Chương 2: Tích phân

Trần Minh Toàn [1]

Viện Toán ứng dụng và Tin học, ĐHBK Hà Nội

Hà Nội, tháng 8 năm 2013

[1] Email: toantm24@gmail.com

Nội dung

Tích phân bất định

Khái niệm và tính chất

Định nghĩa 1.1

Ta gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F^{'}(x) = f(x)$. Mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C \quad (C - \text{const})$. Tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$, gọi là tích phân bất định, ký hiệu

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C - \text{const}).$$

Tích phân bất định có các tính chất sau

- Đạo hàm $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx = f(x)$ và vi phân $d\displaystyle\int f(x)dx = f(x)dx$;
- $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a - \text{const})$;
- $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
- Nếu $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\displaystyle\int f(u)du = F(u) + C$.

Tích phân bất định

Khái niệm và tính chất

Định nghĩa 1.1

Ta gọi $F(x)$ *là nguyên hàm của* $f(x)$ *nếu* $F^{'}(x) = f(x)$*. Mọi nguyên hàm của* $f(x)$ *đều có dạng* $F(x) + C \ \ (C - \text{const})$*. Tập hợp tất cả các nguyên hàm của* $f(x)$*, gọi là tích phân bất định, ký hiệu*

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ \ (C - \text{const}).$$

Tích phân bất định có các tính chất sau

- Đạo hàm $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx = f(x)$ và vi phân $d\displaystyle\int f(x)dx = f(x)dx$;
- $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx \ \ (a - \text{const})$;
- $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
- Nếu $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\displaystyle\int f(u)du = F(u) + C$.

Tích phân bất định

Khái niệm và tính chất

Định nghĩa 1.1

Ta gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F^{'}(x) = f(x)$. Mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C \quad (C - \text{const})$. Tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$, gọi là tích phân bất định, ký hiệu

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C - \text{const}).$$

Tích phân bất định có các tính chất sau

- Đạo hàm $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx = f(x)$ và vi phân $d\displaystyle\int f(x)dx = f(x)dx$;
- $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a - \text{const})$;
- $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
- Nếu $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\displaystyle\int f(u)du = F(u) + C$.

Tích phân bất định

Khái niệm và tính chất

Định nghĩa 1.1

Ta gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F^{'}(x) = f(x)$. Mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C \;\; (C - \text{const})$. Tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$, gọi là tích phân bất định, ký hiệu

$$\int f(x)dx = F(x) + C \;\; (C - \text{const}).$$

Tích phân bất định có các tính chất sau

- Đạo hàm $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx = f(x)$ và vi phân $d\displaystyle\int f(x)dx = f(x)dx$;
- $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx \;\; (a - \text{const})$;
- $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
- Nếu $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\displaystyle\int f(u)du = F(u) + C$.

Tích phân bất định

Khái niệm và tính chất

Định nghĩa 1.1

Ta gọi $F(x)$ *là nguyên hàm của* $f(x)$ *nếu* $F^{'}(x) = f(x)$. *Mọi nguyên hàm của* $f(x)$ *đều có dạng* $F(x) + C \ \ (C - \text{const})$. *Tập hợp tất cả các nguyên hàm của* $f(x)$, *gọi là tích phân bất định, ký hiệu*

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ \ (C - \text{const}).$$

Tích phân bất định có các tính chất sau

- Đạo hàm $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx = f(x)$ và vi phân $d\displaystyle\int f(x)dx = f(x)dx$;
- $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx \ \ (a - \text{const})$;
- $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
- Nếu $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\displaystyle\int f(u)du = F(u) + C$.

Tích phân bất định

Một số tích phân bất định cơ bản

$$\int 0dx = C; \qquad \int adx = ax + C \quad (a - \text{const})$$
$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$
$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \quad (a \neq 0);$$
$$\int \cos bx dx = \frac{1}{b}\sin bx + C \quad (b \neq 0)$$
$$\int \sin bx dx = -\frac{1}{b}\cos bx + C; \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotan} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$$

Tích phân bất định

Một số tích phân bất định cơ bản (tiếp)

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + b} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + b} + \frac{b}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C$$

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

1. Phương pháp phân tích

Dựa vào các phép biến đổi đại số để đưa $f(x)$ về dạng tổng của các hàm sơ cấp đơn giản mà nguyên hàm của chúng đã có sẵn.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

2. Phương pháp đổi biến

Mệnh đề 1.1

Đặt $x = \varphi(t)$, trong đó φ là hàm liên tục, đơn điệu và có đạo hàm liên tục. Khi đó $dx = \varphi^{'}(t)dt$ và ta có

$$I = \int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi^{'}(t)dt = F(t) + C.$$

Trả lại biến số cũ $t = \varphi^{-1}(x)$ ta có kết quả.

Trường hợp hàm $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng $f(x) = h\left(\varphi(x)\right)\varphi^{'}(x)$, đặt $t = \varphi(x)$ ta có

$$\int f(x)dx = \int h(t)dt \text{ (dễ tính).}$$

Trả lại biến số cũ $t = \varphi(x)$ ta thu được kết quả.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

2. Phương pháp đổi biến

Mệnh đề 1.1

Đặt $x = \varphi(t)$, trong đó φ là hàm liên tục, đơn điệu và có đạo hàm liên tục. Khi đó $dx = \varphi^{'}(t)dt$ và ta có

$$I = \int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi^{'}(t)dt = F(t) + C.$$

Trả lại biến số cũ $t = \varphi^{-1}(x)$ ta có kết quả.
Trường hợp hàm $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng $f(x) = h\left(\varphi(x)\right)\varphi^{'}(x)$, đặt $t = \varphi(x)$ ta có

$$\int f(x)dx = \int h(t)dt \text{ (dễ tính).}$$

Trả lại biến số cũ $t = \varphi(x)$ ta thu được kết quả.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

Ví dụ 1

Tính các tích phân sau

1. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx \quad \left(x+\frac{1}{2}=t\right) \quad \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right]$;
2. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}} \quad \left(x-\frac{1}{2}=t\right) \left[-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C\right]$;
3. $\displaystyle\int \sqrt{2+x-x^2}dx \quad \left[\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arctan\frac{2x-1}{3}+C\right]$.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

3. Phương pháp tích phân từng phần

Nếu u, v là các hàm khả vi thì ta có

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

Chú ý 1.1

Ba nhóm dạng hàm sau đây người ta thường sử dụng phương pháp tích phân từng phần

- Dạng $\int P_n(x) \left.\begin{matrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \text{arccot}\, x \end{matrix}\right\} dx$. Đặt $dv = P_n(x)dx \Longrightarrow v = \int P_n(x)dx$, còn

$$u = \begin{cases} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \text{arccot}\, x \end{cases} \Longrightarrow du = \begin{cases} \dfrac{1}{x}dx \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ -\dfrac{1}{1+x^2}dx \end{cases}$$

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

Chú ý 1.1. (tiếp)

- Dạng

$$\int P_n(x) \left.\begin{matrix} e^{ax} \\ \cos bx \\ \sin bx \end{matrix}\right\} dx = \int P_n(x) \begin{cases} \frac{1}{a} d\left(e^{ax}\right) \\ \frac{1}{b} d\left(\sin bx\right) \\ -\frac{1}{b} d\left(\cos bx\right) \end{cases}$$

- Dạng

$$I = \int e^{ax} \left.\begin{matrix} \sin bx \\ \cos bx \end{matrix}\right\} dx = \int \left.\begin{matrix} \sin bx \\ \cos bx \end{matrix}\right\} \frac{1}{a} d\left(e^{ax}\right),$$

tích phân từng phần hai lần, sẽ dẫn tới dạng tích phân ban đầu I, giải phương trình được kết quả. Nhưng chú ý rằng lần đầu đưa e^{ax} vào trong dấu vi phân thì lần thứ hai cũng phải đưa e^{ax} vào trong dấu vi phân.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

Ví dụ 2

1. $\int \arctan x dx \quad \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C\right]$;
2. $\int x^2 e^{2x} dx \quad \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) e^{2x} + C\right]$;
3. $\int x \sin 2x dx \quad \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right]$;
4. $\int e^{2x} \sin x dx \quad \left[\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + C\right]$.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

4. Tích phân hàm hữu tỷ

Xét hàm hữu tỷ $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, trong đó $P_n(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n$ là đa thức bậc n còn $Q_m(x)$ là đa thức bậc m.
Nếu $n \geq m$ ta thực hiện phép chia đa thức để được phần nguyên và phần phân

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

$H(x)$ là phần nguyên và là đa thức bậc $n - m$, còn $R(x)$ là phần dư và là đa thức bậc $< m$.
Nếu $n \leq m - 1$ thì $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ gọi là phân thức hữu tỷ thực sự.

Để tính $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx, \quad n < m$ ta tiến hành như sau.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

4. Tích phân hàm hữu tỷ

- Phân tích

$$\begin{aligned} Q_m(x) = & b_o(x-a)(x-b)^{\alpha}\ldots(x^2+p_1x+q_1)\times \\ & \times(x^2+p_2x+q_2)^{\beta}\ldots,\quad p_i^2-4q_i<0, \forall i\geq 1. \end{aligned}$$

- Phân tích $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{x-a} + \left[\frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha}\right] + \frac{Cx+D}{x^2+p_1x+q_1} \\ &+ \left[\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_2x+q_2} + \cdots + \frac{C_\beta x+D_\beta}{(x^2+p_2x+q_2)^\beta}\right] + \cdots \end{aligned}$$

Các hằng số $A, B_i (i = 1 \div \alpha), \ldots, C, D, C_j, D_j, j = 1 \div \beta, \ldots$ được tìm bằng cách quy đồng mẫu số chung ở vế phải và đồng nhất hai vế theo lũy thừa của x, được hệ để tìm chúng. Tích phân hai vế đẳng thức cuối cùng ta được kết quả.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

4. Tích phân hàm hữu tỷ

- Phân tích

$$\begin{aligned} Q_m(x) =& b_o(x-a)(x-b)^\alpha \ldots (x^2+p_1x+q_1)\times \\ & \times (x^2+p_2x+q_2)^\beta \ldots, \quad p_i^2-4q_i<0, \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

- Phân tích $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{x-a} + \left[\frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha}\right] + \frac{Cx+D}{x^2+p_1x+q_1} \\ &+ \left[\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_2x+q_2} + \cdots + \frac{C_\beta x+D_\beta}{(x^2+p_2x+q_2)^\beta}\right] + \cdots \end{aligned}$$

Các hằng số $A, B_i(i=1\div\alpha), \ldots, C, D, C_j, D_j, j=1\div\beta, \ldots$ được tìm bằng cách quy đồng mẫu số chung ở vế phải và đồng nhất hai vế theo lũy thừa của x, được hệ để tìm chúng. Tích phân hai vế đẳng thức cuối cùng ta được kết quả.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

Ví dụ 3

1. $\displaystyle\int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx \quad \left[\ln\left|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7\right|+C\right];$
2. $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx \quad \left[\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C\right];$
3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^3+1} \quad \left[-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)++\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\right];$
4. $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}dx$
   $\displaystyle\left[\ln|x+1|-\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\right].$

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

5. Tích phân hàm lượng giác

Giả sử cần tính tích phân $I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$, trong đó $R(\sin x, \cos x)$ là hàm hữu tỷ đối với các biến $\sin x, \cos x$.

Thực hiện phép đổi biến $t = \tan \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, ta có

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Chú ý 1.2

- Nếu $R(\sin x, \cos x)$ chẵn đối với $\sin x$ và $\cos x$ thì đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$;
- Nếu $R(\sin x, \cos x)$ lẻ đối với $\sin x$ thì đặt $t = \cos x$;
- Nếu $R(\sin x, \cos x)$ lẻ đối với $\cos x$ thì đặt $t = \sin x$.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

5. Tích phân hàm lượng giác

Giả sử cần tính tích phân $I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$, trong đó $R(\sin x, \cos x)$ là hàm hữu tỷ đối với các biến $\sin x, \cos x$.

Thực hiện phép đổi biến $t = \tan \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi$, ta có

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Chú ý 1.2

- Nếu $R(\sin x, \cos x)$ chẵn đối với $\sin x$ và $\cos x$ thì đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$;
- Nếu $R(\sin x, \cos x)$ lẻ đối với $\sin x$ thì đặt $t = \cos x$;
- Nếu $R(\sin x, \cos x)$ lẻ đối với $\cos x$ thì đặt $t = \sin x$.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

5. Tích phân hàm lượng giác

Giả sử cần tính tích phân $I = \displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, trong đó $R(\sin x, \cos x)$ là hàm hữu tỷ đối với các biến $\sin x, \cos x$.
Thực hiện phép đổi biến $t = \tan \dfrac{x}{2}$, $\quad -\pi < x < \pi$, ta có

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Chú ý 1.2

- Nếu $R(\sin x, \cos x)$ chẵn đối với $\sin x$ và $\cos x$ thì đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$;
- Nếu $R(\sin x, \cos x)$ lẻ đối với $\sin x$ thì đặt $t = \cos x$;
- Nếu $R(\sin x, \cos x)$ lẻ đối với $\cos x$ thì đặt $t = \sin x$.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

Ví dụ 4

1. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx;$

   $\tan x = t$, $\left[\frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\sin x + \cos x) + C\right];$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x - 1)}$

   $\cos x = t$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right| + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\right].$

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

5. Tích phân một số hàm vô tỷ

Xét tích phân dạng $I = \displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

1. $I = \displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$, đặt $x = a\sin t$ hoặc $x = a\cos t$, đưa về dạng lượng giác.
2. $I = \displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx$, đặt $x = a\tan t$ hoặc $x = a\cot t$.
3. $I = \displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$, đặt $x = \dfrac{a}{\cos t}$ hoặc $x = \dfrac{a}{\sin t}$.

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

5. Tích phân một số hàm vô tỷ (tiếp)

Ta có thể dùng phép thế Euler để đưa về dạng tích phân hữu tỷ

- Nếu $a > 0$, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$;
- Nếu $c > 0$, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$;
- Nếu $ax^2 + bx + c = a\left(x - \alpha\right)\left(x - \beta\right)$, đặt

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\left(x - \alpha\right) \text{ hoặc } t\left(x - \beta\right).$$

Chú ý 1.3

Một số hàm không có nguyên hàm sơ cấp (chứng minh bởi Liouville)

$$e^{\pm x^2}, \cos x^2, \sin x^2, \frac{e^x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{1}{\ln x}, \sqrt{1 - x^3}, \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}.$$

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

5. Tích phân một số hàm vô tỷ (tiếp)

Ta có thể dùng phép thế Euler để đưa về dạng tích phân hữu tỷ

- Nếu $a > 0$, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$;
- Nếu $c > 0$, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$;
- Nếu $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, đặt

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha) \text{ hoặc } t(x-\beta).$$

Chú ý 1.3

Một số hàm không có nguyên hàm sơ cấp (chứng minh bởi Liouville)

$$e^{\pm x^2}, \cos x^2, \sin x^2, \frac{e^x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{1}{\ln x}, \sqrt{1-x^3}, \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Tích phân bất định

Các phương pháp tính tích phân bất định

Ví dụ 5

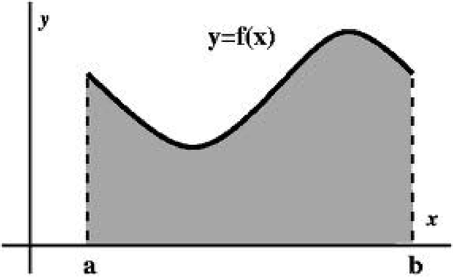
1. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \left[-\frac{1-x^2}{15}\left(3x^4+4x^2+8\right)+C\right];$
2. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx \quad \left[\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)\right];$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}};$
4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx, \quad a>0.$

Nội dung

1. Tích phân bất định
2. **Tích phân xác định**
3. Tích phân suy rộng
4. Ứng dụng của tích phân xác định

Tích phân xác định

Tính diện tích hình thang cong

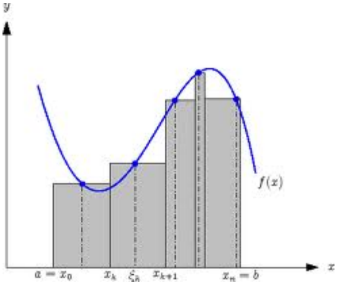


Tích phân xác định

Tính diện tích hình thang cong

Cho hàm $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a, b]$, khi đó, diện tích của hình thang cong giới hạn bởi $0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b$ là

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \Delta x_i, \quad \lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i.$$



Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.1

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$.

- Chia $[a, b]$ bởi các điểm chia $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \equiv b$;
- Tính $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1, n})$ và đặt $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta_i$;
- Lấy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = \overline{1, n})$;
- Lập tổng tích phân $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$.

Nếu $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và cách chọn các điểm ξ_i thì I được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ và ký hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$. Khi đó ta cũng nói $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$.

Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.1

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$.

- Chia $[a, b]$ bởi các điểm chia $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \equiv b$;
- Tính $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1, n})$ và đặt $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta_i$;
- Lấy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = \overline{1, n})$;
- Lập tổng tích phân $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$.

Nếu $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và cách chọn các điểm ξ_i thì I được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ và ký hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$. Khi đó ta cũng nói $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$.

Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.1

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$.

- Chia $[a, b]$ bởi các điểm chia $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \equiv b$;
- Tính $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1, n})$ và đặt $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta_i$;
- Lấy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = \overline{1, n})$;
- Lập tổng tích phân $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$.

Nếu $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và cách chọn các điểm ξ_i thì I được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ và ký hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$. Khi đó ta cũng nói $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$.

Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.1

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a,b]$.

- Chia $[a,b]$ bởi các điểm chia $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \equiv b$;
- Tính $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1,n})$ và đặt $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta_i$;
- Lấy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = \overline{1,n})$;
- Lập tổng tích phân $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$.

Nếu $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$ và cách chọn các điểm ξ_i thì I được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a,b]$ và ký hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$. Khi đó ta cũng nói $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.

Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.1

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$.

- Chia $[a, b]$ bởi các điểm chia $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \equiv b$;
- Tính $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1, n})$ và đặt $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta_i$;
- Lấy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = \overline{1, n})$;
- Lập tổng tích phân $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$.

Nếu $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và cách chọn các điểm ξ_i thì I được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ và ký hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$. Khi đó ta cũng nói $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$.

Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.1

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$.

- Chia $[a, b]$ bởi các điểm chia $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \equiv b$;
- Tính $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1, n})$ và đặt $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta_i$;
- Lấy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = \overline{1, n})$;
- Lập tổng tích phân $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$.

Nếu $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và cách chọn các điểm ξ_i thì I được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ và ký hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$. Khi đó ta cũng nói $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$.

Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.2

- Khi $b < a$ ta có
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$
- Khi $a = b$ ta có
$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.2

- Khi $b < a$ ta có
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$
- Khi $a = b$ ta có
$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Tích phân xác định

Định lý 2.1

Hàm $f(x)$ *khả tích trên* $[a, b]$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$, *trong đó*

$$S = \sum_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i, \quad M_i = \max_{x \in \Delta x_i} f(x), \quad m_i = \min_{x \in \Delta x_i} f(x).$$

Định lý 2.2

Nếu $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$ *thì nó khả tích trên đoạn đó.*

Định lý 2.3

Nếu $f(x)$ *bị chặn trên* $[a, b]$ *và có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trong đó thì cũng khả tích trên đó.*

Định lý 2.4

Nếu $f(x)$ *bị chặn và đơn điệu trên* $[a, b]$ *thì cũng khả tích trên đó.*

Tích phân xác định

Định lý 2.1

Hàm $f(x)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$, *trong đó*

$$S=\sum_{i=0}^{n} M_i\Delta x_i,\quad s=\sum_{i=0}^{n} m_i\Delta x_i,\quad M_i=\max_{x\in\Delta x_i} f(x),\quad m_i=\min_{x\in\Delta x_i} f(x).$$

Định lý 2.2

Nếu $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *thì nó khả tích trên đoạn đó.*

Định lý 2.3

Nếu $f(x)$ *bị chặn trên* $[a,b]$ *và có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trong đó thì cũng khả tích trên đó.*

Định lý 2.4

Nếu $f(x)$ *bị chặn và đơn điệu trên* $[a,b]$ *thì cũng khả tích trên đó.*

Tích phân xác định

Định lý 2.1

Hàm $f(x)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$, *trong đó*

$$S = \sum_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i, \quad M_i = \max_{x \in \Delta x_i} f(x), \quad m_i = \min_{x \in \Delta x_i} f(x).$$

Định lý 2.2

Nếu $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *thì nó khả tích trên đoạn đó.*

Định lý 2.3

Nếu $f(x)$ *bị chặn trên* $[a,b]$ *và có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trong đó thì cũng khả tích trên đó.*

Định lý 2.4

Nếu $f(x)$ *bị chặn và đơn điệu trên* $[a,b]$ *thì cũng khả tích trên đó.*

Tích phân xác định

Định lý 2.1

Hàm $f(x)$ *khả tích trên* $[a, b]$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$, *trong đó*

$$S = \sum_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i, \quad M_i = \max_{x \in \Delta x_i} f(x), \quad m_i = \min_{x \in \Delta x_i} f(x).$$

Định lý 2.2

Nếu $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$ *thì nó khả tích trên đoạn đó.*

Định lý 2.3

Nếu $f(x)$ *bị chặn trên* $[a, b]$ *và có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trong đó thì cũng khả tích trên đó.*

Định lý 2.4

Nếu $f(x)$ *bị chặn và đơn điệu trên* $[a, b]$ *thì cũng khả tích trên đó.*

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Tuyến tính

Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi đó

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Cộng tính

Nếu $f(x)$ khả tích trên khoảng có độ dài lớn nhất trong các đoạn $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ thì nó cũng khả tích trên các khoảng còn lại và ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Tuyến tính

Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi đó

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Cộng tính

Nếu $f(x)$ khả tích trên khoảng có độ dài lớn nhất trong các đoạn $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ thì nó cũng khả tích trên các khoảng còn lại và ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Bảo toàn thứ tự

- Nếu $f(x)$ khả tích và không âm trên $[a,b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Nếu $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a,b]$ và $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.
- Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì $|f(x)|$ cũng khả tích trên đó và
$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$
- Nếu $m \leq f(x) \leq M$ trên $[a,b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Bảo toàn thứ tự

- Nếu $f(x)$ khả tích và không âm trên $[a, b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Nếu $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.
- Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $|f(x)|$ cũng khả tích trên đó và

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

- Nếu $m \leq f(x) \leq M$ trên $[a, b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Bảo toàn thứ tự

- Nếu $f(x)$ khả tích và không âm trên $[a, b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Nếu $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.
- Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $|f(x)|$ cũng khả tích trên đó và
$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$
- Nếu $m \leq f(x) \leq M$ trên $[a, b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Bảo toàn thứ tự

- Nếu $f(x)$ khả tích và không âm trên $[a, b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Nếu $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.
- Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $|f(x)|$ cũng khả tích trên đó và
$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$
- Nếu $m \leq f(x) \leq M$ trên $[a, b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Định lý 2.5

(Định lý trung bình thứ nhất).
Giả sử hàm $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Khi đó, tồn tại $\mu \in [m, M]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = \mu\,(b - a)\,.$$

Nếu thêm giả thiết $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì $\exists c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Định lý 2.5

(Định lý trung bình thứ nhất).
Giả sử hàm $f(x)$ *khả tích trên* $[a, b]$ *và* $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. *Khi đó, tồn tại* $\mu \in [m, M]$ *sao cho*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu\,(b-a)\,.$$

Nếu thêm giả thiết $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$ *thì* $\exists c \in [a, b]$ *sao cho*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Định lý 2.6

(Định lý trung bình thứ hai).
Giả sử các hàm $f(x), g(x)$ *khả tích trên* $[a, b]$ *và* $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a, b]$*, đồng thời* $g(x)$ *không đổi dấu trên* $[a, b]$*. Khi đó, tồn tại* $\mu \in [m, M]$ *sao cho*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Nếu thêm giả thiết $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$ *thì* $\exists c \in [a, b]$ *sao cho*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Định lý 2.6

(Định lý trung bình thứ hai).
Giả sử các hàm $f(x), g(x)$ *khả tích trên* $[a, b]$ *và* $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a, b]$, *đồng thời* $g(x)$ *không đổi dấu trên* $[a, b]$. *Khi đó, tồn tại* $\mu \in [m, M]$ *sao cho*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Nếu thêm giả thiết $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$ *thì* $\exists c \in [a, b]$ *sao cho*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Tích phân các hàm chẵn, lẻ

$$\int_{a}^{-a} f(x)dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)dx, & \text{nếu f(x) là hàm chẵn} \\ 0, & \text{nếu f(x) là hàm lẻ} \end{cases}$$

Tích phân Warllis

Với $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{n!!}{(n-1)!!}, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Tích phân xác định

Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

Tích phân các hàm chẵn, lẻ

$$\int_{a}^{-a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{nếu f(x) là hàm chẵn} \\ 0, & \text{nếu f(x) là hàm lẻ} \end{cases}$$

Tích phân Warllis

Với $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{n!!}{(n-1)!!}, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Tích phân xác định

Công thức đạo hàm theo cận, công thức Newton-Leibniz

Định lý 2.7

Nếu $f(x)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *thì* $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ *liên tục trên* $[a,b]$.

Nếu thêm giả thiết $f(t)$ *liên tục tại điểm* $t = x \in [a,b]$ *thì ta có*

$$\frac{dI}{dx} = I^{'}(x) = f(x).$$

Chú ý 2.1

Trong trường hợp cả hai cận biến thiên ta có

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = f\left(\beta(x)\right).\beta^{'}(x) - f\left(\alpha(x)\right).\alpha^{'}(x).$$

Tích phân xác định

Công thức đạo hàm theo cận, công thức Newton-Leibniz

Định lý 2.7

Nếu $f(x)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *thì* $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ *liên tục trên* $[a,b]$.

Nếu thêm giả thiết $f(t)$ *liên tục tại điểm* $t = x \in [a,b]$ *thì ta có*

$$\frac{dI}{dx} = I'(x) = f(x).$$

Chú ý 2.1

Trong trường hợp cả hai cận biến thiên ta có

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = f\left(\beta(x)\right).\beta'(x) - f\left(\alpha(x)\right).\alpha'(x).$$

Tích phân xác định

Công thức đạo hàm theo cận, công thức Newton-Leibniz

Công thức Newton-Leibniz

Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b]$ có $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ví dụ 1

1. $I = \int_0^2 |1 - x|\, dx \quad [1];$
2. $I = \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx \quad [2].$

Tích phân xác định

Công thức đạo hàm theo cận, công thức Newton-Leibniz

Công thức Newton-Leibniz

Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b]$ có $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ví dụ 1

1. $I = \displaystyle\int_0^2 |1 - x|\, dx \quad [1];$
2. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx \quad [2].$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Phương pháp đổi biến số

Xét $I = \int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$.

Định lý 2.8

Xét $x = \varphi(t)$ thoả mãn

- $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b;$
- $\varphi'(t)$ *liên tục trên* $[\alpha, \beta]$;
- *Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì $\varphi(t)$ biến thiên trong $[a, b]$.*

Khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) . \varphi'(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Phương pháp đổi biến số

Xét $I = \int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$.

Định lý 2.8

Xét $x = \varphi(t)$ *thoả mãn*

- $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$;
- $\varphi^{'}(t)$ *liên tục trên* $[\alpha, \beta]$;
- *Khi* t *biến thiên trong* $[\alpha, \beta]$ *thì* $\varphi(t)$ *biến thiên trong* $[a, b]$.

Khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi^{'}(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Phương pháp đổi biến số

Xét $I = \int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$.

Định lý 2.8

Xét $x = \varphi(t)$ thoả mãn

- $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$;
- $\varphi'(t)$ *liên tục trên* $[\alpha, \beta]$;
- *Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì $\varphi(t)$ biến thiên trong $[a, b]$.*

Khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) . \varphi'(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Phương pháp đổi biến số

Xét $I = \int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$.

Định lý 2.8

Xét $x = \varphi(t)$ thoả mãn

- $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$;
- $\varphi^{'}(t)$ *liên tục trên* $[\alpha, \beta]$;
- *Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì $\varphi(t)$ biến thiên trong $[a, b]$.*

Khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi^{'}(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Phương pháp đổi biến số

Xét $I = \int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$.

Định lý 2.8

Xét $x = \varphi(t)$ thoả mãn

- $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$;
- $\varphi^{'}(t)$ *liên tục trên* $[\alpha, \beta]$;
- *Khi* t *biến thiên trong* $[\alpha, \beta]$ *thì* $\varphi(t)$ *biến thiên trong* $[a, b]$.

Khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi^{'}(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Phương pháp đổi biến số

Xét $I = \int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$.

Định lý 2.8

Xét $x = \varphi(t)$ thoả mãn

- $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$;
- $\varphi^{'}(t)$ *liên tục trên* $[\alpha, \beta]$;
- *Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì $\varphi(t)$ biến thiên trong $[a, b]$.*

Khi đó ta có

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) .\varphi^{'}(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Định lý 2.9

Xét $t = \varphi(x)$ *thoả mãn*

- $\varphi(x)$ *biến thiên đơn điệu trên* $[a, b]$ *và có đạo hàm liên tục.*
- $f(x)dx$ *trở thành* $g(t)dt$*, ở đó* $g(t)$ *liên tục trên* $[\varphi(a), \varphi(b)]$*.*

Khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Định lý 2.9

Xét $t = \varphi(x)$ *thoả mãn*

- $\varphi(x)$ *biến thiên đơn điệu trên* $[a, b]$ *và có đạo hàm liên tục.*
- $f(x)dx$ *trở thành* $g(t)dt$, *ở đó* $g(t)$ *liên tục trên* $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

Khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Định lý 2.9

Xét $t = \varphi(x)$ *thoả mãn*

- $\varphi(x)$ *biến thiên đơn điệu trên* $[a, b]$ *và có đạo hàm liên tục.*
- $f(x)dx$ *trở thành* $g(t)dt$, *ở đó* $g(t)$ *liên tục trên* $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

Khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Định lý 2.9

Xét $t = \varphi(x)$ *thoả mãn*

- $\varphi(x)$ *biến thiên đơn điệu trên* $[a, b]$ *và có đạo hàm liên tục.*
- $f(x)dx$ *trở thành* $g(t)dt$*, ở đó* $g(t)$ *liên tục trên* $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

Khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Ví dụ 2

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}+e^{-x}}dx \quad \left[\frac{1}{3}\ln\left(2e^{-3}+4e^{-3/2}+2\right)-\ln 2+1\right]$;
2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \quad \left[\frac{\pi^2}{4}\right]$;
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx \quad \left[\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right]$.

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Công thức tích phân từng phần

Cho các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$. Khi đó ta có

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Tích phân xác định

Các phương pháp tính tích phân xác định

Ví dụ 3

1. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx \quad \left[-2e^{-1}+1\right];$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin(2x)dx \quad \left[\frac{2}{13}\left(1+e^{\frac{3\pi}{2}}\right)\right];$

3. $\int\limits_0^{a} \left(a^2-x^2\right)^n dx \quad \left[a^{2n+1}\frac{2n!!}{(2n+1)!!}\right];$

4. $\int\limits_0^{\pi} x\sin^m x dx \quad \left[I=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m zdz=\begin{cases}\pi\frac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{nếu } m \text{ là số lẻ}\\ \frac{\pi^2}{2}.\frac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{nếu } m \text{ là số chẵn.}\end{cases}\right].$

Nội dung

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Định nghĩa 3.1

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx = \lim_{A\to\infty} [F(A) - F(a)] = F(x)\Big|_a^{+\infty},$$

trong đó $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và tồn tại $\lim\limits_{A\to\infty} F(A) = F(+\infty)$; trong trường hợp này ta nói tích phân suy rộng hội tụ; ngược lại gọi là phân kỳ.
Tương tự ta cũng có

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^a f(x)dx = \lim_{M\to-\infty} F(x)\Big|_M^a = F(x)\Big|_{-\infty}^a$$

và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Ví dụ 1

Tính

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$;
2. $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2} dx$ $\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}\right]$;
3. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ [hội tụ $\iff \alpha > 1$];
4. $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Ví dụ 1

Tính

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$;
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}dx \quad \left[\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}\right]$;
3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad [$hội tụ $\iff \alpha > 1]$;
4. $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx \quad \left[\frac{1}{2}\right]$.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Ví dụ 1

Tính

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad \left[\frac{\pi}{4}\right];$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2} dx \quad \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}\right];$
3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\left[\text{hội tụ} \iff \alpha > 1\right];$
4. $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx \quad \left[\frac{1}{2}\right].$

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Ví dụ 1

Tính

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$;
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx \quad \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}\right]$;
3. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad$ [hội tụ $\iff \alpha > 1$];
4. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx \quad \left[\frac{1}{2}\right]$.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý 3.1

Giả sử $f(x) \geq 0$ *và khả tích trên* $[a, A]$, $\forall A > a$. *Khi đó*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ khi và chỉ khi } \exists L > 0 : \int_a^{A} f(x)dx \leq L \ \forall A.$$

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý 3.1

Giả sử $f(x) \geq 0$ *và khả tích trên* $[a, A]$, $\forall A > a$. *Khi đó*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ khi và chỉ khi } \exists L > 0 : \int\limits_a^{A} f(x)dx \leq L \ \forall A.$$

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Định lý 3.2

(Định lý so sánh)
Giả sử các hàm số $f(x)$ *và* $g(x)$ *liên tục trong khoảng* $[a, +\infty)$ *và*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq a.$$

Khi đó

- *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ;*
- *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ.*

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Hệ quả 3.1

Giả sử các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, không âm trong khoảng $[a, +\infty)$ và

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Khi đó

- Nếu $0 < k < +\infty$ thì các tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ;
- Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ;
- Nếu $k = +\infty$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Hệ quả 3.1

Giả sử các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, không âm trong khoảng $[a, +\infty)$ và

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Khi đó

- Nếu $0 < k < +\infty$ thì các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ;
- Nếu $k = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ;
- Nếu $k = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Hệ quả 3.1

Giả sử các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, không âm trong khoảng $[a, +\infty)$ và

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Khi đó

- Nếu $0 < k < +\infty$ thì các tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ;
- Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ;
- Nếu $k = +\infty$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Ví dụ 2

Xét sự hội tụ

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+x^3}{x^4+1} dx$ [Phân kỳ];
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} dx$ [Phân kỳ];
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{10} dx}{\left(x^4+x^3+x^2+1\right)^3}$ [Hội tụ];
4. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{3/2}}$ [Hội tụ].

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Ví dụ 2

Xét sự hội tụ

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+x^3}{x^4+1}dx$ [Phân kỳ];
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$ [Phân kỳ];
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{10}dx}{\left(x^4+x^3+x^2+1\right)^3}$ [Hội tụ];
4. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{3/2}}$ [Hội tụ].

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Ví dụ 2

Xét sự hội tụ

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+x^3}{x^4+1}dx$ [Phân kỳ];
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$ [Phân kỳ];
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{10}dx}{\left(x^4+x^3+x^2+1\right)^3}$ [Hội tụ];
4. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{3/2}}$ [Hội tụ].

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Ví dụ 2

Xét sự hội tụ

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+x^3}{x^4+1}dx$ [Phân kỳ];
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$ [Phân kỳ];
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{10}dx}{\left(x^4+x^3+x^2+1\right)^3}$ [Hội tụ];
4. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{3/2}}$ [Hội tụ].

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

Định lý 3.3

(Định lý về sự hội tụ tuyệt đối)
Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ, trong trường hợp này ta nói* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối.*

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (loại 2)

Định nghĩa 3.2

Giả sử hàm $f(x)$ xác định trên khoảng $[a, b)$ và $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$ (b là điểm bất thường). Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, tồn tại $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ đủ bé, thì tích phân suy rộng loại hai hội tụ và ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon};$$

trường hợp ngược lại gọi là phân kỳ.
Tương tự ta cũng có khi $f(x) \to \infty$ tại $x = a$ (a là điểm bất thường)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b}.$$

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (loại 2)

Định nghĩa 3.2 (tiếp)

Trong trường hợp hàm $f(x)$ ra vô hạn tại $x = a$ và $x = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tích phân suy rộng ở vế trái hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở vế phải hội tụ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (loại 2)

Định lý 3.4

(Định lý so sánh)
Giả sử hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a, b)$, tại $x = b$ hàm f và g ra vô hạn và

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b).$$

Khi đó

- *nếu* $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ;*
- *nếu* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^b g(x)dx$ *phân kỳ.*

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (loại 2)

Hệ quả 3.2

Giả sử các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, không âm trong khoảng $[a, b]$ và

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Khi đó

- Nếu $0 < k < +\infty$ thì các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ;
- Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ;
- Nếu $k = +\infty$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (loại 2)

Hệ quả 3.2

Giả sử các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, không âm trong khoảng $[a,b]$ và

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Khi đó

- Nếu $0 < k < +\infty$ thì các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ;
- Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ;
- Nếu $k = +\infty$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (loại 2)

Hệ quả 3.2

Giả sử các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, không âm trong khoảng $[a, b]$ và

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Khi đó

- Nếu $0 < k < +\infty$ thì các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ;
- Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ;
- Nếu $k = +\infty$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (loại 2)

Định lý 3.5

(Định lý về hội tụ tuyệt đối)
Nếu $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ, trong trường hợp này ta nói tích phân suy rộng (tại* b*)* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối.*

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (loại 2)

Chú ý 3.1

Khi xét sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng, thường sử dụng các đánh giá sau:

1. Đối với tích phân suy rộng loại 1:
   Nếu $f(x) \geq 0$ là vô cùng bé bậc $\lambda > 0$ khi $x \to +\infty$ thì so sánh với $\dfrac{1}{x^\lambda}$. Nếu $\lambda > 1$ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và phân kỳ khi $\lambda \leq 1$.
2. Đối với tích phân suy rộng loại 2:
   Nếu $f(x) \geq 0$ là vô cùng lớn bậc $\lambda > 0$ khi $x \to b$ (suy rộng tại cận trên), thì so sánh với $\dfrac{1}{(b-x)^\lambda}$. Nếu $\lambda < 1$ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ và phân kỳ khi $\lambda \geq 1$.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn (loại 2)

Ví dụ 3

Xét sự hội tụ của các tích phân

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$ $\big[$Hội tụ$\big]$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$ $\big[$Hội tụ$\big]$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$ $\big[$Hội tụ$\big]$;
4. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^k x}$ $\big[$ Hội tụ $\iff k<1\big]$.

Tích phân suy rộng

Chú ý 3.2

Khi hàm f có điểm bất thường là a thì ta phân tích

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx$$

khi đó tích phân suy rộng ở vế trái hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân ở vế phải cùng hội tụ.

Ví dụ 4

Xét sự hội tụ của các tích phân

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 - 1}}$ [hội tụ];
2. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{4^x - 2^x} dx$ [hội tụ];
3. $\int_2^{\infty} \frac{\sin(x-2)}{\sqrt{(x-2)^3}} dx$ [hội tụ].

Tích phân suy rộng

Chú ý 3.2

Khi hàm f có điểm bất thường là a thì ta phân tích

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx$$

khi đó tích phân suy rộng ở vế trái hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân ở vế phải cùng hội tụ.

Ví dụ 4

Xét sự hội tụ của các tích phân

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 - 1}}$ [hội tụ];
2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{4^x - 2^x} dx$ [hội tụ];
3. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sin(x-2)}{\sqrt{(x-2)^3}} dx$ [hội tụ].

Nội dung

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Đường cong trong toạ độ Descarter

- Diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ được tính bởi công thức $S = \int_a^b |f(x)|\, dx$.
- Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$:

$$S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

- Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \alpha(y),\ x = \beta(y),\ y = c,\ y = d$:

$$S = \int\limits_c^d |\alpha(y) - \beta(y)|\, dy.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Đường cong trong toạ độ Descarter

- Diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ được tính bởi công thức $S = \int_a^b |f(x)|\,dx$.
- Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$:

$$S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

- Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \alpha(y),\ x = \beta(y),\ y = c,\ y = d$:

$$S = \int\limits_c^d |\alpha(y) - \beta(y)|\,dy.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Đường cong trong toạ độ Descarter

- Diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ được tính bởi công thức $S = \int_a^b |f(x)|\, dx$.
- Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

- Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \alpha(y),\ x = \beta(y),\ y = c,\ y = d$:

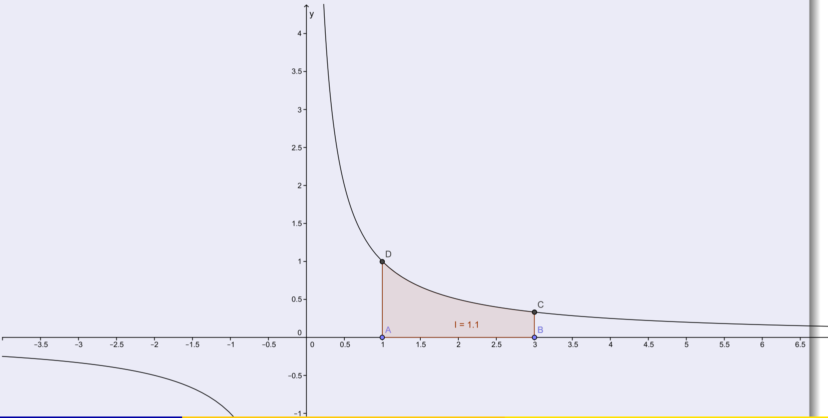
$$S = \int_c^d |\alpha(y) - \beta(y)|\, dy.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ 1

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

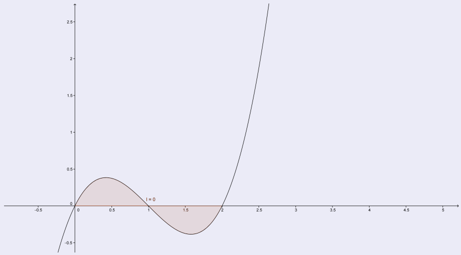


Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ 2

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x(x-1)(x-2)$ và trục Ox.



Ta có

$$I = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 (-f(x))dx = \frac{1}{2}.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Đường cong cho dưới dạng tham số

Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$ ta có

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left| y(t)x'(t) \right| dt.$$

Ví dụ 3

Tính diện tích hình giới hạn bởi đường cong (ellipse)
$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi \quad (a, b > 0).$
Ta có

$$S = \int_{0}^{2\pi} \left| b\sin t.(-a\sin t) \right| dt = \pi ab.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Đường cong cho dưới dạng tham số

Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$ ta có

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left| y(t)x'(t) \right| dt.$$

Ví dụ 3

Tính diện tích hình giới hạn bởi đường cong (ellipse)
$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a, b > 0)$.
Ta có

$$S = \int_{0}^{2\pi} |b\sin t.(-a\sin t)|\, dt = \pi ab.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính thể tích

- Thể tích vật thể có thiết diện thẳng góc với Ox với diện tích $S(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Tương tự, nếu vật thể có thiết diện thẳng góc với Oy với diện tích $S(y)$, $c \leq y \leq d$:

$$V = \int_c^d S(y)dy.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính thể tích

- Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay hình giới hạn bởi $y = y(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b [y(x)]^2\, dx.$$

- Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay hình giới hạn bởi $x = x(y),\ x = 0,\ y = c,\ y = d$ quanh trục Oy là

$$V = \pi \int_c^d [x(y)]^2\, dy.$$

- Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay $y = y(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ quanh trục Oy còn có thể được tính theo công thức

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính thể tích

- Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay hình giới hạn bởi $y = y(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b [y(x)]^2\, dx.$$

- Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay hình giới hạn bởi $x = x(y),\ x = 0,\ y = c,\ y = d$ quanh trục Oy là

$$V = \pi \int_c^d [x(y)]^2\, dy.$$

- Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay $y = y(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ quanh trục Oy còn có thể được tính theo công thức

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính thể tích

- Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay hình giới hạn bởi $y = y(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b [y(x)]^2\, dx.$$

- Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay hình giới hạn bởi $x = x(y),\ x = 0,\ y = c,\ y = d$ quanh trục Oy là

$$V = \pi \int_c^d [x(y)]^2\, dy.$$

- Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay $y = y(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ quanh trục Oy còn có thể được tính theo công thức

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích mặt tròn xoay

- Diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi quay $y = y(x),\ a \le x \le b$ quanh trục Ox:

$$S = 2\pi \int\limits_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

- Diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi quay $x = x(y),\ c \le y \le d$ quanh trục Oy:

$$S = 2\pi \int\limits_a^b |x(y)| \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy.$$

- Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases},\quad \alpha \le t \le \beta$ quay quanh trục Ox:

$$S = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Nếu quay quanh trục Oy : $S = 2\pi \int^\beta |x(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích mặt tròn xoay

- Diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi quay $y = y(x),\ a \le x \le b$ quanh trục Ox:

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

- Diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi quay $x = x(y),\ c \le y \le d$ quanh trục Oy:

$$S = 2\pi \int_a^b |x(y)| \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy.$$

- Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases},\quad \alpha \le t \le \beta$ quay quanh trục Ox:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Nếu quay quanh trục Oy : $S = 2\pi \int^\beta |x(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích mặt tròn xoay

- Diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi quay $y = y(x),\ a \leq x \leq b$ quanh trục Ox:

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

- Diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi quay $x = x(y),\ c \leq y \leq d$ quanh trục Oy:

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} |x(y)| \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy.$$

- Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x & = x(t) \\ y & = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$ quay quanh trục Ox:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Nếu quay quanh trục Oy : $S = 2\pi \int^{\beta} |x(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính độ dài cung

1. Giả sử cung AB được xác định bởi phương trình $y = y(x)$, $a \le x \le b$, đồng thời $y'(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó ta có

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx.$$

2. Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ thì ta có

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

3. Trường hợp đường cong trong toạ độ cực: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$:

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}d\varphi.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính độ dài cung

1. Giả sử cung AB được xác định bởi phương trình $y = y(x),\ a \le x \le b$, đồng thời $y'(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó ta có

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx.$$

2. Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$ thì ta có

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

3. Trường hợp đường cong trong toạ độ cực: $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$:

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi.$$

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính độ dài cung

1. Giả sử cung AB được xác định bởi phương trình $y = y(x),\ a \le x \le b$, đồng thời $y'(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó ta có

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx.$$

2. Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$ thì ta có

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

3. Trường hợp đường cong trong toạ độ cực: $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$:

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi.$$