$;
- Khoảng kín bên phải $(a, b] := a < x \leq b$;
- Khoảng kín bên trái $[a, b) := a \leq x < b$;
- Khoảng vô hạn $\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty) := -\infty < x < +\infty$.

Khái niệm hàm số một biến số

Số thực, trị tuyệt đối của số thực

Định nghĩa 1.1

Trị tuyệt đối của số thực $x \in \mathbb{R}$, ký hiệu là $|x|$, là số không âm được xác định như sau

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}.$$

Các tính chất

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta đều có

- $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$;
- $|xy| = |x| \, . \, |y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$;
- $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$; $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|x| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$;
- $|x| > \alpha \Longleftrightarrow x < -\alpha$ hoặc $x > \alpha$.

Khái niệm hàm số một biến số

Số thực, trị tuyệt đối của số thực

Định nghĩa 1.1

Trị tuyệt đối của số thực $x \in \mathbb{R}$, ký hiệu là $|x|$, là số không âm được xác định như sau

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}.$$

Các tính chất

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta đều có

- $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$;
- $|xy| = |x| . |y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$;
- $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$; $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|x| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$;
- $|x| > \alpha \Longleftrightarrow x < -\alpha$ hoặc $x > \alpha$.

Khái niệm hàm số một biến số

Khái niệm hàm số

Định nghĩa 1.2

Xét hai tập hợp số thực X và Y, ($X \neq \emptyset$). Ánh xạ $f : X \to Y$ là hàm số một biến xác định trên tập hợp X (x là biến số độc lập, $y = f(x)$ là biến số phụ thuộc), nhận giá trị trên tập hợp Y.
Tập hợp X được gọi là miền xác định (MXĐ) của hàm số $y = f(x)$.
Tập hợp

$$f(X) = \{y \in \mathbb{R} |\ \ y = f(x), \forall x \in X\}$$

gọi là miền giá trị (MGT) của hàm số f.

Có thể có nhiều cách biểu diễn một hàm số, ví dụ: bằng lời, bằng bảng các giá trị, bằng đồ thị và bằng công thức đại số. Tuy nhiên cách đơn giản nhất để có thể hình dung một hàm số đó là thông qua việc vẽ đồ thị của nó.

Khái niệm hàm số một biến số

Khái niệm hàm số

Định nghĩa 1.2

Xét hai tập hợp số thực X và Y, $(X \neq \emptyset)$. Ánh xạ $f : X \to Y$ là hàm số một biến xác định trên tập hợp X (x là biến số độc lập, $y = f(x)$ là biến số phụ thuộc), nhận giá trị trên tập hợp Y.
Tập hợp X được gọi là miền xác định (MXĐ) của hàm số $y = f(x)$.
Tập hợp

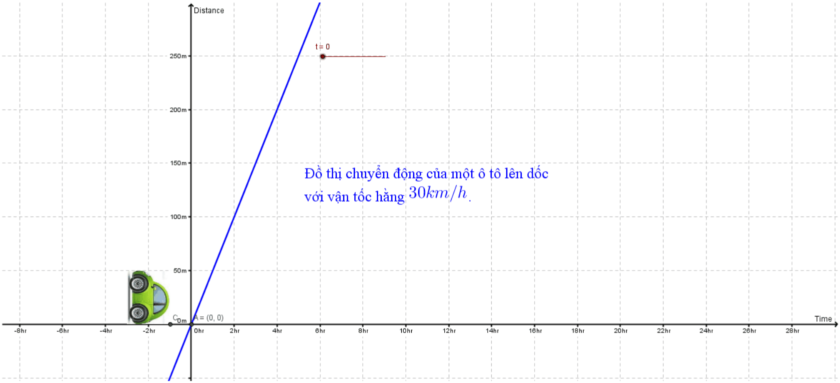
$$f(X) = \{y \in \mathbb{R}| \ \ y = f(x), \forall x \in X\}$$

gọi là miền giá trị (MGT) của hàm số f.

Có thể có nhiều cách biểu diễn một hàm số, ví dụ: bằng lời, bằng bảng các giá trị, bằng đồ thị và bằng công thức đại số. Tuy nhiên cách đơn giản nhất để có thể hình dung một hàm số đó là thông qua việc vẽ đồ thị của nó.

Khái niệm hàm số một biến số

Khái niệm hàm số



Khái niệm hàm số một biến số

Khái niệm hàm số

- Hàm số xác định trong khoảng $(-a, a)$ gọi là hàm số chẵn nếu $f(-x) = f(x)$, còn nếu $f(-x) = -f(x)$ thì gọi là hàm số lẻ trong khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ gọi là hàm tuần hoàn, nếu tồn tại số thực $T \neq 0$ sao cho

$$f(x+T) = f(x), \forall x, x+T \in \text{MXĐ}. \quad (*)$$

Số $T > 0$ nhỏ nhất để $(*)$ thỏa mãn gọi là chu kỳ của hàm số. Trong phạm vi chương trình chủ yếu là xem có số $T > 0$ thoả mãn $(*)$ mà không đi sâu vào việc tìm chu kỳ.
Về mặt đồ thị: hàm số chẵn, đồ thị đối xứng qua trục tung $(0y)$; hàm số lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ $O(0, 0)$. Hàm số tuần hoàn có đồ thị lặp lại sau mỗi chu kỳ T.

Khái niệm hàm số một biến số

Khái niệm hàm số

- Hàm số xác định trong khoảng $(-a, a)$ gọi là hàm số chẵn nếu $f(-x) = f(x)$, còn nếu $f(-x) = -f(x)$ thì gọi là hàm số lẻ trong khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ gọi là hàm tuần hoàn, nếu tồn tại số thực $T \neq 0$ sao cho

$$f(x+T) = f(x), \forall x, x+T \in \text{MXĐ}. \quad (*)$$

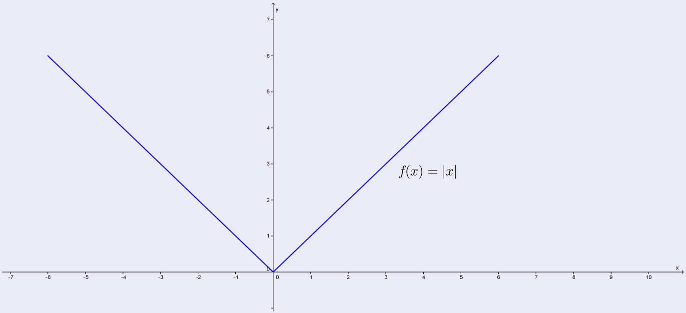
Số $T > 0$ nhỏ nhất để $(*)$ thỏa mãn gọi là chu kỳ của hàm số. Trong phạm vi chương trình chủ yếu là xem có số $T > 0$ thoả mãn $(*)$ mà không đi sâu vào việc tìm chu kỳ.
Về mặt đồ thị: hàm số chẵn, đồ thị đối xứng qua trục tung $(0y)$; hàm số lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ $O(0,0)$. Hàm số tuần hoàn có đồ thị lặp lại sau mỗi chu kỳ T.

Khái niệm hàm số một biến số

Khái niệm hàm số

Ví dụ 1.1

Đồ thị hàm $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

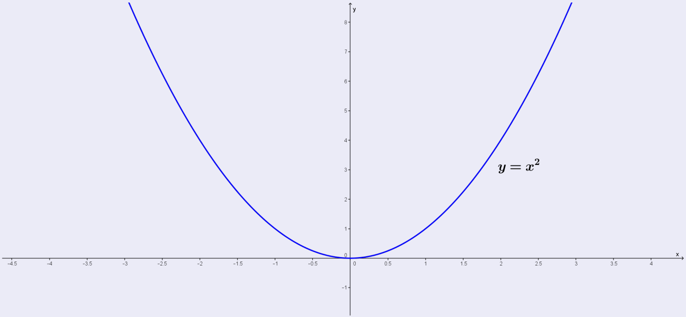


Khái niệm hàm số một biến số

Khái niệm hàm số

Ví dụ 1.2

Đồ thị hàm $f(x) = x^2$

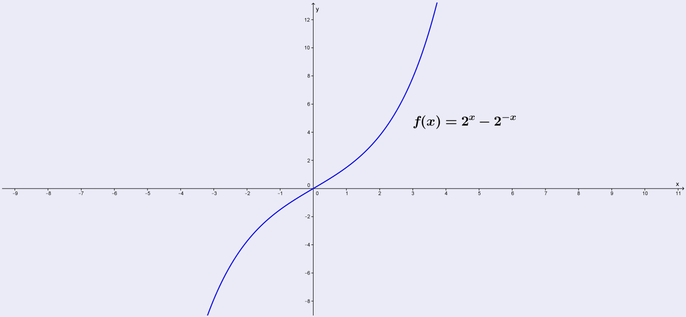


Khái niệm hàm số một biến số

Khái niệm hàm số

Ví dụ 1.3

Đồ thị hàm $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

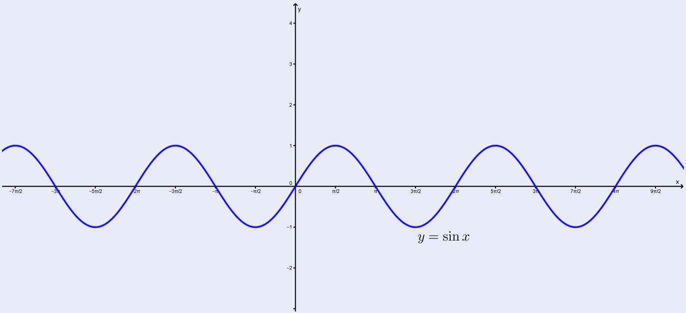


Khái niệm hàm số một biến số

Khái niệm hàm số

Ví dụ 1.4

Đồ thị hàm $f(x) = \sin x$.



Khái niệm hàm số một biến số

Hàm số hợp, hàm số ngược

Định nghĩa 1.3

Giả sử $y = f(u)$ là hàm số của biến số u, đồng thời $u = g(x)$ là hàm số của biến số x. Khi đó hàm số $y = f(u) = f[g(x)]$ là hàm hợp của biến số độc lập x thông qua biến số trung gian u; ký hiệu $(f \circ g)\, x = f[g(x)]$.

Ví dụ 1.5

Cho các hàm $f : x \longmapsto 2^x$; $\quad g : x \longmapsto x^2$. Khi đó

$$\begin{aligned} (f \circ g)\, x &= f[g(x)] = f\left(x^2\right) = 2^{x^2} \\ (g \circ f)\, x &= g[f(x)] = g\left(2^x\right) = 2^{2x}. \end{aligned}$$

Khái niệm hàm số một biến số

Hàm số hợp, hàm số ngược

Định nghĩa 1.4

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số xác định, đơn điệu trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ (f là song ánh từ $X \to Y$). Như vậy mỗi $x \in X$ cho ta một và chỉ một phần tử $y \in Y$ và ngược lại mỗi $y \in Y$ cho ta một phần tử $x \in X$, phần tử x được xác định như vậy gọi là hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$, ký hiệu $x = f^{-1}(y)$.
Vậy từ

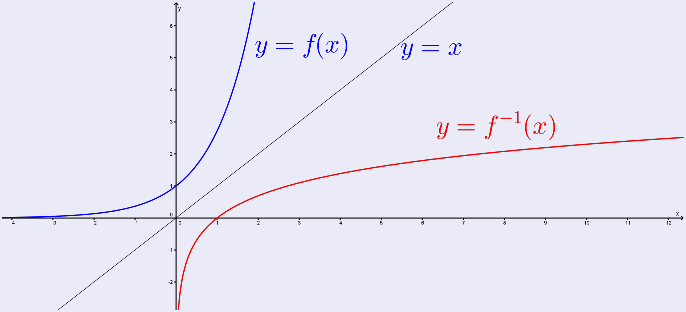
$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad (*)$$

(với điều kiện f là song ánh từ $X \to Y$).
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ không thay đổi (cùng chung một đồ thị). Thông thường ta vẫn gọi y là hàm số, x là đối số, trong (*) đổi vai trò của x và y ta được $y = f^{-1}(x)$ cũng gọi là hàm ngược của hàm số $y = f(x)$; nhưng đồ thị của $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất $(y = x)$.

Khái niệm hàm số một biến số

Hàm số hợp, hàm số ngược

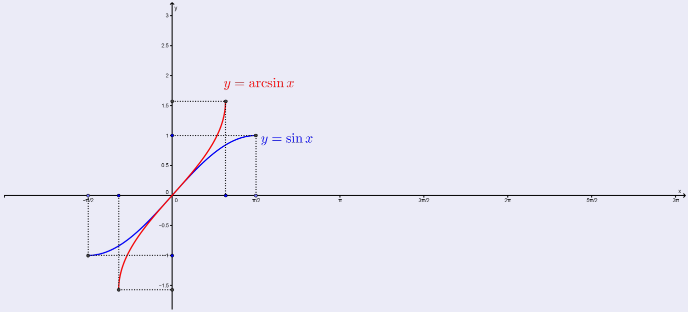
Ví dụ 1.6



Khái niệm hàm số một biến số

Các hàm lượng giác ngược

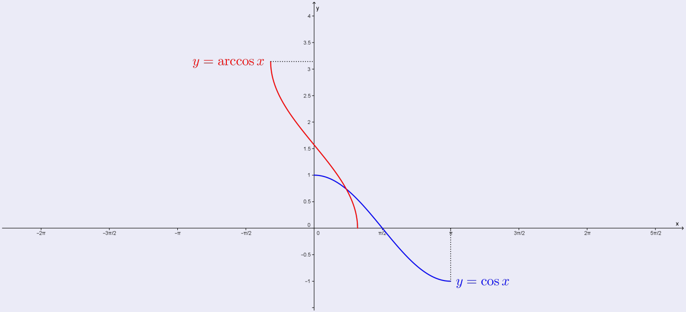
Hàm $y = \arcsin x : \quad [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **là hàm ngược của hàm** $y = \sin x$



Khái niệm hàm số một biến số

Các hàm lượng giác ngược

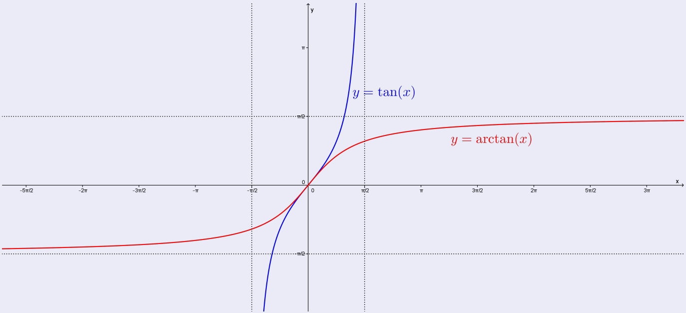
Hàm $y = \arccos x : \quad [-1, 1] \to [0, \pi]$ **là hàm ngược của hàm** $y = \cos x$



Khái niệm hàm số một biến số

Các hàm lượng giác ngược

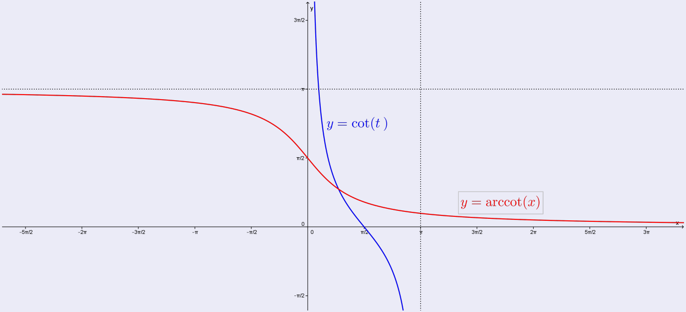
Hàm $y = \arctan x : \quad (-\infty, \infty) \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **là hàm ngược của hàm** $y = \tan x$



Khái niệm hàm số một biến số

Các hàm lượng giác ngược

Hàm $y = \operatorname{arccot} x : \quad (-\infty, \infty) \to [0, \pi]$ **là hàm ngược của hàm** $y = \cot x$



Khái niệm hàm số một biến số

Hàm số sơ cấp

Định nghĩa 1.5

Các hàm số sau đây được gọi là các "hàm số sơ cấp cơ bản":

$$x^\alpha; \quad a^x \ (a > 0, a \neq 1)\,; \quad \log_a x; \ (x > 0)$$

các hàm lượng giác và các hàm lượng giác ngược.

Hàm số sơ cấp là những hàm được tạo nên từ các hàm sơ cấp cơ bản bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

Ví dụ 1.7

Các hàm số $y = \sin 2x + \ln\left(1 + x^2\right) + 5; \quad y = 2^{-x} + x^2 + 1$ là các hàm số sơ cấp.

Khái niệm hàm số một biến số

Hàm số sơ cấp

Định nghĩa 1.5

Các hàm số sau đây được gọi là các "hàm số sơ cấp cơ bản":

$$x^\alpha; \quad a^x \ (a > 0, a \neq 1); \quad \log_a x; \ (x > 0)$$

các hàm lượng giác và các hàm lượng giác ngược.
Hàm số sơ cấp là những hàm được tạo nên từ các hàm sơ cấp cơ bản bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

Ví dụ 1.7

Các hàm số $y = \sin 2x + \ln\left(1 + x^2\right) + 5; \quad y = 2^{-x} + x^2 + 1$ là các hàm số sơ cấp.

Khái niệm hàm số một biến số

Hàm số sơ cấp

Định nghĩa 1.5

Các hàm số sau đây được gọi là các "hàm số sơ cấp cơ bản":

$$x^{\alpha}; \quad a^{x} \ (a > 0, a \neq 1)\,; \quad \log_a x; \ (x > 0)$$

các hàm lượng giác và các hàm lượng giác ngược.
Hàm số sơ cấp là những hàm được tạo nên từ các hàm sơ cấp cơ bản bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

Ví dụ 1.7

Các hàm số $y = \sin 2x + \ln\left(1 + x^2\right) + 5; \quad y = 2^{-x} + x^2 + 1$ là các hàm số sơ cấp.

Nội dung

Dãy số

Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 2.1

Nếu có một sự tương ứng mỗi $n \in \mathbb{N}$ với một giá trị $x_n \in \mathbb{R}$: $n \longmapsto x_n$ thì $\{x_n\}$ được gọi là một dãy số thực.

- Nếu $x_{n+1} > (\geq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy tăng (không giảm)
- Nếu $x_{n+1} < (\leq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy giảm (không tăng)
- Nếu tồn tại số b sao cho $x_n \leq b \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên
- Nếu tồn tại số a sao cho $x_n \geq a \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới
- Nếu $\{x_n\}$ vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, hay nói cách khác, tồn tại các số a, b hữu hạn để
$$a \leq x_n \leq b \ \forall n$$
thì ta nói $\{x_n\}$ bị chặn hay giới nội.

Dãy số

Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 2.1

Nếu có một sự tương ứng mỗi $n \in \mathbb{N}$ với một giá trị $x_n \in \mathbb{R}$: $n \longmapsto x_n$ thì $\{x_n\}$ được gọi là một dãy số thực.

- Nếu $x_{n+1} > (\geq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy tăng (không giảm)
- Nếu $x_{n+1} < (\leq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy giảm (không tăng)
- Nếu tồn tại số b sao cho $x_n \leq b \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên
- Nếu tồn tại số a sao cho $x_n \geq a \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới
- Nếu $\{x_n\}$ vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, hay nói cách khác, tồn tại các số a, b hữu hạn để
$$a \leq x_n \leq b \ \forall n$$
thì ta nói $\{x_n\}$ bị chặn hay giới nội.

Dãy số

Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 2.1

Nếu có một sự tương ứng mỗi $n \in \mathbb{N}$ với một giá trị $x_n \in \mathbb{R}$: $n \longmapsto x_n$ thì $\{x_n\}$ được gọi là một dãy số thực.

- Nếu $x_{n+1} > (\geq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy tăng (không giảm)
- Nếu $x_{n+1} < (\leq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy giảm (không tăng)
- Nếu tồn tại số b sao cho $x_n \leq b \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên
- Nếu tồn tại số a sao cho $x_n \geq a \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới
- Nếu $\{x_n\}$ vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, hay nói cách khác, tồn tại các số a, b hữu hạn để

$$a \leq x_n \leq b \ \forall n$$

thì ta nói $\{x_n\}$ bị chặn hay giới nội.

Dãy số

Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 2.1

Nếu có một sự tương ứng mỗi $n \in \mathbb{N}$ với một giá trị $x_n \in \mathbb{R}$: $n \longmapsto x_n$ thì $\{x_n\}$ được gọi là một dãy số thực.

- Nếu $x_{n+1} > (\geq) x_n \; \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy tăng (không giảm)
- Nếu $x_{n+1} < (\leq) x_n \; \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy giảm (không tăng)
- Nếu tồn tại số b sao cho $x_n \leq b \; \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên
- Nếu tồn tại số a sao cho $x_n \geq a \; \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới
- Nếu $\{x_n\}$ vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, hay nói cách khác, tồn tại các số a, b hữu hạn để
$$a \leq x_n \leq b \; \forall n$$
thì ta nói $\{x_n\}$ bị chặn hay giới nội.

Dãy số

Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 2.1

Nếu có một sự tương ứng mỗi $n \in \mathbb{N}$ với một giá trị $x_n \in \mathbb{R}$: $n \longmapsto x_n$ thì $\{x_n\}$ được gọi là một dãy số thực.

- Nếu $x_{n+1} > (\geq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy tăng (không giảm)
- Nếu $x_{n+1} < (\leq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy giảm (không tăng)
- Nếu tồn tại số b sao cho $x_n \leq b \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên
- Nếu tồn tại số a sao cho $x_n \geq a \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới
- Nếu $\{x_n\}$ vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, hay nói cách khác, tồn tại các số a, b hữu hạn để

$$a \leq x_n \leq b \ \forall n$$

thì ta nói $\{x_n\}$ bị chặn hay giới nội.

Dãy số

Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 2.1

Nếu có một sự tương ứng mỗi $n \in \mathbb{N}$ với một giá trị $x_n \in \mathbb{R}$: $n \longmapsto x_n$ thì $\{x_n\}$ được gọi là một dãy số thực.

- Nếu $x_{n+1} > (\geq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy tăng (không giảm)
- Nếu $x_{n+1} < (\leq) x_n \ \forall n$ thì ta nói $\{x_n\}$ là dãy giảm (không tăng)
- Nếu tồn tại số b sao cho $x_n \leq b \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên
- Nếu tồn tại số a sao cho $x_n \geq a \ \forall n$ thì ta nói dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới
- Nếu $\{x_n\}$ vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, hay nói cách khác, tồn tại các số a, b hữu hạn để
$$a \leq x_n \leq b \ \forall n$$
thì ta nói $\{x_n\}$ bị chặn hay giới nội.

Dãy số

Giới hạn dãy số

Định nghĩa 2.2

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ tới (hoặc có giới hạn là) a (hữu hạn) và viết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(x_n \to a)$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ cho trước thì } \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N \text{ ta có } |x_n - a| < \varepsilon.$$

Nếu $\{x_n\}$ không hội tụ thì ta nói nó "phân kỳ".

Chú ý 2.1

- Số N trong định nghĩa trên có thể không cần là số tự nhiên nhưng thường được chọn là số tự nhiên
- Trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ được định nghĩa như sau

$$\forall M > 0, \text{ cho trước, } \exists N = N(M): \quad \forall n \geq N \text{ ta có } |x_n| > M.$$

Dãy số

Giới hạn dãy số

Định nghĩa 2.2

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ tới (hoặc có giới hạn là) a (hữu hạn) và viết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(x_n \to a)$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ cho trước thì } \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N \text{ ta có } |x_n - a| < \varepsilon.$$

Nếu $\{x_n\}$ không hội tụ thì ta nói nó "phân kỳ".

Chú ý 2.1

- Số N trong định nghĩa trên có thể không cần là số tự nhiên nhưng thường được chọn là số tự nhiên
- Trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ được định nghĩa như sau

$$\forall M > 0, \text{ cho trước, } \exists N = N(M): \quad \forall n \geq N \text{ ta có } |x_n| > M.$$

Dãy số

Giới hạn dãy số

Định nghĩa 2.2

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ tới (hoặc có giới hạn là) a (hữu hạn) và viết $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $(x_n \to a)$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ cho trước thì } \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N \text{ ta có } |x_n - a| < \varepsilon.$$

Nếu $\{x_n\}$ không hội tụ thì ta nói nó "phân kỳ".

Chú ý 2.1

- Số N trong định nghĩa trên có thể không cần là số tự nhiên nhưng thường được chọn là số tự nhiên
- Trường hợp $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ được định nghĩa như sau

$$\forall M > 0, \text{ cho trước, } \exists N = N(M): \quad \forall n \geq N \text{ ta có } |x_n| > M.$$

Dãy số

Giới hạn dãy số

Ví dụ 2.1

Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C}{n} = 0, \quad (C = \text{const}).$

Chứng minh.

Với mọi $\varepsilon > 0$, xét
$$\left|\frac{C}{n} - 0\right| = \frac{|C|}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{|C|}{\varepsilon}.$$
Do đó, nếu chọn $N_0 = \left[\dfrac{|C|}{\varepsilon}\right] + 1$ thì $\forall n \geq N_0$ ta có $\left|\dfrac{C}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Vậy ta có đpcm. $\square$

Dãy số

Tính chất của dãy hội tụ

Định lý 2.1

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *thì* a *là duy nhất.*

Định nghĩa 2.3

Khoảng $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ được gọi là một lân cận của điểm a và được ký hiệu bởi $U_\varepsilon(a)$.

Định lý 2.2

1. $x_n \to a$ *khi và chỉ khi mỗi lân cận của điểm* a *chứa mọi phần tử của* $\{x_n\}$ *trừ ra một số hữu hạn phần tử của dãy đó.*
2. *Nếu* $\{x_n\}$ *hội tụ thì nó là giới nội. Điều ngược lại chưa chắc đã đúng.*

Dãy số

Tính chất của dãy hội tụ

Định lý 2.1

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *thì* a *là duy nhất.*

Định nghĩa 2.3

Khoảng $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ được gọi là một lân cận của điểm a và được ký hiệu bởi $U_\varepsilon(a)$.

Định lý 2.2

1. $x_n \to a$ *khi và chỉ khi mỗi lân cận của điểm* a *chứa mọi phần tử của* $\{x_n\}$ *trừ ra một số hữu hạn phần tử của dãy đó.*
2. *Nếu* $\{x_n\}$ *hội tụ thì nó là giới nội. Điều ngược lại chưa chắc đã đúng.*

Dãy số

Tính chất của dãy hội tụ

Định lý 2.1

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *thì* a *là duy nhất.*

Định nghĩa 2.3

Khoảng $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ được gọi là một lân cận của điểm a và được ký hiệu bởi $U_\varepsilon(a)$.

Định lý 2.2

1. *$x_n \to a$ khi và chỉ khi mỗi lân cận của điểm a chứa mọi phần tử của $\{x_n\}$ trừ ra một số hữu hạn phần tử của dãy đó.*
2. *Nếu $\{x_n\}$ hội tụ thì nó là giới nội. Điều ngược lại chưa chắc đã đúng.*

Dãy số

Tính chất của dãy hội tụ

Định lý 2.1

Nếu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *thì* a *là duy nhất.*

Định nghĩa 2.3

Khoảng $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ được gọi là một lân cận của điểm a và được ký hiệu bởi $U_\varepsilon(a)$.

Định lý 2.2

1. $x_n \to a$ *khi và chỉ khi mỗi lân cận của điểm* a *chứa mọi phần tử của* $\{x_n\}$ *trừ ra một số hữu hạn phần tử của dãy đó.*
2. *Nếu* $\{x_n\}$ *hội tụ thì nó là giới nội. Điều ngược lại chưa chắc đã đúng.*

Dãy số

Các phép toán về dãy hội tụ

Định lý 2.3

Cho hai dãy hội tụ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a;\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Khi đó ta có*

- $\lim\limits_{n\to\infty} (Cx_n) = Ca$ *(*C – const*);*
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}, \quad (b \neq 0)$.

Dãy số

Các phép toán về dãy hội tụ

Định lý 2.3

Cho hai dãy hội tụ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Khi đó ta có*

- $\lim\limits_{n\to\infty} (Cx_n) = Ca$ *(*$C - \text{const}$*);*
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0)$.

Dãy số

Các phép toán về dãy hội tụ

Định lý 2.3

Cho hai dãy hội tụ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a;\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Khi đó ta có*

- $\lim\limits_{n\to\infty} (Cx_n) = Ca$ *(*$C - \text{const}$*);*
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}, \quad (b \neq 0).$

Dãy số

Các phép toán về dãy hội tụ

Định lý 2.3

Cho hai dãy hội tụ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a;\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Khi đó ta có*

- $\lim\limits_{n\to\infty} (Cx_n) = Ca$ *(*C − const*);*
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}, \quad (b \neq 0)$.

Dãy số

Các tiêu chuẩn hội tụ của dãy

Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn

Mọi dãy đơn điệu tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) đều là dãy hội tụ.

Ví dụ 2.2

Xét dãy $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Người ta chứng minh được rằng $\{x_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi 3 nên nó là dãy hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828...,$$

trong đó e là hằng số Euler, đặt theo tên nhà toán học Thụy Sĩ Leonhard Euler, hoặc hằng số Napier để ghi công nhà toán học Scotland John Napier người đã phát minh ra logarit. Hằng số toán học e là cơ số của logarit tự nhiên. Số e là một số vô tỉ và là một trong những số quan trọng nhất trong toán học.

Dãy số

Các tiêu chuẩn hội tụ của dãy

Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn

Mọi dãy đơn điệu tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) đều là dãy hội tụ.

Ví dụ 2.2

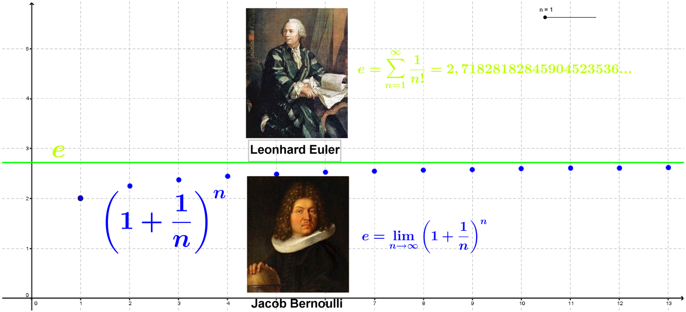
Xét dãy $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Người ta chứng minh được rằng $\{x_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi 3 nên nó là dãy hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828...,$$

trong đó e là hằng số Euler, đặt theo tên nhà toán học Thụy Sĩ Leonhard Euler, hoặc hằng số Napier để ghi công nhà toán học Scotland John Napier người đã phát minh ra logarit. Hằng số toán học e là cơ số của logarit tự nhiên. Số e là một số vô tỉ và là một trong những số quan trọng nhất trong toán học.

Dãy số

Các tiêu chuẩn hội tụ của dãy



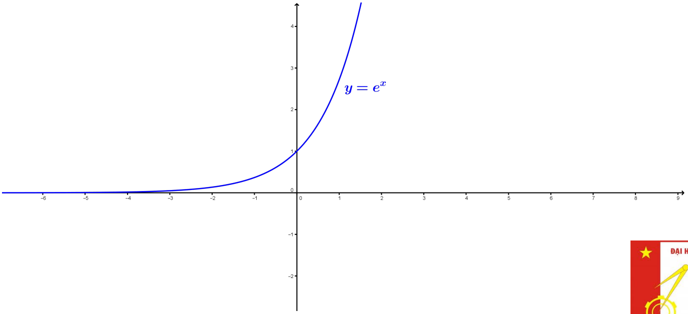
Dãy số

Các tiêu chuẩn hội tụ của dãy

Từ khái niệm số e, người ta xác định hàm số (sơ cấp)

$$y = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hàm $y = e^x$ có hàm ngược là $y = \ln x, \ x > 0$.



Dãy số

Các hàm Hyperbolic

- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm lẻ)
- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm chẵn)
- $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)
- $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)

Một số tính chất cơ bản (chứng minh!)

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
2. $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$;
3. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$;
4. $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$;
5. $\dfrac{1 + \tanh a}{1 - \tanh a} = e^{2a}$;
6. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
7. $(\cosh x + \sinh x)^a = \cosh ax + \sinh ax, \quad a \in \mathbb{R}$.

Dãy số

Các hàm Hyperbolic

- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$ (Hàm lẻ)
- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$ (Hàm chẵn)
- $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)
- $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)

Một số tính chất cơ bản (chứng minh!)

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$
2. $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b;$
3. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b;$
4. $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b};$
5. $\dfrac{1+\tanh a}{1-\tanh a} = e^{2a};$
6. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1};$
7. $(\cosh x + \sinh x)^a = \cosh ax + \sinh ax, \quad a \in \mathbb{R}.$

Dãy số

Các hàm Hyperbolic

- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm lẻ)
- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm chẵn)
- $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)
- $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)

Một số tính chất cơ bản (chứng minh!)

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
2. $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$;
3. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$;
4. $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$;
5. $\dfrac{1+\tanh a}{1-\tanh a} = e^{2a}$;
6. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;
7. $(\cosh x + \sinh x)^a = \cosh ax + \sinh ax, \quad a \in \mathbb{R}$.

Dãy số

Các hàm Hyperbolic

- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm lẻ)
- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm chẵn)
- $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)
- $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)

Một số tính chất cơ bản (chứng minh!)

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
2. $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$;
3. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$;
4. $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$;
5. $\dfrac{1 + \tanh a}{1 - \tanh a} = e^{2a}$;
6. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
7. $(\cosh x + \sinh x)^a = \cosh ax + \sinh ax, \quad a \in \mathbb{R}$.

Dãy số

Các hàm Hyperbolic

- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm lẻ)
- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm chẵn)
- $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)
- $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)

Một số tính chất cơ bản (chứng minh!)

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
2. $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$;
3. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$;
4. $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$;
5. $\dfrac{1+\tanh a}{1-\tanh a} = e^{2a}$;
6. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;
7. $(\cosh x + \sinh x)^a = \cosh ax + \sinh ax, \quad a \in \mathbb{R}$.

Dãy số

Các hàm Hyperbolic

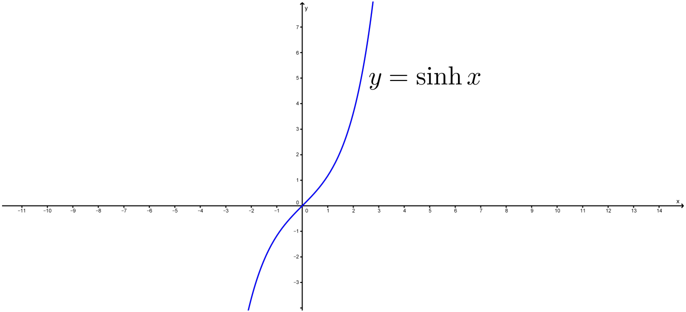
- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm lẻ)
- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$. (Hàm chẵn)
- $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)
- $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (Hàm lẻ)

Một số tính chất cơ bản (chứng minh!)

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
2. $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$;
3. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$;
4. $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$;
5. $\dfrac{1 + \tanh a}{1 - \tanh a} = e^{2a}$;
6. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
7. $(\cosh x + \sinh x)^a = \cosh ax + \sinh ax, \quad a \in \mathbb{R}$.

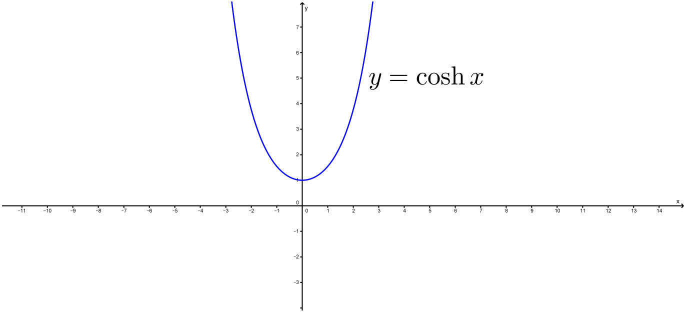
Dãy số

Các hàm Hyperbolic



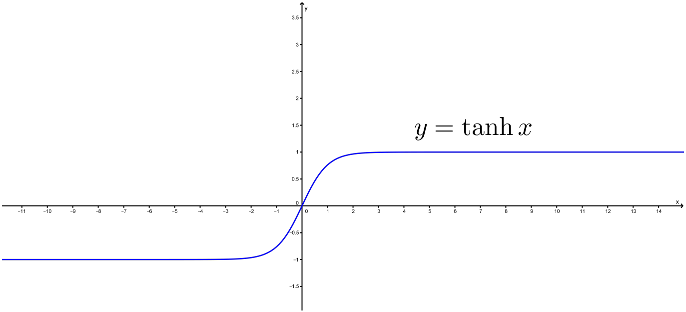
Dãy số

Các hàm Hyperbolic



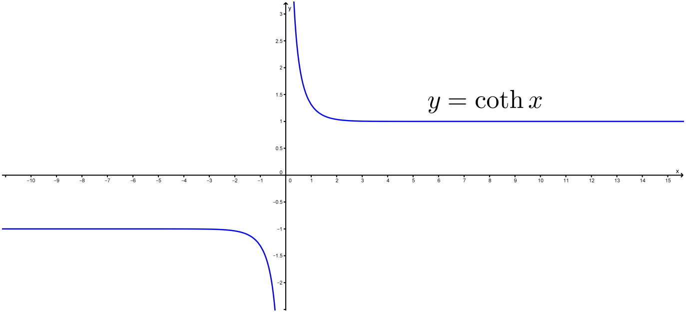
Dãy số

Các hàm Hyperbolic



Dãy số

Các hàm Hyperbolic



Dãy số

Tiêu chuẩn kẹp

Nếu các dãy $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ thoả mãn $x_n \leq y_n \leq z_n \ \forall n$ đồng thời

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

thì ta có $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Ví dụ 2.3

Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$n = \left[1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right]^n = 1 + n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \cdots$$
$$> \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \Longrightarrow \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \ \ \forall n > 1.$$

Do đó ta có $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Mặt khác, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$ nên áp dụng nguyên lý kẹp ta thu được đpcm.

Dãy số

Tiêu chuẩn kẹp

Nếu các dãy $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ thoả mãn $x_n \le y_n \le z_n \ \forall n$ đồng thời

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

thì ta có $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Ví dụ 2.3

Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned} n &= \left[1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right]^n = 1 + n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \cdots \\ &> \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \Longrightarrow \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad \forall n > 1. \end{aligned}$$

Do đó ta có $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. Mặt khác, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} = 0$ nên áp dụng nguyên lý kẹp ta thu được đpcm.

Dãy số

Các tiêu chuẩn hội tụ của dãy

Tiêu chuẩn Cauchy

Dãy $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall m, n > N \text{ ta có } |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Ví dụ 2.4

Dùng tiêu chuẩn Cauchy chứng minh dãy điều hoà $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ là phân kỳ.

Chứng minh.

Ta có

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n > 1.$$

Điều này có nghĩa $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ sao cho $\forall N > 0$, tồn tại $n > N$ và $m = 2n$ sao cho $|x_m - x_n| > \varepsilon_0$.

Theo tiêu chuẩn Cauchy ta thu được dãy đã cho là phân kỳ. □

Dãy số

Các tiêu chuẩn hội tụ của dãy

Tiêu chuẩn Cauchy

Dãy $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall m, n > N \text{ ta có } |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Ví dụ 2.4

Dùng tiêu chuẩn Cauchy chứng minh dãy điều hoà $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ là phân kỳ.

Chứng minh.

Ta có

$$|x_{2n} - x_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n > 1.$$

Điều này có nghĩa $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ sao cho $\forall N > 0$, tồn tại $n > N$ và $m = 2n$ sao cho $|x_m - x_n| > \varepsilon_0$.

Theo tiêu chuẩn Cauchy ta thu được dãy đã cho là phân kỳ. □

Dãy số

Các tiêu chuẩn hội tụ của dãy

Tiêu chuẩn Cauchy

Dãy $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall m, n > N \text{ ta có } |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Ví dụ 2.4

Dùng tiêu chuẩn Cauchy chứng minh dãy điều hoà $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ là phân kỳ.

Chứng minh.

Ta có

$$|x_{2n} - x_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n > 1.$$

Điều này có nghĩa $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ sao cho $\forall N > 0$, tồn tại $n > N$ và $m = 2n$ sao cho $|x_m - x_n| > \varepsilon_0$.

Theo tiêu chuẩn Cauchy ta thu được dãy đã cho là phân kỳ. □

Nội dung

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Định nghĩa 3.1

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập $X \subset \mathbb{R}$ hoặc $X \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}$.
Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to a$ (L, a hữu hạn), ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3.2

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to a$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset X, \quad x_n \to a$ thì

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$$

Chú ý 3.1

Có thể chứng minh được rằng hai định nghĩa trên là tương đương.

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Định nghĩa 3.1

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập $X \subset \mathbb{R}$ hoặc $X \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}$.
Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to a$ (L, a hữu hạn), ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3.2

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to a$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset X, \quad x_n \to a$ thì

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$$

Chú ý 3.1

Có thể chứng minh được rằng hai định nghĩa trên là tương đương.

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Định nghĩa 3.1

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập $X \subset \mathbb{R}$ hoặc $X \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}$.
Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to a$ (L, a hữu hạn), ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3.2

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to a$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset X, \quad x_n \to a$ thì

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$$

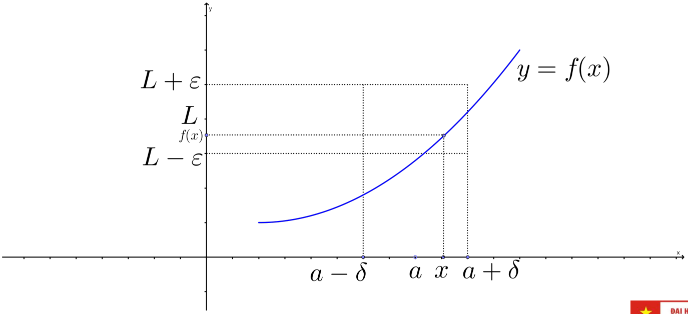
Chú ý 3.1

Có thể chứng minh được rằng hai định nghĩa trên là tương đương.

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Quan hệ giữa ε và δ trong định nghĩa giới hạn hàm số



Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Ví dụ 3.1

Chứng minh $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$; xét bất phương trình

$$|2x+1-3| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ thì $\forall x$ sao cho $|x-1| < \delta$ ta có $|f(x)-3| = 2|x-1| < \varepsilon$.

Ví dụ 3.2

Ta chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

Thật vậy, xét hai dãy $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ và $y_n = \frac{1}{\pi/2+2n\pi}$. Dễ thấy $x_n, y_n \to 0$, đồng thời

$$f(x_n) = \sin(2n\pi) \equiv 0 \to 0$$

$$f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) \equiv 1 \to 1.$$

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Ví dụ 3.1

Chứng minh $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Thật vậy, cho trước $\varepsilon>0$; xét bất phương trình

$$|2x+1-3|<\varepsilon \Longleftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Chọn $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ thì $\forall x$ sao cho $|x-1|<\delta$ ta có $|f(x)-3|=2\,|x-1|<\varepsilon$.

Ví dụ 3.2

Ta chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$.

Thật vậy, xét hai dãy $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ và $y_n=\dfrac{1}{\pi/2+2n\pi}$. Dễ thấy $x_n, y_n\to 0$, đồng thời

$$f(x_n)=\sin(2n\pi)\equiv 0\to 0$$

$$f(y_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\equiv 1\to 1.$$

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Ví dụ 3.1

Chứng minh $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$; xét bất phương trình

$$|2x+1-3| < \varepsilon \iff |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ thì $\forall x$ sao cho $|x-1| < \delta$ ta có $|f(x)-3| = 2|x-1| < \varepsilon$.

Ví dụ 3.2

Ta chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

Thật vậy, xét hai dãy $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ và $y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$. Dễ thấy $x_n, y_n \to 0$, đồng thời

$$f(x_n) = \sin(2n\pi) \equiv 0 \to 0$$

$$f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \equiv 1 \to 1.$$

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Ví dụ 3.1

Chứng minh $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Thật vậy, cho trước $\varepsilon>0$; xét bất phương trình

$$|2x+1-3|<\varepsilon \iff |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Chọn $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ thì $\forall x$ sao cho $|x-1|<\delta$ ta có $|f(x)-3|=2|x-1|<\varepsilon$.

Ví dụ 3.2

Ta chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

Thật vậy, xét hai dãy $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ và $y_n=\frac{1}{\pi/2+2n\pi}$. Dễ thấy $x_n, y_n\to 0$, đồng thời

$$f(x_n)=\sin(2n\pi)\equiv 0\to 0$$

$$f(y_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\equiv 1\to 1.$$

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Định nghĩa 3.3

Ta nói $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to \infty$ và viết $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ đủ lớn: } |x| > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3.4

Ta nói $f(x)$ dần ra vô cùng khi $x \to a$ và viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ nếu

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > M.$$

Định nghĩa 3.5

Ta nói $f(x)$ dần ra vô cùng khi $x \to \infty$ và viết $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ nếu

$$\forall M > 0 \text{ đủ lớn }, \exists A > 0 \text{ đủ lớn } : \quad |x| > A \Longrightarrow |f(x)| > M.$$

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Định nghĩa 3.3

Ta nói $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to \infty$ và viết $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ đủ lớn: } |x| > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3.4

Ta nói $f(x)$ dần ra vô cùng khi $x \to a$ và viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ nếu

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > M.$$

Định nghĩa 3.5

Ta nói $f(x)$ dần ra vô cùng khi $x \to \infty$ và viết $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ nếu

$$\forall M > 0 \text{ đủ lớn }, \exists A > 0 \text{ đủ lớn } : \quad |x| > A \Longrightarrow |f(x)| > M.$$

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn hàm số

Định nghĩa 3.3

Ta nói $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to \infty$ và viết $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ đủ lớn: } |x| > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3.4

Ta nói $f(x)$ dần ra vô cùng khi $x \to a$ và viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ nếu

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > M.$$

Định nghĩa 3.5

Ta nói $f(x)$ dần ra vô cùng khi $x \to \infty$ và viết $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ nếu

$$\forall M > 0 \text{ đủ lớn }, \exists A > 0 \text{ đủ lớn } : \quad |x| > A \Longrightarrow |f(x)| > M.$$

Giới hạn hàm số

Các phép toán giới hạn

Định lý 3.1

Giả sử $\lim_{x\to a} f(x) = L_1;\quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$. *Khi đó*

1. $\lim_{x\to a} Cf(x) = CL_1$ *với* $C = \text{const}$;
2. $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$;
3. $\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) = L_1.L_2$;
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *với* $L_2 \neq 0$.

Ví dụ 3.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Giới hạn hàm số

Các phép toán giới hạn

Định lý 3.1

Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. *Khi đó*

1. $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = CL_1$ *với* $C = \text{const}$;
2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$;
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x)) = L_1.L_2$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *với* $L_2 \neq 0$.

Ví dụ 3.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Giới hạn hàm số

Các phép toán giới hạn

Định lý 3.1

Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. *Khi đó*

1. $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = CL_1$ *với* $C = \text{const}$;
2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$;
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x)) = L_1.L_2$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *với* $L_2 \neq 0$.

Ví dụ 3.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \dfrac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Giới hạn hàm số

Các phép toán giới hạn

Định lý 3.1

Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. *Khi đó*

1. $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = CL_1$ *với* $C = \text{const}$;
2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$;
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x)) = L_1.L_2$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *với* $L_2 \neq 0$.

Ví dụ 3.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \dfrac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Giới hạn hàm số

Các phép toán giới hạn

Định lý 3.1

Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1; \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. *Khi đó*

1. $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = CL_1$ *với* $C = \text{const}$;
2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$;
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x)) = L_1.L_2$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *với* $L_2 \neq 0$.

Ví dụ 3.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Giới hạn hàm số

Các phép toán giới hạn

Định lý 3.1

Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. *Khi đó*

1. $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = CL_1$ *với* $C = \text{const}$;
2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$;
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x)) = L_1.L_2$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *với* $L_2 \neq 0$.

Ví dụ 3.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \dfrac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Giới hạn hàm số

Giới hạn một phía

Định nghĩa 3.6

- *Nếu* $\forall x < b;\quad x \to b$ *ta viết* $x \to b - 0$, *còn* $\forall x > a; x \to a$ *ta viết* $x \to a + 0$.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên trái tại điểm* b.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên phải tại điểm* a.

Chú ý 3.2

1. Nói chung $f\,(a-0) \neq f\,(a+0)$;
2. Mối liên hệ giữa giới hạn một phía và giới hạn hai phía:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Giới hạn hàm số

Giới hạn một phía

Định nghĩa 3.6

- *Nếu* $\forall x < b; \quad x \to b$ *ta viết* $x \to b - 0$, *còn* $\forall x > a; x \to a$ *ta viết* $x \to a + 0$.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên trái tại điểm* b.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên phải tại điểm* a.

Chú ý 3.2

1. Nói chung $f(a-0) \neq f(a+0)$;
2. Mối liên hệ giữa giới hạn một phía và giới hạn hai phía:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Giới hạn hàm số

Giới hạn một phía

Định nghĩa 3.6

- *Nếu* $\forall x < b;\ \ x \to b$ *ta viết* $x \to b - 0$, *còn* $\forall x > a; x \to a$ *ta viết* $x \to a + 0$.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên trái tại điểm* b.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên phải tại điểm* a.

Chú ý 3.2

1. Nói chung $f\,(a-0) \neq f\,(a+0)$;
2. Mối liên hệ giữa giới hạn một phía và giới hạn hai phía:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Giới hạn hàm số

Giới hạn một phía

Định nghĩa 3.6

- *Nếu* $\forall x < b;\quad x \to b$ *ta viết* $x \to b - 0$, *còn* $\forall x > a; x \to a$ *ta viết* $x \to a + 0$.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên trái tại điểm* b.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên phải tại điểm* a.

Chú ý 3.2

1. Nói chung $f(a-0) \neq f(a+0)$;
2. Mối liên hệ giữa giới hạn một phía và giới hạn hai phía:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Giới hạn hàm số

Giới hạn một phía

Định nghĩa 3.6

- *Nếu* $\forall x < b;\ \ x \to b$ *ta viết* $x \to b - 0$*, còn* $\forall x > a; x \to a$ *ta viết* $x \to a + 0$.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên trái tại điểm* b.
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ *tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số* $f(x)$ *có giới hạn bên phải tại điểm* a.

Chú ý 3.2

1. Nói chung $f\,(a-0) \neq f\,(a+0)$;
2. Mối liên hệ giữa giới hạn một phía và giới hạn hai phía:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Giới hạn hàm số

Giới hạn một phía

Ví dụ 3.4

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Hàm số không xác định tại $x = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} f(0-0) &= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1; \\ f(0+0) &= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(1) = 1. \end{aligned}$$

Do $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Giới hạn hàm số

Một số giới hạn cơ bản

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad a>0$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\log_a(1+x)}{x}\right]=\dfrac{1}{\ln a};\quad a>0, a\neq 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\log_a\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\dfrac{1}{\ln a};\quad a>0, a\neq 1$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

Nội dung

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 4.1

- Hàm số $\alpha(x)$ gọi là VCB khi (trong quá trình) $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, ($a$ có thể hữu hạn hoặc vô hạn).
- Hàm số $F(x)$ gọi là VCL khi $x \to a$ (hữu hạn hoặc vô hạn) nếu $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$.

Dễ thấy:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff f(x) = L + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB trong quá trình $x \to a$.
- Nghịch đảo của VCL là VCB khi $x \to a$.
- Tổng và tích hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình là VCB trong quá trình đó.
- Tích của VCB và đại lượng giới nội là VCB (chứng minh?).

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 4.1

- Hàm số $\alpha(x)$ gọi là VCB khi (trong quá trình) $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, ($a$ có thể hữu hạn hoặc vô hạn).
- Hàm số $F(x)$ gọi là VCL khi $x \to a$ (hữu hạn hoặc vô hạn) nếu $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$.

Dễ thấy:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff f(x) = L + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB trong quá trình $x \to a$.
- Nghịch đảo của VCL là VCB khi $x \to a$.
- Tổng và tích hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình là VCB trong quá trình đó.
- Tích của VCB và đại lượng giới nội là VCB (chứng minh?).

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 4.1

- Hàm số $\alpha(x)$ gọi là VCB khi (trong quá trình) $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, ($a$ có thể hữu hạn hoặc vô hạn).
- Hàm số $F(x)$ gọi là VCL khi $x \to a$ (hữu hạn hoặc vô hạn) nếu $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$.

Dễ thấy:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff f(x) = L + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB trong quá trình $x \to a$.
- Nghịch đảo của VCL là VCB khi $x \to a$.
- Tổng và tích hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình là VCB trong quá trình đó.
- Tích của VCB và đại lượng giới nội là VCB (chứng minh?).

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 4.1

- Hàm số $\alpha(x)$ gọi là VCB khi (trong quá trình) $x \to a$ nếu $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$, ($a$ có thể hữu hạn hoặc vô hạn).
- Hàm số $F(x)$ gọi là VCL khi $x \to a$ (hữu hạn hoặc vô hạn) nếu $\lim_{x \to a} F(x) = \infty$.

Dễ thấy:

- $\lim_{x \to a} f(x) = L \iff f(x) = L + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB trong quá trình $x \to a$.
- Nghịch đảo của VCL là VCB khi $x \to a$.
- Tổng và tích hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình là VCB trong quá trình đó.
- Tích của VCB và đại lượng giới nội là VCB (chứng minh?).

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 4.1

- Hàm số $\alpha(x)$ gọi là VCB khi (trong quá trình) $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, ($a$ có thể hữu hạn hoặc vô hạn).
- Hàm số $F(x)$ gọi là VCL khi $x \to a$ (hữu hạn hoặc vô hạn) nếu $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$.

Dễ thấy:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff f(x) = L + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB trong quá trình $x \to a$.
- Nghịch đảo của VCL là VCB khi $x \to a$.
- Tổng và tích hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình là VCB trong quá trình đó.
- Tích của VCB và đại lượng giới nội là VCB (chứng minh?).

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 4.1

- Hàm số $\alpha(x)$ gọi là VCB khi (trong quá trình) $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, ($a$ có thể hữu hạn hoặc vô hạn).
- Hàm số $F(x)$ gọi là VCL khi $x \to a$ (hữu hạn hoặc vô hạn) nếu $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$.

Dễ thấy:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff f(x) = L + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB trong quá trình $x \to a$.
- Nghịch đảo của VCL là VCB khi $x \to a$.
- Tổng và tích hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình là VCB trong quá trình đó.
- Tích của VCB và đại lượng giới nội là VCB (chứng minh?).

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 4.1

- Hàm số $\alpha(x)$ gọi là VCB khi (trong quá trình) $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, ($a$ có thể hữu hạn hoặc vô hạn).
- Hàm số $F(x)$ gọi là VCL khi $x \to a$ (hữu hạn hoặc vô hạn) nếu $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$.

Dễ thấy:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff f(x) = L + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB trong quá trình $x \to a$.
- Nghịch đảo của VCL là VCB khi $x \to a$.
- Tổng và tích hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình là VCB trong quá trình đó.
- Tích của VCB và đại lượng giới nội là VCB (chứng minh?).

Vô cùng bé, vô cùng lớn

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong cùng một quá trình $x \to a$, khi đó

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad (C \neq 0, 1, \infty)$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = O(\beta(x))$ ("ô lớn").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ("ô nhỏ").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \to a$. Trong trường hợp này ta ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to a$.

Ví dụ 4.1

Khi $x \to 0$ ta có

$$\sin x \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x; \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha > 0).$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong cùng một quá trình $x \to a$, khi đó

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad (C \neq 0, 1, \infty)$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = O(\beta(x))$ ("ô lớn").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ("ô nhỏ").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \to a$. Trong trường hợp này ta ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to a$.

Ví dụ 4.1

Khi $x \to 0$ ta có

$$\sin x \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x; \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha > 0).$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong cùng một quá trình $x \to a$, khi đó

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad (C \neq 0, 1, \infty)$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = O\left(\beta(x)\right)$ ("ô lớn").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = o\left(\beta(x)\right)$ ("ô nhỏ").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \to a$. Trong trường hợp này ta ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to a$.

Ví dụ 4.1

Khi $x \to 0$ ta có

$$\sin x \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x; \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha > 0).$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong cùng một quá trình $x \to a$, khi đó

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad (C \neq 0, 1, \infty)$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = O(\beta(x))$ ("ô lớn").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ("ô nhỏ").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \to a$. Trong trường hợp này ta ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to a$.

Ví dụ 4.1

Khi $x \to 0$ ta có

$$\sin x \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x; \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha > 0).$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong cùng một quá trình $x \to a$, khi đó

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad (C \neq 0, 1, \infty)$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = O\left(\beta(x)\right)$ ("ô lớn").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = o\left(\beta(x)\right)$ ("ô nhỏ").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \to a$. Trong trường hợp này ta ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to a$.

Ví dụ 4.1

Khi $x \to 0$ ta có

$$\sin x \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x; \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha > 0).$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong cùng một quá trình $x \to a$, khi đó

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad (C \neq 0, 1, \infty)$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = O\left(\beta(x)\right)$ ("ô lớn").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$, ký hiệu $\alpha(x) = o\left(\beta(x)\right)$ ("ô nhỏ").
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x \to a$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \to a$. Trong trường hợp này ta ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to a$.

Ví dụ 4.1

Khi $x \to 0$ ta có

$$\sin x \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x; \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha > 0).$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Ứng dụng tìm giới hạn

Định lý 4.1

Nếu $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x), \quad \beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ *khi* $x \to a$ *thì ta có*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

Ví dụ 4.2

Tìm $A = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}$.

Giải: Do $\sin(x-3) \sim (x-3)$ khi $x \to 3$ nên ta có

$$A = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Ứng dụng tìm giới hạn

Định lý 4.1

Nếu $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x), \quad \beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ *khi* $x \to a$ *thì ta có*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

Ví dụ 4.2

Tìm $A = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

Giải: Do $\sin(x-3) \sim (x-3)$ khi $x \to 3$ nên ta có

$$A = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Ứng dụng tìm giới hạn

Định lý 4.1

Nếu $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x), \quad \beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ *khi* $x \to a$ *thì ta có*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

Ví dụ 4.2

Tìm $A = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

Giải: Do $\sin(x-3) \sim (x-3)$ khi $x \to 3$ nên ta có

$$A = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Ứng dụng tìm giới hạn

Ví dụ 4.3

Tìm $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)\tan x}{\sin x^2}$.

Giải: Do khi $x \to 0$ ta có $e^x - 1 \sim x;\quad \sin x \sim x; \tan x \sim x$ nên ta có

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{x.x}{x^2} = 1.$$

Chú ý 4.1

Một số lỗi thường gặp khi thay thế các VCB tương đương

- Thay tương đương khi có hiệu hai VCB
- Nếu f là một hàm, $\alpha \sim \overline{\alpha} \not\Longrightarrow f(\alpha) \sim f(\overline{\alpha})$.

Ví dụ 4.4

Tìm $C = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Ứng dụng tìm giới hạn

Ví dụ 4.3

Tìm $B = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\tan x}{\sin x^2}$.

Giải: Do khi $x \to 0$ ta có $e^x - 1 \sim x$; $\sin x \sim x; \tan x \sim x$ nên ta có

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{x.x}{x^2} = 1.$$

Chú ý 4.1

Một số lỗi thường gặp khi thay thế các VCB tương đương

- Thay tương đương khi có hiệu hai VCB
- Nếu f là một hàm, $\alpha \sim \overline{\alpha} \not\Longrightarrow f(\alpha) \sim f(\overline{\alpha})$.

Ví dụ 4.4

Tìm $C = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Ứng dụng tìm giới hạn

Ví dụ 4.3

Tìm $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)\tan x}{\sin x^2}$.
Giải: Do khi $x \to 0$ ta có $e^x - 1 \sim x;\quad \sin x \sim x; \tan x \sim x$ nên ta có

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{x.x}{x^2} = 1.$$

Chú ý 4.1

Một số lỗi thường gặp khi thay thế các VCB tương đương

- Thay tương đương khi có hiệu hai VCB
- Nếu f là một hàm, $\alpha \sim \overline{\alpha} \not\Longrightarrow f(\alpha) \sim f(\overline{\alpha})$.

Ví dụ 4.4

Tìm $C = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad \left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Ứng dụng tìm giới hạn

Định lý 4.2

Qui tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao, VCL bậc thấp trong một tổng (tổng đại số).
Nếu $\alpha_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n,$ *là các VCB khi* $x \to a$*, trong đó* $\alpha_1(x)$ *là VCB bậc thấp nhất thì*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \sim \alpha_1(x) \text{ khi } x \to a.$$

Ngược lại:
Nếu $f_1(x)$ *là VCL có bậc cao nhất còn* $f_2(x), \dots, f_n(x)$ *là các VCL bậc thấp hơn khi* $x \to a$ *thì*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \sim f_1(x) \text{ khi } x \to a.$$

Ví dụ 4.5

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin^3 x + \tan^4 x}{4x + x^4 + 5x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Ứng dụng tìm giới hạn

Định lý 4.2

Qui tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao, VCL bậc thấp trong một tổng (tổng đại số).
Nếu $\alpha_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n$*, là các VCB khi* $x \to a$*, trong đó* $\alpha_1(x)$ *là VCB bậc thấp nhất thì*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \sim \alpha_1(x) \text{ khi } x \to a.$$

Ngược lại:
Nếu $f_1(x)$ *là VCL có bậc cao nhất còn* $f_2(x), \dots, f_n(x)$ *là các VCL bậc thấp hơn khi* $x \to a$ *thì*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \sim f_1(x) \text{ khi } x \to a.$$

Ví dụ 4.5

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin^3 x + \tan^4 x}{4x + x^4 + 5x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Các vô cùng bé đáng nhớ

Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to a \quad (x \to \infty)$ thì cũng trong quá trình này ta có

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha(x) \sim \tan\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim \arctan\alpha(x) \sim \alpha(x);\\
&\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x);\\
&e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);\\
&(1+\alpha(x))^p - 1 \sim p.\alpha(x) \quad (p > 0);\\
&1 - \cos(\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4.6

- $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$ khi $x \to 0$;
- $\sin(\pi x) \sim \pi x$ khi $x \to 0$;
- $\sin \pi x = \sin(\pi - \pi x) = \sin \pi(1-x) \sim \pi(1-x)$ khi $x \to 1$;
- $\cos\frac{\pi x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}(1-x) \sim \frac{\pi}{2}(1-x)$ khi $x \to 1$.

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Các vô cùng bé đáng nhớ

Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to a \ \ (x \to \infty)$ thì cũng trong quá trình này ta có

$$\sin\alpha(x) \sim \tan\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim \arctan\alpha(x) \sim \alpha(x);$$
$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x);$$
$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$
$$(1+\alpha(x))^p - 1 \sim p.\alpha(x) \quad (p > 0);$$
$$1 - \cos(\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}.$$

Ví dụ 4.6

- $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$ khi $x \to 0$;
- $\sin(\pi x) \sim \pi x$ khi $x \to 0$;
- $\sin \pi x = \sin(\pi - \pi x) = \sin \pi(1-x) \sim \pi(1-x)$ khi $x \to 1$;
- $\cos \frac{\pi x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}(1-x) \sim \frac{\pi}{2}(1-x)$ khi $x \to 1$.

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Các vô cùng bé đáng nhớ

Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to a \quad (x \to \infty)$ thì cũng trong quá trình này ta có

$$\sin\alpha(x) \sim \tan\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim \arctan\alpha(x) \sim \alpha(x);$$
$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x);$$
$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$
$$(1+\alpha(x))^p - 1 \sim p.\alpha(x) \quad (p>0);$$
$$1 - \cos(\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}.$$

Ví dụ 4.6

- $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$ khi $x \to 0$;
- $\sin(\pi x) \sim \pi x$ khi $x \to 0$;
- $\sin \pi x = \sin(\pi - \pi x) = \sin \pi(1-x) \sim \pi(1-x)$ khi $x \to 1$;
- $\cos\frac{\pi x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}(1-x) \sim \frac{\pi}{2}(1-x)$ khi $x \to 1$.

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Các vô cùng bé đáng nhớ

Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to a \quad (x \to \infty)$ thì cũng trong quá trình này ta có

$$\sin\alpha(x) \sim \tan\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim \arctan\alpha(x) \sim \alpha(x);$$
$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x);$$
$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$
$$(1+\alpha(x))^p - 1 \sim p.\alpha(x) \quad (p > 0);$$
$$1 - \cos(\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}.$$

Ví dụ 4.6

- $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$ khi $x \to 0$;
- $\sin(\pi x) \sim \pi x$ khi $x \to 0$;
- $\sin\pi x = \sin(\pi - \pi x) = \sin\pi(1-x) \sim \pi(1-x)$ khi $x \to 1$;
- $\cos\frac{\pi x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}(1-x) \sim \frac{\pi}{2}(1-x)$ khi $x \to 1$.

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Các vô cùng bé đáng nhớ

Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to a \quad (x \to \infty)$ thì cũng trong quá trình này ta có

$$\sin\alpha(x) \sim \tan\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim \arctan\alpha(x) \sim \alpha(x);$$
$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x);$$
$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$
$$(1+\alpha(x))^p - 1 \sim p.\alpha(x) \quad (p > 0);$$
$$1 - \cos(\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}.$$

Ví dụ 4.6

- $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$ khi $x \to 0$;
- $\sin(\pi x) \sim \pi x$ khi $x \to 0$;
- $\sin\pi x = \sin(\pi - \pi x) = \sin\pi(1-x) \sim \pi(1-x)$ khi $x \to 1$;
- $\cos\frac{\pi x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}(1-x) \sim \frac{\pi}{2}(1-x)$ khi $x \to 1$.

Các qui tắc khử các dạng bất định

Các dạng bất định

$$\infty - \infty; \quad 0.\infty; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 1^{\infty}; \quad \infty^{0}; \quad 0^{\infty}; \quad 0^{0}.$$

Các dạng bất định $\infty - \infty, 0.\infty, \dfrac{\infty}{\infty}$ đều có thể đưa được về dạng $\dfrac{0}{0}$.

Các dạng $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{\infty}, 0^{0}$ cũng được đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ bằng công thức sau

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x).\ln u(x)}; \quad (u(x) > 0),$$

Ví dụ 4.7

$$\lim_{x\to 0}\left(1+3\tan^2 x\right)^{\cot^2 x} \quad (1^{\infty}) = e^{\lim_{x\to 0}\cot^2 x \ln\left(1+3\tan^2 x\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} 3\tan^2 x} = e^3.$$

Các qui tắc khử các dạng bất định

Các dạng bất định

$$\infty - \infty;\quad 0.\infty;\quad \frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 1^{\infty};\quad \infty^0;\quad 0^{\infty};\quad 0^0.$$

Các dạng bất định $\infty - \infty, 0.\infty, \dfrac{\infty}{\infty}$ đều có thể đưa được về dạng $\dfrac{0}{0}$.

Các dạng $1^{\infty}, \infty^0, 0^{\infty}, 0^0$ cũng được đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ bằng công thức sau

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x).\ln u(x)};\quad (u(x) > 0),$$

Ví dụ 4.7

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + 3\tan^2 x\right)^{\cot^2 x} \quad (1^{\infty}) = e^{\lim_{x\to 0} \cot^2 x \ln\left(1+3\tan^2 x\right)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} 3\tan^2 x} = e^3.$$

Nội dung

Hàm số liên tục

Định nghĩa hàm liên tục

Định nghĩa 5.1

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) thì ta nói hàm số liên tục trong khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trong khoảng (a, b) và liên tục bên phải tại điểm $a := \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ và liên tục bên trái tại $b := \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$.

Ví dụ 5.1

1. Hàm $f(x) = x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
2. Hàm $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x \leq 0 \\ 1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ không liên tục tại điểm $x = 0$.

Hàm số liên tục

Định nghĩa hàm liên tục

Định nghĩa 5.1

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) thì ta nói hàm số liên tục trong khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trong khoảng (a, b) và liên tục bên phải tại điểm $a := \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ và liên tục bên trái tại $b := \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$.

Ví dụ 5.1

1. Hàm $f(x) = x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
2. Hàm $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x \leq 0 \\ 1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ không liên tục tại điểm $x = 0$.

Hàm số liên tục

Định nghĩa hàm liên tục

Định nghĩa 5.1

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) thì ta nói hàm số liên tục trong khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trong khoảng (a, b) và liên tục bên phải tại điểm $a := \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ và liên tục bên trái tại $b := \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$.

Ví dụ 5.1

1. Hàm $f(x) = x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
2. Hàm $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x \leq 0 \\ 1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ không liên tục tại điểm $x = 0$.

Hàm số liên tục

Định nghĩa hàm liên tục

Định nghĩa 5.1

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) thì ta nói hàm số liên tục trong khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trong khoảng (a, b) và liên tục bên phải tại điểm $a := \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a + 0)$ và liên tục bên trái tại $b := \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b - 0)$.

Ví dụ 5.1

1. Hàm $f(x) = x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
2. Hàm $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x \le 0 \\ 1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ không liên tục tại điểm $x = 0$.

Hàm số liên tục

Định nghĩa hàm liên tục

Định nghĩa 5.1

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) thì ta nói hàm số liên tục trong khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trong khoảng (a, b) và liên tục bên phải tại điểm $a := \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a + 0)$ và liên tục bên trái tại $b := \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b - 0)$.

Ví dụ 5.1

1. Hàm $f(x) = x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
2. Hàm $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x \le 0 \\ 1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ không liên tục tại điểm $x = 0$.

Hàm số liên tục

Các phép toán đối với hàm liên tục

Định lý 5.1

Giả sử $f(x), g(x)$ *là hai hàm trong* (a, b). *Khi đó*

- $f(x) \pm g(x)$ *liên tục trong* (a, b);
- $f(x).g(x)$ *(nói riêng* $Cf(x)$ *với* $C = \text{const}$*) liên tục trong* (a, b);
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *liên tục trong* (a, b) *liên tục trong* (a, b) *trừ những điểm làm cho* $g(x) = 0$.

Từ định lý trên ta suy ra

Mệnh đề 5.1

Các đa thức, phân thức hữu tỷ, các hàm lượng giác, các hàm lượng giác ngược và các hàm hyperbolic là những hàm liên tục. Nói tóm lại: các hàm sơ cấp liên tục trên các khoảng mà hàm số đó xác định.

Hàm số liên tục

Các phép toán đối với hàm liên tục

Định lý 5.1

Giả sử $f(x), g(x)$ *là hai hàm trong* (a, b). *Khi đó*

- $f(x) \pm g(x)$ *liên tục trong* (a, b);
- $f(x).g(x)$ *(nói riêng* $Cf(x)$ *với* $C = \text{const}$*) liên tục trong* (a, b);
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *liên tục trong* (a, b) *liên tục trong* (a, b) *trừ những điểm làm cho* $g(x) = 0$.

Từ định lý trên ta suy ra

Mệnh đề 5.1

Các đa thức, phân thức hữu tỷ, các hàm lượng giác, các hàm lượng giác ngược và các hàm hyperbolic là những hàm liên tục. Nói tóm lại: các hàm sơ cấp liên tục trên các khoảng mà hàm số đó xác định.

Hàm số liên tục

Các tính chất của hàm liên tục

Định lý 5.2

(Định lý Weierstrass thứ nhất) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn trên đó.

Định lý 5.3

(Định lý Weierstrass thứ hai) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trên đó.

Định lý 5.4

(Định lý giá trị trung gian) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Khi đó với mọi $\mu \in [m, M]$, $\exists c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \mu$.

Hàm số liên tục

Các tính chất của hàm liên tục

Định lý 5.2

(Định lý Weierstrass thứ nhất) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn trên đó.

Định lý 5.3

(Định lý Weierstrass thứ hai) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trên đó.

Định lý 5.4

(Định lý giá trị trung gian) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Khi đó với mọi $\mu \in [m, M]$, $\exists c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \mu$.

Hàm số liên tục

Các tính chất của hàm liên tục

Định lý 5.2

(Định lý Weierstrass thứ nhất) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn trên đó.

Định lý 5.3

(Định lý Weierstrass thứ hai) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trên đó.

Định lý 5.4

(Định lý giá trị trung gian) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Khi đó với mọi $\mu \in [m, M]$, $\exists c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \mu$.

Hàm số liên tục

Các tính chất của hàm liên tục

Hệ quả 5.1

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ đồng thời $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ví dụ 5.2

Chứng minh rằng phương trình $x^4 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0,1)$.
Xét hàm $f(x) = x^4 - 3x + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$. Do $f(x)$ là hàm sơ cấp nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$ và do đó liên tục trên $[0,1]$.
Hơn nữa, ta có

$$f(0).f(1) = 1.(-1) = -1 < 0.$$

Từ đó, áp dụng định lý giá trị trung gian ta thu được điều phải chứng minh.

Hàm số liên tục

Các tính chất của hàm liên tục

Hệ quả 5.1

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ đồng thời $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ví dụ 5.2

Chứng minh rằng phương trình $x^4 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Xét hàm $f(x) = x^4 - 3x + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$. Do $f(x)$ là hàm sơ cấp nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$ và do đó liên tục trên $[0, 1]$.

Hơn nữa, ta có

$$f(0).f(1) = 1.(-1) = -1 < 0.$$

Từ đó, áp dụng định lý giá trị trung gian ta thu được điều phải chứng minh.

Hàm số liên tục

Các tính chất của hàm liên tục

Hệ quả 5.1

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ đồng thời $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ví dụ 5.2

Chứng minh rằng phương trình $x^4 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Xét hàm $f(x) = x^4 - 3x + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$. Do $f(x)$ là hàm sơ cấp nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$ và do đó liên tục trên $[0, 1]$.

Hơn nữa, ta có

$$f(0).f(1) = 1.(-1) = -1 < 0.$$

Từ đó, áp dụng định lý giá trị trung gian ta thu được điều phải chứng minh.

Hàm số liên tục

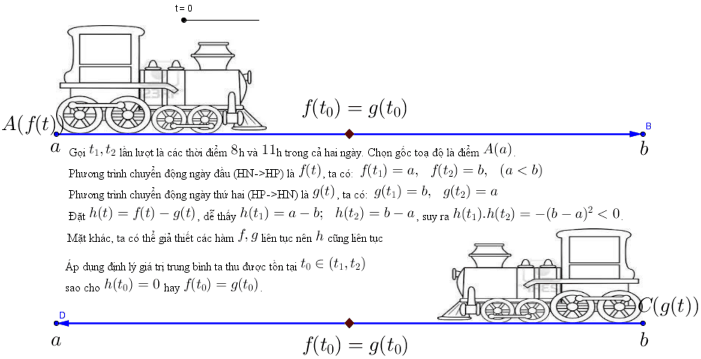
Các tính chất của hàm liên tục

Ví dụ 5.3

Một đoàn tàu xuất phát từ Hà Nội (HN) đi Hải Phòng (HP) lúc $8h$ sáng và đến nơi lúc $11h$ sáng. Ngày hôm sau nó lại khởi hành từ HP lúc $8h$ sáng và đến HN lúc $11h$ sáng. Liệu có tồn tại một điểm trên hành trình mà đoàn tàu sẽ đi qua vào cùng một thời điểm trong cả hai ngày?

Hàm số liên tục

Các tính chất của hàm liên tục

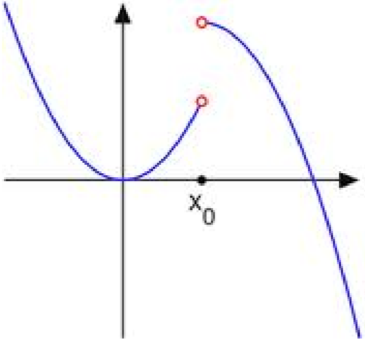


Hàm số liên tục

Điểm gián đoạn của hàm số

Định nghĩa 5.2

Điểm $x = x_0$ được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ nếu $f(x)$ không liên tục tại x_0.



Hàm số liên tục

Điểm gián đoạn của hàm số

Chú ý 5.1

Điểm x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ nếu

- hoặc tại x_0 hàm số $f(x)$ không xác định
- hoặc $f(x)$ xác định tại x_0 nhưng $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, hoặc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Định nghĩa 5.3

Điểm gián đoạn x_0 của hàm $f(x)$ được gọi là điểm gián đoạn loại 1 nếu

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) =: f(x_0 - 0), \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) =: f(x_0 + 0)$$

và đại lượng

$$|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)| = \lambda$$

được gọi là bước nhảy.
Các điểm gián đoạn còn lại được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Hàm số liên tục

Điểm gián đoạn của hàm số

Chú ý 5.1

Điểm x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ nếu

- hoặc tại x_0 hàm số $f(x)$ không xác định
- hoặc $f(x)$ xác định tại x_0 nhưng $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Định nghĩa 5.3

Điểm gián đoạn x_0 của hàm $f(x)$ được gọi là điểm gián đoạn loại 1 nếu

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) =: f(x_0 - 0)\,, \quad \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) =: f(x_0 + 0)$$

và đại lượng

$$|f(x_0+0) - f(x_0-0)| = \lambda$$

được gọi là bước nhảy.

Các điểm gián đoạn còn lại được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Hàm số liên tục

Điểm gián đoạn của hàm số

Chú ý 5.1

Điểm x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ nếu

- hoặc tại x_0 hàm số $f(x)$ không xác định
- hoặc $f(x)$ xác định tại x_0 nhưng $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Định nghĩa 5.3

Điểm gián đoạn x_0 của hàm $f(x)$ được gọi là điểm gián đoạn loại 1 nếu

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) =: f(x_0 - 0), \quad \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) =: f(x_0 + 0)$$

và đại lượng

$$|f(x_0+0) - f(x_0-0)| = \lambda$$

được gọi là bước nhảy.
Các điểm gián đoạn còn lại được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Hàm số liên tục

Điểm gián đoạn của hàm số

Ví dụ 5.4

Xét hàm $f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x < 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \\ 1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$.

Tại $x = 0$ ta có $f(0-0) = -1 \neq 1 = f(0+0)$ nên điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số trên.

Ví dụ 5.5

Phân loại điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{x-1}{x}}}$.

($x = 1$: loại 2; $x = 0$: loại 1.)

Hàm số liên tục

Điểm gián đoạn của hàm số

Ví dụ 5.4

Xét hàm $f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x < 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \\ 1, & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$.

Tại $x = 0$ ta có $f(0-0) = -1 \neq 1 = f(0+0)$ nên điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số trên.

Ví dụ 5.5

Phân loại điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{x-1}{x}}}$.

($x = 1$: loại 2; $x = 0$: loại 1.)

Hàm số liên tục

Hàm liên tục đều

Định nghĩa 5.4

Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục đều trong (a,b) nếu

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\quad x_1,x_2\in(a,b),|x_1-x_2|<\delta\Longrightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Định lý 5.5

(Định lý Cantor) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn đóng $[a,b]$ thì nó liên tục đều trên đoạn đó.

Hàm số liên tục

Hàm liên tục đều

Định nghĩa 5.4

Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục đều trong (a, b) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad x_1, x_2 \in (a, b), |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Định lý 5.5

(Định lý Cantor) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn đóng $[a, b]$ thì nó liên tục đều trên đoạn đó.

Nội dung

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm

Định nghĩa 6.1

Giả sử $f(x)$ xác định trong (a, b), lấy điểm $x_0 \in (a, b)$, cho x_0 một số gia Δx ta được điểm $x_0 + \Delta x \in (a, b)$.
Gọi $\Delta y = f(x_0 + \Delta) - f(x_0)$ là số gia của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0.
Nếu giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

tồn tại hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, ký hiệu

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{hay} \quad y^{'}(x_0) = f^{'}(x_0).$$

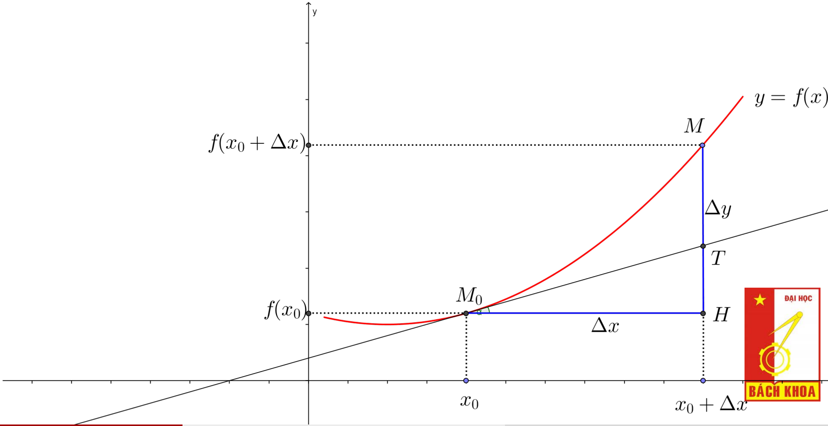
Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm (hay khả vi) tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói hàm số có đạo hàm trong khoảng đó.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm

Ý nghĩa hình học của đạo hàm

$f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$



Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Xét chất điểm M chuyển động thẳng, không đều với quãng đường $x(t)$ tính từ điểm O nào đó. Khi đó, vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 nào đó được tính bởi công thức

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0).$$

Ví dụ 6.1

Một quả bóng được ném vào không khí với vận tốc đầu $39.2\ (m/s)$. Độ cao của nó (m) sau thời gian $t(s)$ được cho bởi $h(t) = 39.2t - 4.9t^2$. Tìm vận tốc của quả bóng khi $t = 3(s)$ và khi $t = 5(s)$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

"Máy tính đạo hàm"

Đạo hàm và vi phân

Các phép toán với đạo hàm

Định lý 6.1

Nếu $u(x)$ *và* $v(x)$ *là những hàm số khả vi thì*

$$y = u \pm v \Longrightarrow y' = u' \pm v'$$

$$y = C \quad (C - \text{const}) \Longrightarrow y' = C' = 0$$

$$y = u.v \Longrightarrow y' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$y = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0) \Longrightarrow y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y = \frac{C}{v} \quad (C - \text{const}, v \neq 0) \Longrightarrow y' = \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}.v'$$

Đạo hàm và vi phân

Các phép toán với đạo hàm

Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x, hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f(u) = f\left[g(x)\right]$ cũng có đạo hàm theo x và

$$y^{'}(x) = f^{'}(u).u^{'}(x).$$

Đạo hàm của hàm ngược

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm theo $x, f^{'}(x) \neq 0$, và nếu tồn tại hàm ngược $x = \varphi(y)$, thì hàm số $x = \varphi(y)$ cũng có đạo hàm tại điểm $y = f(x)$ và ta có

$$\varphi^{'}(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

hay là

$$\boxed{x^{'}(y) = \frac{1}{y'(x)}.}$$

Đạo hàm và vi phân

Các phép toán với đạo hàm

Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x, hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f(u) = f\left[g(x)\right]$ cũng có đạo hàm theo x và

$$y^{'}(x) = f^{'}(u).u^{'}(x).$$

Đạo hàm của hàm ngược

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm theo $x, f^{'}(x) \neq 0$, và nếu tồn tại hàm ngược $x = \varphi(y)$, thì hàm số $x = \varphi(y)$ cũng có đạo hàm tại điểm $y = f(x)$ và ta có

$$\varphi^{'}(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

hay là

$$\boxed{x^{'}(y) = \frac{1}{y'(x)}.}$$

Đạo hàm và vi phân

Các phép toán với đạo hàm

Ví dụ 6.2

1. Xét hàm $y = \arcsin x : \quad [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó $x = \sin y$, suy ra

$$x'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Vậy $y'(x) = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2. Xét hàm $y = \arctan x : \quad (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $x = \tan y$, suy ra

$$x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2.$$

Vậy $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

3. Hoàn toàn tương tự ta có $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\quad (\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Đạo hàm và vi phân

Các phép toán với đạo hàm

Ví dụ 6.2

1. Xét hàm $y = \arcsin x : \quad [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó $x = \sin y$, suy ra
$$x'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$
Vậy $y'(x) = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2. Xét hàm $y = \arctan x : \quad (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $x = \tan y$, suy ra
$$x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2.$$
Vậy $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

3. Hoàn toàn tương tự ta có $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\quad (\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Đạo hàm và vi phân

Các phép toán với đạo hàm

Ví dụ 6.2

1. Xét hàm $y = \arcsin x: \quad [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó $x = \sin y$, suy ra
$$x^{'}(y) = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$
Vậy $y^{'}(x) = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Xét hàm $y = \arctan x: \quad (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $x = \tan y$, suy ra
$$x^{'}(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2.$$
Vậy $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Hoàn toàn tương tự ta có $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm một phía

Định nghĩa 6.2

Nếu tồn tại

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0 + 0)$$

thì ta nói hàm số có đạo hàm bên phải tại điểm x_0.
Tương tự ta cũng có

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0 - 0)$$

gọi là đạo hàm bên trái tại điểm x_0.
Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì

$$f^{'}(x_0 + 0) = f^{'}(x_0 - 0) = f^{'}(x_0)$$

và hàm số liên tục tại điểm x_0.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân

Định nghĩa 6.3

Nếu số gia Δy của hàm số $y = f(x)$ viết được dưới dạng

$$\boxed{\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f(x) = A.\Delta x + \alpha.\Delta x,}$$

trong đó A là hằng số chỉ phụ thuộc x, không phụ thuộc Δx, còn α là VCB khi $\Delta x \to 0$; thì đại lượng $A.\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x; ký hiệu $dy = A.\Delta x$. Người ta đã chứng minh rằng $A = f^{'}(x)$, và khi $y = x$ thì $dy = dx$ nên $dx = \Delta x$ và ta có

$$\boxed{dy = f^{'}(x)dx}$$

là công thức tính vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x. Khi đó ta cũng nói hàm số khả vi tại điểm x (có đạo hàm tại điểm x).

Đạo hàm và vi phân

Vi phân

Các qui tắc tính vi phân

- $dC = 0, \quad C - \text{const};$
- $d(Cf) = Cdf;$
- $d(f \pm g) = df \pm dg;$
- $d(fg) = fdg + gdf;$
- $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$

Ví dụ 6.3

Giả sử $y = x^2 + 1$. Ta có $dy = f'(x)dx = 2xdx$.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân

Các qui tắc tính vi phân

- $dC = 0, \quad C - \text{const};$
- $d\left(Cf\right) = Cdf;$
- $d\left(f \pm g\right) = df \pm dg;$
- $d\left(fg\right) = fdg + gdf;$
- $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$

Ví dụ 6.3

Giả sử $y = x^2 + 1$. Ta có $dy = f^{'}(x)dx = 2xdx$.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân

Ứng dụng vi phân tính gần đúng

Trong công thức định nghĩa vi phân, bỏ qua đại lượng VCB α ta thu được công thức xấp xỉ

$$\boxed{f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f^{'}\left(x_0\right).\Delta x.}$$

Ví dụ 6.4

Tính gần đúng $\sin 29^\circ$.

Giải: Chọn

$f(x) = \sin x \Longrightarrow f^{'}(x) = \cos x; \quad x_0 = 30^\circ; \quad \Delta x = -1^\circ = -\dfrac{3.14}{180} = -0.0174$. Áp dụng công thức gần đúng trên ta có

$$\sin 29^\circ = \sin(30^\circ - 1^\circ) \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ.(-0.0174) = 0.4849.$$

Đạo hàm và vi phân

Vi phân

Ứng dụng vi phân tính gần đúng

Trong công thức định nghĩa vi phân, bỏ qua đại lượng VCB α ta thu được công thức xấp xỉ

$$\boxed{f\left(x_0+\Delta x\right) \approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right).\Delta x.}$$

Ví dụ 6.4

Tính gần đúng $\sin 29^\circ$.

Giải: Chọn

$f(x)=\sin x \Longrightarrow f'(x)=\cos x;\quad x_0=30^\circ;\quad \Delta x=-1^\circ=-\dfrac{3.14}{180}=-0.0174.$ Áp dụng công thức gần đúng trên ta có

$$\sin 29^\circ=\sin(30^\circ-1^\circ)\approx \sin 30^\circ+\cos 30^\circ.(-0.0174)=0.4849.$$

Đạo hàm và vi phân

Vi phân

Ứng dụng vi phân tính gần đúng

Trong công thức định nghĩa vi phân, bỏ qua đại lượng VCB α ta thu được công thức xấp xỉ

$$\boxed{f\left(x_0+\Delta x\right) \approx f\left(x_0\right)+f^{'}\left(x_0\right).\Delta x.}$$

Ví dụ 6.4

Tính gần đúng $\sin 29^\circ$.

Giải: Chọn

$f(x)=\sin x \Longrightarrow f^{'}(x)=\cos x;\quad x_0=30^\circ;\quad \Delta x=-1^\circ=-\dfrac{3.14}{180}=-0.0174.$ Áp dụng công thức gần đúng trên ta có

$$\sin 29^\circ=\sin(30^\circ-1^\circ)\approx \sin 30^\circ+\cos 30^\circ.(-0.0174)=0.4849.$$

Đạo hàm và vi phân

Vi phân

Tính bất biến của vi phân cấp 1

- Nếu hàm f khả vi và x là biến độc lập thì ta có

$$df = f^{'}(x)dx. \tag{6.1}$$

- Giả $x = x(t)$ là hàm khả vi theo biến t còn $f = f(x)$ khả vi theo đối x. Khi đó t là biến độc lập, x là biến trung gian. Ta có

$$df = f^{'}(t)dt = f^{'}(x).x^{'}(t)dt = f^{'}(x)dx.$$

- Vậy dù x là biến độc lập hay là biến trung gian $x = x(t)$ thì vi phân của hàm $f(x)$ luôn có dạng (6.1). Đó chính là tính bất biến của vi phân cấp 1.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân

Tính bất biến của vi phân cấp 1

- Nếu hàm f khả vi và x là biến độc lập thì ta có

$$df = f^{'}(x)dx. \tag{6.1}$$

- Giả $x = x(t)$ là hàm khả vi theo biến t còn $f = f(x)$ khả vi theo đối x. Khi đó t là biến độc lập, x là biến trung gian. Ta có

$$df = f^{'}(t)dt = f^{'}(x).x^{'}(t)dt = f^{'}(x)dx.$$

- Vậy dù x là biến độc lập hay là biến trung gian $x = x(t)$ thì vi phân của hàm $f(x)$ luôn có dạng (6.1). Đó chính là tính bất biến của vi phân cấp 1.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân

Tính bất biến của vi phân cấp 1

- Nếu hàm f khả vi và x là biến độc lập thì ta có
$$df = f^{'}(x)dx. \tag{6.1}$$
- Giả $x = x(t)$ là hàm khả vi theo biến t còn $f = f(x)$ khả vi theo đối x. Khi đó t là biến độc lập, x là biến trung gian. Ta có
$$df = f^{'}(t)dt = f^{'}(x).x^{'}(t)dt = f^{'}(x)dx.$$
- Vậy dù x là biến độc lập hay là biến trung gian $x = x(t)$ thì vi phân của hàm $f(x)$ luôn có dạng (6.1). Đó chính là tính bất biến của vi phân cấp 1.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm của hàm cho theo tham số

Cho $x = f(t), y = g(t)$ là hai hàm khả vi đối với biến $t \in (\alpha, \beta)$ và giả sử tồn tại hàm ngược $t = f^{-1}(x) = t(x)$. Khi đó ta có

$$y = g(t) = g(t(x)) = y(x)$$

xác định hàm $y(x)$ phụ thuộc vào biến x theo nghĩa thông thường.

Vậy hàm $y(x)$ xác định bởi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ gọi là hàm cho theo tham biến (tham số) t.

Vấn đề

Tính $y'(x)$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm của hàm cho theo tham số

Cho $x = f(t), y = g(t)$ là hai hàm khả vi đối với biến $t \in (\alpha, \beta)$ và giả sử tồn tại hàm ngược $t = f^{-1}(x) = t(x)$. Khi đó ta có

$$y = g(t) = g(t(x)) = y(x)$$

xác định hàm $y(x)$ phụ thuộc vào biến x theo nghĩa thông thường.

Vậy hàm $y(x)$ xác định bởi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ gọi là hàm cho theo tham biến (tham số) t.

Vấn đề

Tính $y^{'}(x)$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm của hàm cho theo tham số

Từ tính bất biến của vi phân cấp 1 ta có

$$\begin{aligned} dy &= y'(t)dt \\ dx &= x'(t)dt \end{aligned}$$

Do đó

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Ví dụ 6.5

Tính đạo hàm của hàm $y = y(x)$ cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Giải: Ta có

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm của hàm cho theo tham số

Từ tính bất biến của vi phân cấp 1 ta có

$$\begin{aligned} dy &= y^{'}(t)dt \\ dx &= x^{'}(t)dt \end{aligned}$$

Do đó

$$y^{'}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y^{'}(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y^{'}(t)}{x'(t)}.$$

Ví dụ 6.5

Tính đạo hàm của hàm $y = y(x)$ cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Giải: Ta có

$$y^{'}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm $y^{'} = f^{'}(x)$ gọi là đạo hàm cấp 1.
Nếu hàm số $f^{'}(x)$ có đạo hàm, thì đạo hàm của đạo hàm cấp 1 gọi là đạo hàm cấp 2, ký hiệu

$$y^{''} = \left(f^{'}(x)\right)^{'} = f^{''}(x);$$

tương tự có $y^{'''}$.
Một cách tổng quát ta có:

Định nghĩa 6.4

Đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ (nếu có) thì gọi là đạo hàm cấp n, ký hiệu:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}(x)\right)^{'} = f^{(n)}(x), \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm $y^{'} = f^{'}(x)$ gọi là đạo hàm cấp 1.
Nếu hàm số $f^{'}(x)$ có đạo hàm, thì đạo hàm của đạo hàm cấp 1 gọi là đạo hàm cấp 2, ký hiệu

$$y^{''} = \left(f^{'}(x)\right)^{'} = f^{''}(x);$$

tương tự có $y^{'''}$.
Một cách tổng quát ta có:

Định nghĩa 6.4

Đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ (nếu có) thì gọi là đạo hàm cấp n, ký hiệu:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}(x)\right)^{'} = f^{(n)}(x), \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm $y^{'} = f^{'}(x)$ gọi là đạo hàm cấp 1.
Nếu hàm số $f^{'}(x)$ có đạo hàm, thì đạo hàm của đạo hàm cấp 1 gọi là đạo hàm cấp 2, ký hiệu

$$y^{''} = \left(f^{'}(x)\right)^{'} = f^{''}(x);$$

tương tự có $y^{'''}$.
Một cách tổng quát ta có:

Định nghĩa 6.4

Đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ (nếu có) thì gọi là đạo hàm cấp n, ký hiệu:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}(x)\right)^{'} = f^{(n)}(x), \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ 6.6

Xét hàm $f(x) = x^\alpha$. Ta có $f^{'}(x) = \alpha.x^{\alpha-1}$; $f^{''}(x) = \alpha(\alpha-1).x^{\alpha-2}$. Tổng quát ta có

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$$

Ví dụ 6.7

Xét hàm $f(x) = e^x$. Ta có $f^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Với $g(x) = a^x$ thì $g^{(n)}(x) = a^x\,(\ln a)^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 6.8

Với $f(x) = \sin x$ thì $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$;

Với $f(x) = \cos x$ thì $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ 6.6

Xét hàm $f(x) = x^\alpha$. Ta có $f'(x) = \alpha.x^{\alpha-1}$; $f''(x) = \alpha(\alpha-1).x^{\alpha-2}$. Tổng quát ta có

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$$

Ví dụ 6.7

Xét hàm $f(x) = e^x$. Ta có $f^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Với $g(x) = a^x$ thì $g^{(n)}(x) = a^x\,(\ln a)^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 6.8

Với $f(x) = \sin x$ thì $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$;
Với $f(x) = \cos x$ thì $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ 6.6

Xét hàm $f(x) = x^\alpha$. Ta có $f^{'}(x) = \alpha.x^{\alpha-1}$; $f^{''}(x) = \alpha(\alpha-1).x^{\alpha-2}$. Tổng quát ta có

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$$

Ví dụ 6.7

Xét hàm $f(x) = e^x$. Ta có $f^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Với $g(x) = a^x$ thì $g^{(n)}(x) = a^x\,(\ln a)^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 6.8

Với $f(x) = \sin x$ thì $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$;

Với $f(x) = \cos x$ thì $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ 6.9

Xét $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$. Ta có

$$f^{(n)}(x) = \left[(1+x)^{-1}\right]^{(n)} = (-1)(-1-1)\cdots(-1-n+1)(1+x)^{-1-n}$$
$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Ví dụ 6.10

Xét $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$. Ta có

$$f^{(n)}(x) = \left[(1-x)^{-1}\right]^{(n)} = (-1)(-1-1)\cdots(-1-n+1)(-1)^n(1-x)^{-1-n}$$
$$= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ 6.9

Xét $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$. Ta có

$$f^{(n)}(x) = \left[(1+x)^{-1}\right]^{(n)} = (-1)(-1-1)\cdots(-1-n+1)(1+x)^{-1-n}$$
$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Ví dụ 6.10

Xét $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$. Ta có

$$f^{(n)}(x) = \left[(1-x)^{-1}\right]^{(n)} = (-1)(-1-1)\cdots(-1-n+1)(-1)^n(1-x)^{-1-n}$$
$$= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Các qui tắc tính đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại $f^{(n)}(x)$ và $g^{(n)}(x)$. Khi đó

1. $(Cf(x))^{(n)}(x) = Cf^{(n)}(x)$;
2. $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;
3. $(f(x).g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ với $g^{(0)}(x) \equiv g(x)$ (qui tắc Leibniz).

Ví dụ 6.11

1. Cho $y = x \ln x$, tính $y^{(5)}$;
2. Cho $y = x^2 \cos x$, tính $y^{(30)}$;
3. Cho $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{1 - x}$, tính $y^{(50)}$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Các qui tắc tính đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại $f^{(n)}(x)$ và $g^{(n)}(x)$. Khi đó

1. $(Cf(x))^{(n)}(x) = Cf^{(n)}(x)$;
2. $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;
3. $(f(x).g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ với $g^{(0)}(x) \equiv g(x)$ (qui tắc Leibniz).

Ví dụ 6.11

1. Cho $y = x \ln x$, tính $y^{(5)}$;
2. Cho $y = x^2 \cos x$, tính $y^{(30)}$;
3. Cho $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{1 - x}$, tính $y^{(50)}$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Các qui tắc tính đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại $f^{(n)}(x)$ và $g^{(n)}(x)$. Khi đó

1. $(Cf(x))^{(n)}(x) = Cf^{(n)}(x)$;
2. $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;
3. $(f(x).g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ với $g^{(0)}(x) \equiv g(x)$ (qui tắc Leibniz).

Ví dụ 6.11

1. Cho $y = x \ln x$, tính $y^{(5)}$;
2. Cho $y = x^2 \cos x$, tính $y^{(30)}$;
3. Cho $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{1 - x}$, tính $y^{(50)}$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Các qui tắc tính đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại $f^{(n)}(x)$ và $g^{(n)}(x)$. Khi đó

1. $(Cf(x))^{(n)}(x) = Cf^{(n)}(x)$;
2. $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;
3. $(f(x).g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ với $g^{(0)}(x) \equiv g(x)$ (qui tắc Leibniz).

Ví dụ 6.11

1. Cho $y = x \ln x$, tính $y^{(5)}$;
2. Cho $y = x^2 \cos x$, tính $y^{(30)}$;
3. Cho $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{1 - x}$, tính $y^{(50)}$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm cấp cao

Các qui tắc tính đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại $f^{(n)}(x)$ và $g^{(n)}(x)$. Khi đó

1. $(Cf(x))^{(n)}(x) = Cf^{(n)}(x)$;
2. $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;
3. $(f(x).g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ với $g^{(0)}(x) \equiv g(x)$ (qui tắc Leibniz).

Ví dụ 6.11

1. Cho $y = x \ln x$, tính $y^{(5)}$;
2. Cho $y = x^2 \cos x$, tính $y^{(30)}$;
3. Cho $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{1 - x}$, tính $y^{(50)}$.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân cấp cao

Định nghĩa 6.5

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm (khả vi) thì $dy = f^{'}(x)dx$ gọi là vi phân cấp 1.
Vi phân của vi phân cấp 1 gọi là vi phân cấp 2, ký hiệu

$$d^2y = d(dy) = f^{''}(x)dx^2 \quad (*).$$

Tương tự ta cũng có $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$.

Chú ý 6.1

Nếu $y = f(u), \quad u = \varphi(x)$ thì

$$dy = f^{'}.u^{'}(x)dx = f^{'}du$$

$$d^2y = f^{''}du^2 + f^{'}d^2u \quad \text{(không có dạng (*))}.$$

Như vậy, nói chung vi phân cấp cao không có tính bất biến như vi phân cấp 1.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân cấp cao

Định nghĩa 6.5

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm (khả vi) thì $dy = f^{'}(x)dx$ gọi là vi phân cấp 1.
Vi phân của vi phân cấp 1 gọi là vi phân cấp 2, ký hiệu

$$d^2y = d(dy) = f^{''}(x)dx^2 \quad (*).$$

Tương tự ta cũng có $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$.

Chú ý 6.1

Nếu $y = f(u), \quad u = \varphi(x)$ thì

$$dy = f^{'}.u^{'}(x)dx = f^{'}du$$
$$d^2y = f^{''}du^2 + f^{'}d^2u \quad \text{(không có dạng (*))}.$$

Như vậy, nói chung vi phân cấp cao không có tính bất biến như vi phân cấp 1.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân cấp cao

Ví dụ 6.12

Xét $f(x) = x^2$, ta có

$$df = 2xdx; \quad d^2f = 2dx^2. \tag{6.2}$$

Ví dụ 6.13

Xét $f = t^4$ và $x = t^2$. Ta có

$$df = 4t^3dt, \quad d^2f = 12t^2dt^2. \tag{6.3}$$

Mặt khác, $dx^2 = (2tdt)^2 = 4t^2dt^2$. Nếu công thức (6.2) đúng thì ta có

$$d^2f = 2dx^2 = 8t^2dt^2.$$

Điều này mâu thuẫn với (6.3).

Đạo hàm và vi phân

Vi phân cấp cao

Ví dụ 6.12

Xét $f(x) = x^2$, ta có

$$df = 2xdx; \quad d^2f = 2dx^2. \tag{6.2}$$

Ví dụ 6.13

Xét $f = t^4$ và $x = t^2$. Ta có

$$df = 4t^3dt, \quad d^2f = 12t^2dt^2. \tag{6.3}$$

Mặt khác, $dx^2 = (2tdt)^2 = 4t^2dt^2$. Nếu công thức (6.2) đúng thì ta có

$$d^2f = 2dx^2 = 8t^2dt^2.$$

Điều này mâu thuẫn với (6.3).

Đạo hàm và vi phân

Vi phân cấp cao

Qui tắc Leibniz

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^u . d^{n-k} v$$

Ví dụ 6.14

Cho $y = x^3 e^x$, tính $d^{10} y$.

Nội dung

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Các định lý về hàm khả vi

Định nghĩa 7.1

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên (a,b), ta bảo hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a,b)$ nếu $\exists U(x_0) \subset (a,b)$ sao cho $f(x) - f(x_0)$ không đổi dấu $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

- Nếu $f(x) - f(x_0) < 0$ thì ta bảo hàm số đạt cực tiểu tại x_0.
- Nếu $f(x) - f(x_0) > 0$ thì ta bảo hàm số đạt cực đại tại x_0.

Định lý 7.1

(Định lý Fermat) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$. Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại điểm $c \in (a,b)$, và nếu $\exists f'(c)$ thì $f'(c) = 0$.

Định lý 7.2

(Định lý Rolle) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trong khoảng mở (a,b) đồng thời $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Các định lý về hàm khả vi

Định nghĩa 7.1

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b), ta bảo hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu $\exists U(x_0) \subset (a, b)$ sao cho $f(x) - f(x_0)$ không đổi dấu $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

- Nếu $f(x) - f(x_0) < 0$ thì ta bảo hàm số đạt cực tiểu tại x_0.
- Nếu $f(x) - f(x_0) > 0$ thì ta bảo hàm số đạt cực đại tại x_0.

Định lý 7.1

(Định lý Fermat) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại điểm $c \in (a, b)$, và nếu $\exists f^{'}(c)$ thì $f^{'}(c) = 0$.

Định lý 7.2

(Định lý Rolle) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng mở (a, b) đồng thời $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f^{'}(c) = 0$.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Các định lý về hàm khả vi

Định nghĩa 7.1

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b), ta bảo hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu $\exists U(x_0) \subset (a, b)$ sao cho $f(x) - f(x_0)$ không đổi dấu $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

- Nếu $f(x) - f(x_0) < 0$ thì ta bảo hàm số đạt cực tiểu tại x_0.
- Nếu $f(x) - f(x_0) > 0$ thì ta bảo hàm số đạt cực đại tại x_0.

Định lý 7.1

(Định lý Fermat) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại điểm $c \in (a, b)$, và nếu $\exists f^{'}(c)$ thì $f^{'}(c) = 0$.

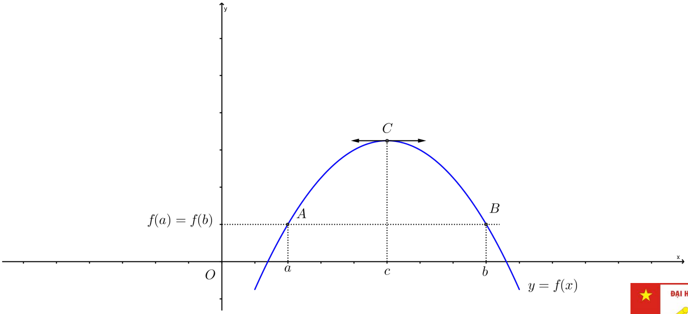
Định lý 7.2

(Định lý Rolle) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng mở (a, b) đồng thời $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f^{'}(c) = 0$.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Các định lý về hàm khả vi

Minh hoạ hình học của định lý Rolle: Với giả thiết của định lý thì $\exists c \in (a, b)$ mà tại đó tiếp tuyến với đồ thị song song với trục hoành.



Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Các định lý về hàm khả vi

Định lý 7.3

(Định lý Lagrange)
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng mở (a, b) đồng thời $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(c). \tag{7.1}$$

Công thức số gia giới nội

Công thức (7.1) còn có dạng

$$f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b - a). \tag{7.2}$$

Trong (7.2), đặt $a = x$; $b = x + h$ và viết $c = x + \theta h, \quad 0 < \theta < 1$ thì ta thu được

$$f(x + h) - f(x) = f^{'}(x + \theta h)h. \tag{7.3}$$

Công thức (7.3) được gọi là công thức "số gia giới nội" hay công thức "số gia hữu hạn".

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Các định lý về hàm khả vi

Định lý 7.3

(Định lý Lagrange)
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng mở (a, b) đồng thời $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(c). \tag{7.1}$$

Công thức số gia giới nội

Công thức (7.1) còn có dạng

$$f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b - a). \tag{7.2}$$

Trong (7.2), đặt $a = x$; $b = x + h$ và viết $c = x + \theta h, \quad 0 < \theta < 1$ thì ta thu được

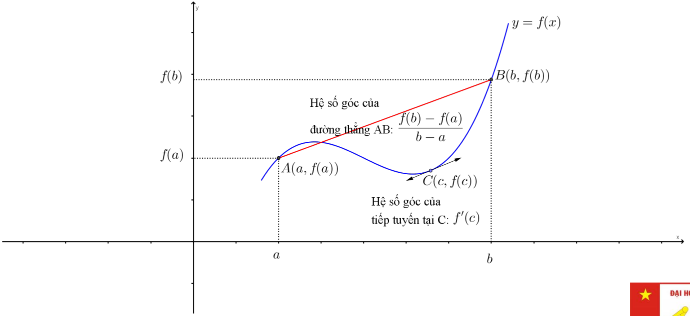
$$f(x + h) - f(x) = f^{'}(x + \theta h)h. \tag{7.3}$$

Công thức (7.3) được gọi là công thức "số gia giới nội" hay công thức "số gia hữu hạn".

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Các định lý về hàm khả vi

Minh hoạ hình học của định lý Lagrange: Với giả thiết của định lý thì $\exists c \in (a, b)$ sao cho tuyến tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại đó song song với dây cung AB.



Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Các định lý về hàm khả vi

Định lý 7.4

(Định lý Cauchy)
Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn đóng $[a, b]$ và khả vi trong khoảng mở (a, b), đồng thời $g^{'}(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g'(c)}. \tag{7.4}$$

Chú ý 7.1

- Trong (7.4) nếu chọn $g(x) = x$ thì ta thu được công thức (7.1) ở định lý Lagrange, nghĩa là định lý Lagrange chính là trường hợp riêng của định lý Cauchy.
- Nếu trong (7.1) có $f(a) = f(b)$ thì $f^{'}(c) = 0$, hay nói cách khác, định lý Rolle là trường hợp riêng của định lý Lagrange.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Các định lý về hàm khả vi

Định lý 7.4

(Định lý Cauchy)
Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn đóng $[a, b]$ và khả vi trong khoảng mở (a, b), đồng thời $g^{'}(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}. \tag{7.4}$$

Chú ý 7.1

- Trong (7.4) nếu chọn $g(x) = x$ thì ta thu được công thức (7.1) ở định lý Lagrange, nghĩa là định lý Lagrange chính là trường hợp riêng của định lý Cauchy.
- Nếu trong (7.1) có $f(a) = f(b)$ thì $f^{'}(c) = 0$, hay nói cách khác, định lý Rolle là trường hợp riêng của định lý Lagrange.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Định lý 7.5

Cho hàm $f(x)$ liên tục trong đoạn đóng $[a, b]$, khả vi đến $(n+1)$ lần trong khoảng mở (a, b). Khi đó với $x_0 \in (a, b)$ bất kỳ ta có

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (7.5)$$

trong đó $\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 \le \theta \le 1.$

Công thức (7.6) được gọi là "công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange" và phép biểu diễn hàm $f(x)$ dưới dạng (7.6) được gọi là "khai triển Taylor hữu hạn" của hàm $f(x)$ tại lân cận của điểm $x = x_0$.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Định lý 7.5

Cho hàm $f(x)$ liên tục trong đoạn đóng $[a,b]$, khả vi đến $(n+1)$ lần trong khoảng mở (a,b). Khi đó với $x_0 \in (a,b)$ bất kỳ ta có

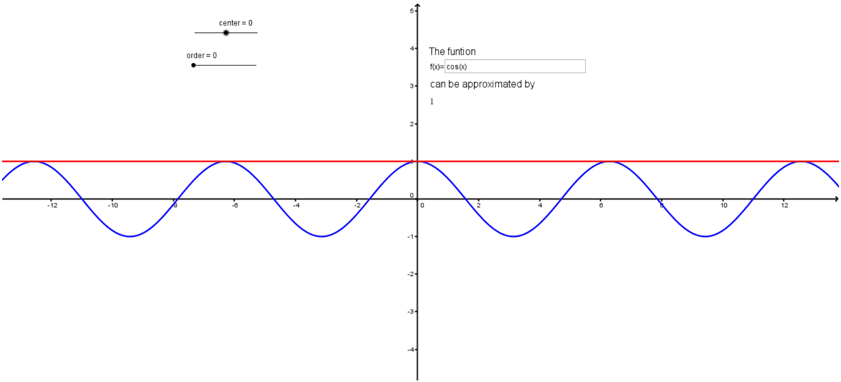
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (7.5)$$

trong đó $\xi = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 \le \theta \le 1.$

Công thức (7.6) được gọi là "công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange" và phép biểu diễn hàm $f(x)$ dưới dạng (7.6) được gọi là "khai triển Taylor hữu hạn" của hàm $f(x)$ tại lân cận của điểm $x = x_0$.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin



Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.1

Viết khai triển Taylor hữu hạn đến bậc 3 của hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tại lân cận điểm $x_0 = 1$.

Áp dụng tính gần đúng $f(1.1)$.

Giải: Từ $f(x) = x^{-1/2}$ ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2};\quad f''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2};\quad f'''(x) = -\frac{15}{8}x^{-7/2};\quad f^{(4)}(x) = \frac{105}{16}x^{-9/2}.$$

Do đó, công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange tại lân cận $x = 1$ có dạng

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{1!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{1!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{105}{384\xi^{9/2}}(x-1)^4. \end{aligned}$$

Thay $x = 1.1$ ta thu được $f(1.1) \approx 0.953656$ (giá trị chính xác: $\dfrac{1}{\sqrt{1.1}} = 0.953462589\ldots$).

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.1

Viết khai triển Taylor hữu hạn đến bậc 3 của hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ tại lân cận điểm $x_0 = 1$.

Áp dụng tính gần đúng $f(1.1)$.
Giải: Từ $f(x) = x^{-1/2}$ ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}; \quad f''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2}; \quad f'''(x) = -\frac{15}{8}x^{-7/2}; \quad f^{(4)}(x) = \frac{105}{16}x^{-9/2}.$$

Do đó, công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange tại lân cận $x = 1$ có dạng

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{1!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{1!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{105}{384\xi^{9/2}}(x-1)^4. \end{aligned}$$

Thay $x = 1.1$ ta thu được $f(1.1) \approx 0.953656$ (giá trị chính xác: $\frac{1}{\sqrt{1.1}} = 0.953462589\ldots$).

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.1

Viết khai triển Taylor hữu hạn đến bậc 3 của hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tại lân cận điểm $x_0 = 1$.

Áp dụng tính gần đúng $f(1.1)$.
Giải: Từ $f(x) = x^{-1/2}$ ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2};\quad f''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2};\quad f'''(x) = -\frac{15}{8}x^{-7/2};\quad f^{(4)}(x) = \frac{105}{16}x^{-9/2}.$$

Do đó, công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange tại lân cận $x = 1$ có dạng

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{1!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{1!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{105}{384\xi^{9/2}}(x-1)^4. \end{aligned}$$

Thay $x = 1.1$ ta thu được $f(1.1) \approx 0.953656$ (giá trị chính xác: $\dfrac{1}{\sqrt{1.1}} = 0.953462589\ldots$).

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Trong công thức (7.6), nếu $f^{(n+1)}(x)$ bị chặn trên (a, b) thì phần dư có dạng $o\left((x-x_0)^n\right)$ và ta có

Công thức khai triển Taylor với phần dư dạng Peano

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right). \quad (7.6)$$

Công thức khai triển Maclaurin

Trong công thức (7.6), khi $x_0 = 0$ ta có công thức Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (7.7)$$

Sau đây, ta xét khai triển Maclaurin của một số hàm thường gặp.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Trong công thức (7.6), nếu $f^{(n+1)}(x)$ bị chặn trên (a,b) thì phần dư có dạng $o\left((x-x_0)^n\right)$ và ta có

Công thức khai triển Taylor với phần dư dạng Peano

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right). \quad (7.6)$$

Công thức khai triển Maclaurin

Trong công thức (7.6), khi $x_0 = 0$ ta có công thức Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (7.7)$$

Sau đây, ta xét khai triển Maclaurin của một số hàm thường gặp.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.2

Xét hàm $f(x) = e^x$. Do $f^{(n)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(0) = 1\ \forall n$ nên ta có

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).}$$

Ví dụ 7.3

Xét hàm $f(x) = \sin x$. Ta có $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & \text{với } n = 2k \\ (-1)^k \cos x, & \text{với } n = 2k+1 \end{cases}$. Suy ra

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Vậy

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right)}$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.2

Xét hàm $f(x) = e^x$. Do $f^{(n)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(0) = 1\ \forall n$ nên ta có

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).}$$

Ví dụ 7.3

Xét hàm $f(x) = \sin x$. Ta có $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & \text{với } n = 2k \\ (-1)^k \cos x, & \text{với } n = 2k+1 \end{cases}$. Suy ra

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Vậy

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right)}$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.4

Xét hàm $f(x) = \cos x$. Ta có $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x, & \text{với } n = 2k \\ (-1)^k \sin x, & \text{với } n = 2k+1 \end{cases}$. Suy ra

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad f^{(2k+1)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Vậy

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)}$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.5

Xét hàm $f(x) = (1+x)^\alpha$. Do

$$f(0) = 1; \quad f^{'}(0) = \alpha; \quad f^{''}(0) = \alpha(\alpha-1); \ldots; f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

nên ta có

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).}$$

Với $\alpha = -1$ ta có

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \tag{7.8}$$

Trong công thức (7.9), thay x bởi $-x$ ta thu được

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \tag{7.9}$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.5

Xét hàm $f(x) = (1+x)^\alpha$. Do

$$f(0) = 1; \quad f^{'}(0) = \alpha; \quad f^{''}(0) = \alpha(\alpha-1); \ldots; f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

nên ta có

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).}$$

Với $\alpha = -1$ ta có

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \tag{7.8}$$

Trong công thức (7.9), thay x bởi $-x$ ta thu được

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \tag{7.9}$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.5

Xét hàm $f(x) = (1+x)^\alpha$. Do

$$f(0) = 1; \quad f^{'}(0) = \alpha; \quad f^{''}(0) = \alpha(\alpha-1); \ldots; f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

nên ta có

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).}$$

Với $\alpha = -1$ ta có

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \tag{7.8}$$

Trong công thức (7.9), thay x bởi $-x$ ta thu được

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \tag{7.9}$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Ví dụ 7.6

Xét hàm $f(x) = \ln(1+x)$. Do $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ nên ta có $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.
Suy ra

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \Longrightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Vậy

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right).}$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Định lý 7.6

(Định lý L'Hospital 1): Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ *khả vi tại lân cận điểm* a*,* $g^{'}(x) \neq 0$ *trong lân cận điểm* a *và*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Khi đó nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$ *thì ta cũng có* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Định lý 7.7

(Định lý L'Hospital 2): Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ *khả vi tại lân cận điểm* a*,* $g^{'}(x) \neq 0$ *trong lân cận điểm* a *và* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty;\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty.$

Khi đó nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$ *thì ta cũng có* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Định lý 7.6

(Định lý L'Hospital 1): Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ *khả vi tại lân cận điểm* a*,* $g^{'}(x) \neq 0$ *trong lân cận điểm* a *và*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Khi đó nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$ *thì ta cũng có* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$*.*

Định lý 7.7

(Định lý L'Hospital 2): Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ *khả vi tại lân cận điểm* a*,* $g^{'}(x) \neq 0$ *trong lân cận điểm* a *và* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty;\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$*.*

Khi đó nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$ *thì ta cũng có* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$*.*

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Ý tưởng chứng minh định lý L'Hospital 1 cho trường hợp điểm a hữu hạn:

1. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trong lân cận điểm a, $g'(a) \neq 0, \forall x \neq a$, $f(a) = g(a) = 0$. Với $x \neq a$ ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \overset{(Cauchy)}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (x, a).$$

Khi $x \to a$ thì $c \to a$. Do $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, suy ra

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A.$$

2. Nếu chỉ có $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ mà các hàm số chưa chắc đã xác định tại a. Ta xây dựng các hàm mới

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ f(x), & x \neq a \end{cases}; \quad G(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ g(x), & x \neq a \end{cases}.$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Ý tưởng chứng minh định lý L'Hospital 1 cho trường hợp điểm a hữu hạn:

1. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trong lân cận điểm a, $g^{'}(a) \neq 0, \forall x \neq a$, $f(a) = g(a) = 0$. Với $x \neq a$ ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \overset{(Cauchy)}{=} \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}, \quad c \in (x, a)\,.$$

Khi $x \to a$ thì $c \to a$. Do $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$, suy ra

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)} = A.$$

2. Nếu chỉ có $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ mà các hàm số chưa chắc đã xác định tại a. Ta xây dựng các hàm mới

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ f(x), & x \neq a \end{cases}; \quad G(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ g(x), & x \neq a \end{cases}.$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Chú ý 7.2

1. Qui tắc L'Hospital vẫn đúng với trường hợp $a = \infty$ (khi chứng minh đặt $y = \dfrac{1}{x}$);
2. Qui tắc L'Hospital có thể được áp dụng nhiều lần.
   Ví dụ, xét
3. Qui tắc L'Hospital chỉ là điều kiện đủ mà không là điều kiện cần.
   Ví dụ, xét giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.
4. Trong quá trình tìm giới hạn có dạng vô định, nên kết hợp cả thay tương đương với dùng qui tắc L'Hospital. Có thể dùng qui tắc L'Hospital nhiều lần.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Chú ý 7.2

1. Qui tắc L'Hospital vẫn đúng với trường hợp $a = \infty$ (khi chứng minh đặt $y = \dfrac{1}{x}$);
2. Qui tắc L'Hospital có thể được áp dụng nhiều lần.
   Ví dụ, xét
3. Qui tắc L'Hospital chỉ là điều kiện đủ mà không là điều kiện cần.
   Ví dụ, xét giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.
4. Trong quá trình tìm giới hạn có dạng vô định, nên kết hợp cả thay tương đương với dùng qui tắc L'Hospital. Có thể dùng qui tắc L'Hospital nhiều lần.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Chú ý 7.2

1. Qui tắc L'Hospital vẫn đúng với trường hợp $a = \infty$ (khi chứng minh đặt $y = \dfrac{1}{x}$);
2. Qui tắc L'Hospital có thể được áp dụng nhiều lần.
   Ví dụ, xét
3. Qui tắc L'Hospital chỉ là điều kiện đủ mà không là điều kiện cần.
   Ví dụ, xét giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.
4. Trong quá trình tìm giới hạn có dạng vô định, nên kết hợp cả thay tương đương với dùng qui tắc L'Hospital. Có thể dùng qui tắc L'Hospital nhiều lần.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Chú ý 7.2

1. Qui tắc L'Hospital vẫn đúng với trường hợp $a = \infty$ (khi chứng minh đặt $y = \dfrac{1}{x}$);
2. Qui tắc L'Hospital có thể được áp dụng nhiều lần.
   Ví dụ, xét
3. Qui tắc L'Hospital chỉ là điều kiện đủ mà không là điều kiện cần.
   Ví dụ, xét giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.
4. Trong quá trình tìm giới hạn có dạng vô định, nên kết hợp cả thay tương đương với dùng qui tắc L'Hospital. Có thể dùng qui tắc L'Hospital nhiều lần.

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Ví dụ 7.7

Tính $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Giải:

$$A \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} = 6.$$

Ví dụ 7.8

Tính $B = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x}, \quad (a > 1) \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Giải:

$$B \overset{(L)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(a^x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = \infty.$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Ví dụ 7.7

Tính $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Giải:

$$A \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} = 6.$$

Ví dụ 7.8

Tính $B = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x}, \quad (a > 1) \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Giải:

$$B \overset{(L)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(a^x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = \infty.$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Ví dụ 7.7

Tính $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Giải:

$$A \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x^3)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} = 6.$$

Ví dụ 7.8

Tính $B = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x}, \quad (a > 1) \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Giải:

$$B \overset{(L)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(a^x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = \infty.$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Qui tắc L'Hospital

Ví dụ 7.7

Tính $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Giải:

$$A \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x^3)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} = 6.$$

Ví dụ 7.8

Tính $B = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{a^x}{x}, \quad (a > 1) \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Giải:

$$B \overset{(L)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(a^x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = \infty.$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Ứng dụng khai triển Taylor vào việc tìm giới hạn

Ví dụ 7.9

Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x} \right) \quad (\infty - \infty)$.

Giải: Ta có $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$. Áp dụng khai triển Maclaurin ta có

$$\begin{aligned} \sin x &= x + o\left(x^2\right) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \Longrightarrow 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Từ đó, áp dụng qui tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao ta thu được

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0.$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Ứng dụng khai triển Taylor vào việc tìm giới hạn

Ví dụ 7.9

Tìm $A = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x} \right) \quad (\infty - \infty)$.

Giải: Ta có $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$. Áp dụng khai triển Maclaurin ta có

$$\begin{aligned} \sin x &= x + o\left(x^2\right) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \Longrightarrow 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Từ đó, áp dụng qui tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao ta thu được

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0.$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Ứng dụng khai triển Taylor vào việc tìm giới hạn

Ví dụ 7.10

Tìm $B = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x(1 - \cos x)} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Giải: Khi $x \to 0$ ta có

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \Longrightarrow x(1 - \cos x) = \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right) \sim \frac{x^3}{2} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) \Longrightarrow \sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right) \sim -\frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Do đó,

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = -\frac{1}{3}.$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Ứng dụng khai triển Taylor vào việc tìm giới hạn

Ví dụ 7.10

Tìm $B = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Giải: Khi $x \to 0$ ta có

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \Longrightarrow x(1-\cos x) = \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right) \sim \frac{x^3}{2} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) \Longrightarrow \sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right) \sim -\frac{1}{6}x^3.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = -\frac{1}{3}.$$

Tóm tắt việc tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

1. Nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Nếu giới hạn có dạng vô định:
   - Thay tương đương
   - Qui tắc L'Hospital
   - Khai triển hữu hạn.

Tóm tắt việc tìm giới hạn $\lim_{x \to x_0} f(x)$

1. Nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Nếu giới hạn có dạng vô định:
   - Thay tương đương
   - Qui tắc L'Hospital
   - Khai triển hữu hạn.

Tóm tắt việc tìm giới hạn $\lim_{x \to x_0} f(x)$

1. Nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Nếu giới hạn có dạng vô định:
   - Thay tương đương
   - Qui tắc L'Hospital
   - Khai triển hữu hạn.

Tóm tắt việc tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

1. Nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Nếu giới hạn có dạng vô định:
   - Thay tương đương
   - Qui tắc L'Hospital
   - Khai triển hữu hạn.

Tóm tắt việc tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

1. Nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Nếu giới hạn có dạng vô định:
   - Thay tương đương
   - Qui tắc L'Hospital
   - Khai triển hữu hạn.

Nội dung

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 8.1

- Hàm số $f(x)$ gọi là tăng (hay đồng biến) trong khoảng (a,b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a,b)\,;\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.
- Còn nếu $\forall x_1, x_2 \in (a,b)\,;\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì $f(x)$ gọi là tăng ngặt trong khoảng (a,b).
- Nếu $\forall x_1, x_2 \in (a,b)\,;\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ thì ta nói hàm số $f(x)$ giảm (hay nghịch biến) trong khoảng (a,b); tương tự $f(x_1) > f(x_2)$ gọi là giảm ngặt.
- Hàm số $f(x)$ chỉ tăng hoặc giảm trong khoảng (a,b) gọi chung là hàm số đơn điệu.

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 8.1

- Hàm số $f(x)$ gọi là tăng (hay đồng biến) trong khoảng (a, b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)\,;\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Còn nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)\,;\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì $f(x)$ gọi là tăng ngặt trong khoảng (a, b).
- Nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)\,;\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ thì ta nói hàm số $f(x)$ giảm (hay nghịch biến) trong khoảng (a, b); tương tự $f(x_1) > f(x_2)$ gọi là giảm ngặt.
- Hàm số $f(x)$ chỉ tăng hoặc giảm trong khoảng (a, b) gọi chung là hàm số đơn điệu.

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 8.1

- Hàm số $f(x)$ gọi là tăng (hay đồng biến) trong khoảng (a, b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)\,; \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Còn nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)\,; \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì $f(x)$ gọi là tăng ngặt trong khoảng (a, b).
- Nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)\,; \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ thì ta nói hàm số $f(x)$ giảm (hay nghịch biến) trong khoảng (a, b); tương tự $f(x_1) > f(x_2)$ gọi là giảm ngặt.
- Hàm số $f(x)$ chỉ tăng hoặc giảm trong khoảng (a, b) gọi chung là hàm số đơn điệu.

Hàm số đơn điệu và các tính chất

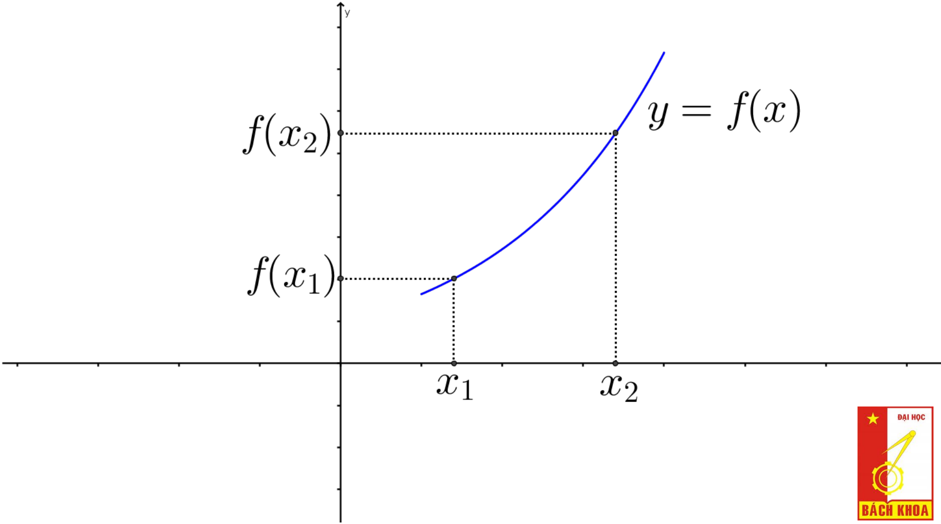
Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 8.1

- Hàm số $f(x)$ gọi là tăng (hay đồng biến) trong khoảng (a, b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)\,;\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Còn nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)\,;\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì $f(x)$ gọi là tăng ngặt trong khoảng (a, b).
- Nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)\,;\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ thì ta nói hàm số $f(x)$ giảm (hay nghịch biến) trong khoảng (a, b); tương tự $f(x_1) > f(x_2)$ gọi là giảm ngặt.
- Hàm số $f(x)$ chỉ tăng hoặc giảm trong khoảng (a, b) gọi chung là hàm số đơn điệu.

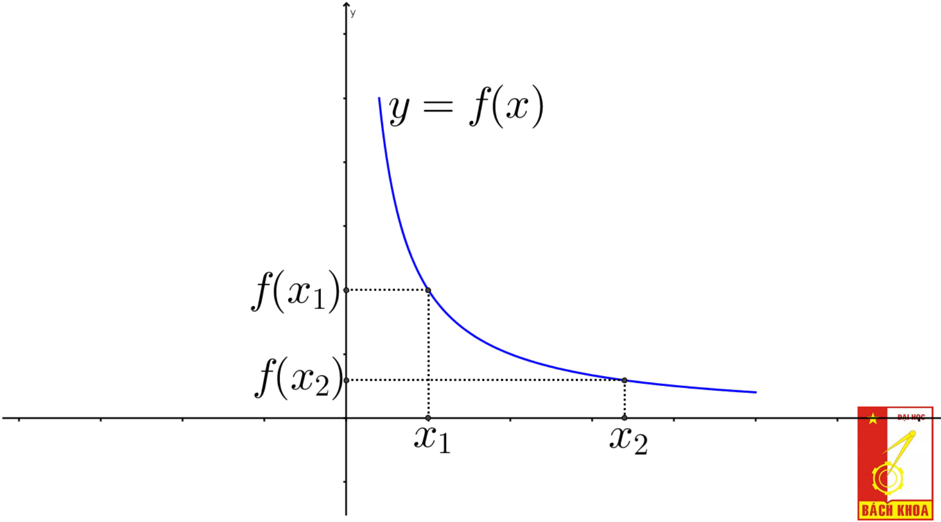
Hàm số đơn điệu và các tính chất

Hàm số đơn điệu



Hàm số đơn điệu và các tính chất

Hàm số đơn điệu



Hàm số đơn điệu và các tính chất

Hàm số đơn điệu

Định lý 8.1

Cho $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$, khả vi trong (a,b). Khi đó, nếu $f^{'}(x) \geq 0$ thì hàm đồng biến và nếu $f^{'}(x) \leq 0$ thì hàm nghịch biến trong khoảng đó.

Ví dụ 8.1

Chứng minh $\forall x > 0$ ta có $e^x > 1 + x$.

Chứng minh.

Xét hàm $f(x) = e^x - x - 1, \quad x > 0$. Dễ thấy $f(x)$ liên tục và khả vi trên $(0, \infty)$. Mặt khác, ta có

$$f^{'}(x) = e^x - 1 > 0, \quad \forall x > 0.$$

Do đó, $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(0, \infty)$ và ta thu được $f(x) > f(0) = 0, \quad \forall x > 0.$ □

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Hàm số đơn điệu

Định lý 8.1

Cho $f(x)$ liên tục trong $[a, b]$, khả vi trong (a, b). Khi đó, nếu $f^{'}(x) \geq 0$ thì hàm đồng biến và nếu $f^{'}(x) \leq 0$ thì hàm nghịch biến trong khoảng đó.

Ví dụ 8.1

Chứng minh $\forall x > 0$ ta có $e^x > 1 + x$.

Chứng minh.

Xét hàm $f(x) = e^x - x - 1, \quad x > 0$. Dễ thấy $f(x)$ liên tục và khả vi trên $(0, \infty)$. Mặt khác, ta có

$$f^{'}(x) = e^x - 1 > 0, \quad \forall x > 0.$$

Do đó, $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(0, \infty)$ và ta thu được $f(x) > f(0) = 0, \quad \forall x > 0.$ □

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Hàm số đơn điệu

Định lý 8.1

Cho $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$, khả vi trong (a,b). Khi đó, nếu $f^{'}(x) \geq 0$ thì hàm đồng biến và nếu $f^{'}(x) \leq 0$ thì hàm nghịch biến trong khoảng đó.

Ví dụ 8.1

Chứng minh $\forall x > 0$ ta có $e^x > 1 + x$.

Chứng minh.

Xét hàm $f(x) = e^x - x - 1, \quad x > 0$. Dễ thấy $f(x)$ liên tục và khả vi trên $(0,\infty)$. Mặt khác, ta có

$$f^{'}(x) = e^x - 1 > 0, \quad \forall x > 0.$$

Do đó, $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(0,\infty)$ và ta thu được
$f(x) > f(0) = 0, \quad \forall x > 0.$ □

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Bất đẳng thức hàm lồi

Định nghĩa 8.2

Hàm $f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lồi trong đó nếu $\forall a, b \in I \quad (a < b)$ và $\forall t \in [0, 1]$ ta có

$$\boxed{tf(a) + (1-t)f(b) \geq f\left(ta + (1-t)b\right).}$$

Nếu thay dấu "$\geq$" bởi "$\leq$" trong bất đẳng thức trên thì ta có $f(x)$ lõm trong khoảng I.

Định lý 8.2

- *Nếu $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai $f''(x) > 0$ trong khoảng I thì $f(x)$ lồi trong khoảng đó.*
- *Nếu $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai $f''(x) < 0$ trong khoảng I thì $f(x)$ lõm trong khoảng đó.*

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Bất đẳng thức hàm lồi

Định nghĩa 8.2

Hàm $f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lồi trong đó nếu $\forall a, b \in I \quad (a < b)$ và $\forall t \in [0, 1]$ ta có

$$\boxed{tf(a) + (1-t)f(b) \geq f\left(ta + (1-t)b\right).}$$

Nếu thay dấu "$\geq$" bởi "$\leq$" trong bất đẳng thức trên thì ta có $f(x)$ lõm trong khoảng I.

Định lý 8.2

- *Nếu $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai $f^{''}(x) > 0$ trong khoảng I thì $f(x)$ lồi trong khoảng đó.*
- *Nếu $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai $f^{''}(x) < 0$ trong khoảng I thì $f(x)$ lõm trong khoảng đó.*

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Bất đẳng thức hàm lồi

Định nghĩa 8.2

Hàm $f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lồi trong đó nếu $\forall a, b \in I \quad (a < b)$ và $\forall t \in [0, 1]$ ta có

$$\boxed{tf(a) + (1-t)f(b) \geq f\left(ta + (1-t)b\right).}$$

Nếu thay dấu "$\geq$" bởi "$\leq$" trong bất đẳng thức trên thì ta có $f(x)$ lõm trong khoảng I.

Định lý 8.2

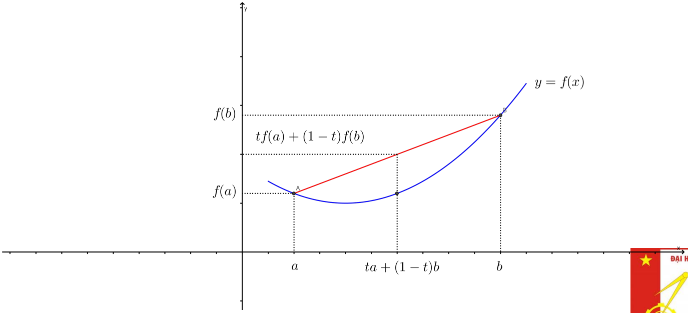
- *Nếu $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai $f^{''}(x) > 0$ trong khoảng I thì $f(x)$ lồi trong khoảng đó.*
- *Nếu $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai $f^{''}(x) < 0$ trong khoảng I thì $f(x)$ lõm trong khoảng đó.*

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bất đẳng thức hàm lồi

Mô tả hình học hàm lồi

Chú ý: không nhầm lẫn với khái niệm đường cong lồi, lõm đã học ở phổ thông.



Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bất đẳng thức hàm lồi

Định lý 8.3

(Bất đẳng thức Jensen)
Giả sử $f(x)$ là hàm lồi (lõm) trong khoảng I. Khi đó, với bất kỳ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ và với bất kỳ các số không âm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ thoả mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ta có

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq (\geq) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{8.1}$$

Đặc biệt, khi $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ ta có

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \leq (\geq) \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}. \tag{8.2}$$

Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bất đẳng thức hàm lồi

Ví dụ 8.2

Xét hàm $f(x) = \ln x$ trong $(0, +\infty)$. Do $f^{''}(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0, \quad \forall x$ nên $f(x)$ là hàm lõm.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, với $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ta có

$$\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n}$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \geq \ln\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Hơn nữa, do $\ln x$ là hàm đồng biến nên ta thu được

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1 x_2 \ldots x_n)},$$

chính là bất đẳng thức Cauchy quen thuộc.

BÁCH KHOA

Nội dung

Cực trị của hàm số

Nhắc lại

- Hàm số $f(x)$ gọi là đạt cực đại (CĐ) (hay cực tiểu (CT)) tại điểm x_0 nếu

$$\forall x \in \delta(x_0) := |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

- Điểm hàm số đạt cực đại hay cực tiểu gọi chung là điểm hàm số đạt cực trị.
- Nếu hàm số $f(x)$ khả vi và đạt cực trị tại $x = x_0$ thì $f^{'}(x_0) = 0$.
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trong (a, b), nếu $f^{'}(x) \geq 0$ thì hàm đồng biến và nếu $f^{'}(x) \leq 0$ thì hàm nghịch biến trong khoảng đó.

Cực trị của hàm số

Nhắc lại

- Hàm số $f(x)$ gọi là đạt cực đại (CĐ) (hay cực tiểu (CT)) tại điểm x_0 nếu

$$\forall x \in \delta(x_0) := |x - x_0| < \delta \implies f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

- Điểm hàm số đạt cực đại hay cực tiểu gọi chung là điểm hàm số đạt cực trị.
- Nếu hàm số $f(x)$ khả vi và đạt cực trị tại $x = x_0$ thì $f^{'}(x_0) = 0$.
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trong (a, b), nếu $f^{'}(x) \geq 0$ thì hàm đồng biến và nếu $f^{'}(x) \leq 0$ thì hàm nghịch biến trong khoảng đó.

Cực trị của hàm số

Nhắc lại

- Hàm số $f(x)$ gọi là đạt cực đại (CĐ) (hay cực tiểu (CT)) tại điểm x_0 nếu

$$\forall x \in \delta(x_0) := |x - x_0| < \delta \implies f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

- Điểm hàm số đạt cực đại hay cực tiểu gọi chung là điểm hàm số đạt cực trị.
- Nếu hàm số $f(x)$ khả vi và đạt cực trị tại $x = x_0$ thì $f^{'}(x_0) = 0$.
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trong (a, b), nếu $f^{'}(x) \geq 0$ thì hàm đồng biến và nếu $f^{'}(x) \leq 0$ thì hàm nghịch biến trong khoảng đó.

Cực trị của hàm số

Nhắc lại

- Hàm số $f(x)$ gọi là đạt cực đại (CĐ) (hay cực tiểu (CT)) tại điểm x_0 nếu

$$\forall x \in \delta(x_0) := |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

- Điểm hàm số đạt cực đại hay cực tiểu gọi chung là điểm hàm số đạt cực trị.
- Nếu hàm số $f(x)$ khả vi và đạt cực trị tại $x = x_0$ thì $f^{'}(x_0) = 0$.
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trong (a, b), nếu $f^{'}(x) \geq 0$ thì hàm đồng biến và nếu $f^{'}(x) \leq 0$ thì hàm nghịch biến trong khoảng đó.

Cực trị của hàm số

- Trong lân cận $\delta(x_0) := |x - x_0| < \delta$, hàm số $f(x)$ có đạo hàm (có thể hàm không có đạo hàm tại x_0); $f^{'}(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua điểm x_0, hàm số có cực đại tại điểm x_0, còn nếu $f^{'}(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm đó.
- Như vậy: nếu hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 thì điểm x_0 đó có thể là điểm mà $f^{'}(x_0) = 0$, cũng có thể tại điểm x_0 không tồn tại $f^{'}(x_0)$ hoặc $f^{'}(x_0) = \infty$. Điểm để $f^{'}(x_0) = 0$ gọi là điểm dừng còn nếu $\nexists f^{'}(x_0)$ hay $f^{'}(x_0) = \infty$ thì gọi là các điểm nghi ngờ.

Cực trị của hàm số

- Trong lân cận $\delta(x_0) := |x - x_0| < \delta$, hàm số $f(x)$ có đạo hàm (có thể hàm không có đạo hàm tại x_0); $f^{'}(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua điểm x_0, hàm số có cực đại tại điểm x_0, còn nếu $f^{'}(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm đó.
- Như vậy: nếu hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 thì điểm x_0 đó có thể là điểm mà $f^{'}(x_0) = 0$, cũng có thể tại điểm x_0 không tồn tại $f^{'}(x_0)$ hoặc $f^{'}(x_0) = \infty$. Điểm để $f^{'}(x_0) = 0$ gọi là điểm dừng còn nếu $\nexists f^{'}(x_0)$ hay $f^{'}(x_0) = \infty$ thì gọi là các điểm nghi ngờ.

Nội dung

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

1. Tìm miền xác định (MXĐ) của hàm số.
2. Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).
3. Tìm giao điểm của đường cong với các trục tọa độ (nếu có).
4. Tính $y' = f'(x)$, cho $f'(x) = 0$ để tìm điểm dừng, $f'(x) = \infty$ và điểm $f'(x)$ không tồn tại thuộc MXĐ (điểm nghi ngờ).
   Lập bảng biến thiên để biết khoảng tăng, giảm, cực đại, cực tiểu của hàm số.
5. Tính $y'' = f''(x)$, cho $f''(x) = 0$, lập bảng biến thiên để biết khoảng lồi, lõm và điểm uốn (nếu có) của đồ thị.
6. Tìm các đường tiệm cận (nếu có).
7. Vẽ đường cong $y = f(x)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

1. Tìm miền xác định (MXĐ) của hàm số.
2. Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).
3. Tìm giao điểm của đường cong với các trục tọa độ (nếu có).
4. Tính $y' = f'(x)$, cho $f'(x) = 0$ để tìm điểm dừng, $f'(x) = \infty$ và điểm $f'(x)$ không tồn tại thuộc MXĐ (điểm nghi ngờ).
   Lập bảng biến thiên để biết khoảng tăng, giảm, cực đại, cực tiểu của hàm số.
5. Tính $y'' = f''(x)$, cho $f''(x) = 0$, lập bảng biến thiên để biết khoảng lồi, lõm và điểm uốn (nếu có) của đồ thị.
6. Tìm các đường tiệm cận (nếu có).
7. Vẽ đường cong $y = f(x)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

1. Tìm miền xác định (MXĐ) của hàm số.
2. Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).
3. Tìm giao điểm của đường cong với các trục tọa độ (nếu có).
4. Tính $y' = f'(x)$, cho $f'(x) = 0$ để tìm điểm dừng, $f'(x) = \infty$ và điểm $f'(x)$ không tồn tại thuộc MXĐ (điểm nghi ngờ).
   Lập bảng biến thiên để biết khoảng tăng, giảm, cực đại, cực tiểu của hàm số.
5. Tính $y'' = f''(x)$, cho $f''(x) = 0$, lập bảng biến thiên để biết khoảng lồi, lõm và điểm uốn (nếu có) của đồ thị.
6. Tìm các đường tiệm cận (nếu có).
7. Vẽ đường cong $y = f(x)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

1. Tìm miền xác định (MXĐ) của hàm số.
2. Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).
3. Tìm giao điểm của đường cong với các trục tọa độ (nếu có).
4. Tính $y' = f'(x)$, cho $f'(x) = 0$ để tìm điểm dừng, $f'(x) = \infty$ và điểm $f'(x)$ không tồn tại thuộc MXĐ (điểm nghi ngờ).
   Lập bảng biến thiên để biết khoảng tăng, giảm, cực đại, cực tiểu của hàm số.
5. Tính $y'' = f''(x)$, cho $f''(x) = 0$, lập bảng biến thiên để biết khoảng lồi, lõm và điểm uốn (nếu có) của đồ thị.
6. Tìm các đường tiệm cận (nếu có).
7. Vẽ đường cong $y = f(x)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

1. Tìm miền xác định (MXĐ) của hàm số.
2. Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).
3. Tìm giao điểm của đường cong với các trục tọa độ (nếu có).
4. Tính $y^{'} = f^{'}(x)$, cho $f^{'}(x) = 0$ để tìm điểm dừng, $f^{'}(x) = \infty$ và điểm $f^{'}(x)$ không tồn tại thuộc MXĐ (điểm nghi ngờ).
   Lập bảng biến thiên để biết khoảng tăng, giảm, cực đại, cực tiểu của hàm số.
5. Tính $y^{''} = f^{''}(x)$, cho $f^{''}(x) = 0$, lập bảng biến thiên để biết khoảng lồi, lõm và điểm uốn (nếu có) của đồ thị.
6. Tìm các đường tiệm cận (nếu có).
7. Vẽ đường cong $y = f(x)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

1. Tìm miền xác định (MXĐ) của hàm số.
2. Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).
3. Tìm giao điểm của đường cong với các trục tọa độ (nếu có).
4. Tính $y' = f'(x)$, cho $f'(x) = 0$ để tìm điểm dừng, $f'(x) = \infty$ và điểm $f'(x)$ không tồn tại thuộc MXĐ (điểm nghi ngờ).
   Lập bảng biến thiên để biết khoảng tăng, giảm, cực đại, cực tiểu của hàm số.
5. Tính $y'' = f''(x)$, cho $f''(x) = 0$, lập bảng biến thiên để biết khoảng lồi, lõm và điểm uốn (nếu có) của đồ thị.
6. Tìm các đường tiệm cận (nếu có).
7. Vẽ đường cong $y = f(x)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

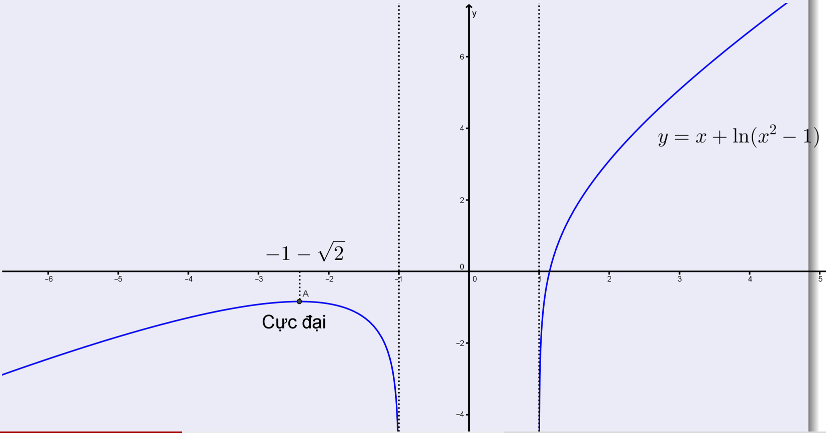
1. Tìm miền xác định (MXĐ) của hàm số.
2. Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).
3. Tìm giao điểm của đường cong với các trục tọa độ (nếu có).
4. Tính $y^{'} = f^{'}(x)$, cho $f^{'}(x) = 0$ để tìm điểm dừng, $f^{'}(x) = \infty$ và điểm $f^{'}(x)$ không tồn tại thuộc MXĐ (điểm nghi ngờ).
   Lập bảng biến thiên để biết khoảng tăng, giảm, cực đại, cực tiểu của hàm số.
5. Tính $y^{''} = f^{''}(x)$, cho $f^{''}(x) = 0$, lập bảng biến thiên để biết khoảng lồi, lõm và điểm uốn (nếu có) của đồ thị.
6. Tìm các đường tiệm cận (nếu có).
7. Vẽ đường cong $y = f(x)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

Ví dụ 10.1

Đồ thị hàm số $y = x + \ln\left(x^2 - 1\right)$.



Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong cho dưới dạng tham số

Đường cong cho dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$.

Tương tự như trường hợp $y = f(x)$, chỉ khác là khảo sát gián tiếp y theo x thông qua biến trung gian t và chú ý:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

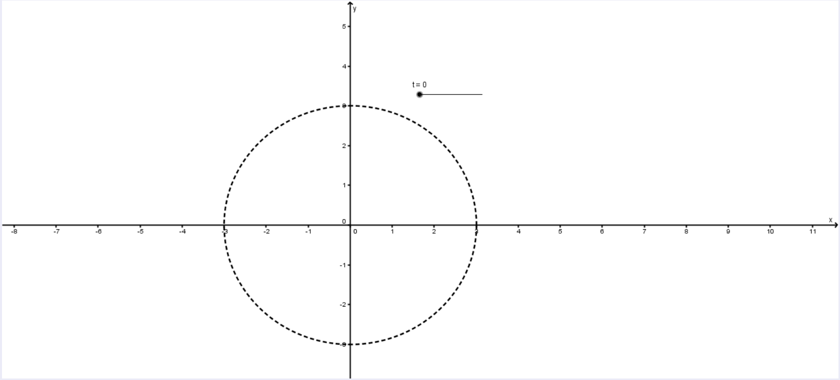
Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong cho dưới dạng tham số

Ví dụ 10.2

Đồ thị đường Astroid $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}, \quad (a > 0)$ có dạng tham số

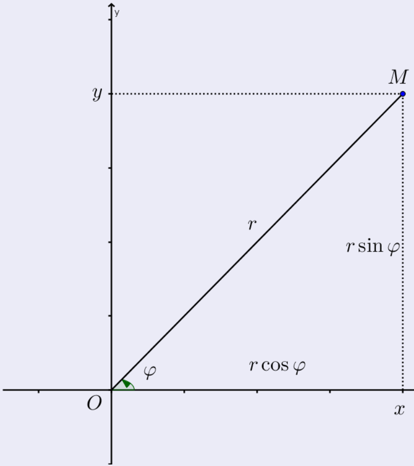
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong trong hệ toạ độ cực

Hệ toạ độ cực



Cho điểm M trong mặt phẳng Oxy.

Đặt $r = OM$ và $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.

Khi đó, cặp (r, φ) được gọi là toạ độ cực của điểm M

Nếu (x, y) là toạ độ Descartes của M thì

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \quad r \ge 0.$$

Ngược lại ta có

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong trong hệ toạ độ cực

Định nghĩa 10.1

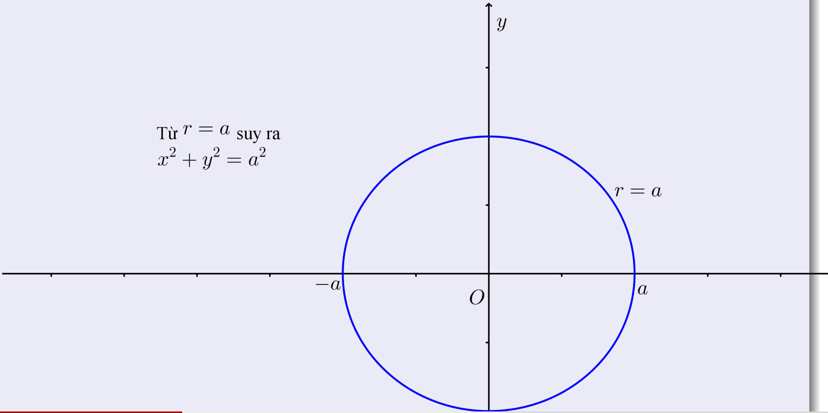
Cho hàm số $r = f(\varphi)$. Đồ thị của hàm số này được gọi là đường cong trong hệ toạ độ cực và phương trình $r = f(\varphi)$ được gọi là phương trình đường cong trong toạ độ cực.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong trong hệ toạ độ cực

Ví dụ 10.3

Phương trình $r = a,\ a > 0$ trong toạ độ cực là phương trình đường tròn tâm $O(0,0)$, bán kính a.



Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong trong hệ toạ độ cực

Ví dụ 10.4

Phương trình $r = 2a\cos\varphi,\ a > 0$ trong toạ độ cực là phương trình đường tròn tâm $(a, 0)$, bán kính a.