GIẢI TÍCH I

BÀI 1

(§1 – §5)

- Tổng quan
- Phương pháp học

§1. Các tập hợp số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

• Đặt vấn đề

I. Sơ lược về các yếu tố logic

1. Điều kiện cần và đủ

- $P \Rightarrow Q$
- $P \Leftrightarrow Q$

2. Mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$

3. Chứng minh logic

a) Phương pháp bắc cầu: $(P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

b) Phương pháp phủ định: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$

c) Phương pháp chỉ ra phản ví dụ

4. Phương pháp quy nạp. Cần chứng minh mệnh đề $T(n)$ đúng $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Giả sử có +) $T(1)$ đúng

+) $T(k)$ đúng $\Rightarrow T(k+1)$ đúng, $k \in \mathbb{N}$.

Khi đó $T(n)$ đúng $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

II. Các tập hợp số

1. Sự cần thiết mở rộng tập hợp số $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. Hệ tiên đề của tập hợp số thực

a) $\mathbb{R}$ (+, .): $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ có $a + b \in \mathbb{R}$, $a.b \in \mathbb{R}$

giao hoán, kết hợp

b) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists!\ x \in \mathbb{R} : a + x = b$.

c) $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \Rightarrow \exists!\ x \in \mathbb{R} : a.x = b$.

d) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \leq b$ hoặc $b \leq a$

quan hệ thứ tự có tính chất phản đối xứng, bắc cầu.

e) Tiên đề supremum

• $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, A bị chặn trên đều có supremum $\in \mathbb{R}$

• $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, A bị chặn dưới đều có infimum $\in \mathbb{R}$

Chú ý

Từ trên nhận được các tính chất đã biết ở phổ thông, chẳng hạn

• T/c Archimede: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0 \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$: $na > b$.

• $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow \exists\ r \in \mathbb{Q}$: $a < r < b$.

§ 2. TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ CÁC TÍNH CHẤT

• Đặt vấn đề

1. Định nghĩa. $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

2. Tính chất

a) $|x| < a$, $a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$.

b) $|x| > b$, $b > 0 \Leftrightarrow x > b$ hoặc $x < -b$.

c) $|a + b| \leq |a| + |b|$

d) $|ab| = |a||b|$

e) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

§ 3 HÀM SỐ

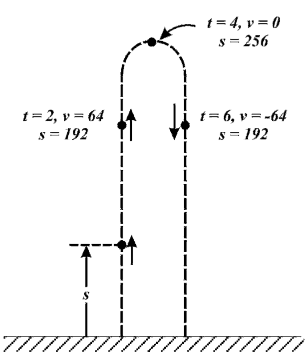
• Đặt vấn đề

1. Định nghĩa. $X \subset \mathbb{R}$, tương ứng f: $X \to \mathbb{R}$ là hàm số nếu thoả mãn:

+) $\forall x \in X \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$

+) $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Khi đó X là tập xác định, còn $\{f(x),\ x \in X\}$ là tập giá trị.



Ví dụ 1. Một tên lửa phóng thẳng lên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 128ft/s. Tên lửa này chuyển động lên hoặc xuống theo đường thẳng. Bằng thực nghiệm, độ cao của tên lửa được cho bởi công thức $f(t) = 128t - 16t^2$

Ví dụ 2. $x \to x^2 + y^2 = 1$

Ví dụ 3. Tìm tập xác định $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos \pi x}$

Ví dụ 4. Tìm tập giá trị $y = \sin x + \cos x$

Ví dụ 5. Tìm $f(x)$ biết $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$, $x > 0$.

2. Một số khái niệm

a) Đồ thị của hàm $y = f(x)$ là $\{(x, f(x)), x \in$ TXĐ$\}$

b) $y = f(x)$ chẵn $\Leftrightarrow \forall\, x \in$ MXĐ có $f(x) = f(-x)$

Ví dụ. $y = \sqrt[3]{(1-x)} + \sqrt[3]{(1+x)}$

c) $y = f(x)$ lẻ $\Leftrightarrow \forall\, x \in$ MXĐ có $f(x) = -f(-x)$

Ví dụ. $y = a^x - a^{-x}$, $a > 0$.

d) Hàm $y = f(x)$ tuần hoàn $\Leftrightarrow \exists\, T \neq 0$: $f(x + T) = f(x)$, $\forall\, x \in$ TXĐ.

Số $T > 0$ bé nhất để $f(x + T) = f(x)$, $\forall\, x$ được gọi là chu kì.

Ví dụ. $y = \sqrt{\tan x}$

đ) Hàm hợp: $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, có hàm hợp $y = f \circ \varphi \equiv f(\varphi(t))$

e) Hàm ngược: $y = f(x)$, TXĐ X, TGT: Y có hàm ngược $x = \varphi(y)$

$\Leftrightarrow$ +) $(f \circ \varphi)(y) = y$, $\forall\, y \in Y$

+) $(\varphi \circ f)(x) = x$, $\forall\, x \in X$

Ví dụ. $y = \sqrt{1-x^2}$ với $-1 \le x \le 0$, có $x = -\sqrt{1-y^2}$, $y \in [0\,;\,1]$

§ 4. HÀM SỐ SƠ CẤP

1. Định nghĩa. Các hàm số sơ cấp cơ bản là x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, và các hàm lượng giác ngược.

2. Các hàm số sơ cấp cơ bản

a) $y = x^\alpha$, TXĐ: phụ thuộc α, đồ thị $\ni (1\,;\,1)$, $\forall\, \alpha$.

b) $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, TXĐ: $\mathbb{R}$, TGT: $y > 0$, đồng biến khi $a > 1$, nghịch biến khi $a < 1$

$$a^{x+y} = a^x\, a^y\,,\; a^{x-y} = a^x / a^y$$

c) $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, TXĐ: $x > 0$, TGT: $\mathbb{R}$, đồng biến khi $a > 1$, nghịch biến khi $a < 1$

$\log_a xy = \log_a|x| + \log_a|y|$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$, $\log_a x^\alpha = \alpha\log_a|x|$;

$y = \log_a x$ có hàm ngược là $x = a^y$.

d) Các hàm lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

e) Các hàm lượng giác ngược

+) $y = \arcsin x$: $[-1\,;\,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ là hàm ngược của hàm $y = \sin x$

+) $y = \arccos x$: $[-1\,;\,1] \to [0\,;\,\pi]$ là hàm ngược của hàm $y = \cos x$

+) $y = \arctan x$: $(-\infty\,;\,\infty) \to \left(-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ là hàm ngược của hàm $y = \tan x$

+) $y = \operatorname{arccot} x$: $(-\infty\,;\,\infty) \to (0\,;\,\pi)$ là hàm ngược của hàm $y = \cot x$

3. Hàm số sơ cấp

Định nghĩa. Tạo nên từ các hàm số sơ cấp cơ bản bởi số hữu hạn các phép tổng, hiệu, tích, thương, phép lấy hàm hợp và các hằng số

Ví dụ 1. $y = \sqrt[3]{x+\sin x}$

Ví dụ 2. $y = |x|$

Ví dụ 3. $y = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

§ 5. DÃY SỐ

• Đặt vấn đề

1. Định nghĩa. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,\ x_i \in \mathbb{R}$.

2. Giới hạn.

a) Định nghĩa

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon \geq 0$, bé tuỳ ý, $\exists\ N(\varepsilon)$: $\forall\ n > N(\varepsilon)$ thì có $|x_n - a| < \varepsilon$.

Định nghĩa.

Khi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall\ M > 0$, lớn tuỳ ý, $\exists\ N$: $\forall\ n > N$ có $|x_n| > M$, ta nói dãy số phân kì

b) Tính chất

1°) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a > p$ $(a < p) \Rightarrow \exists N$: $\forall n > N$ có $x_n > p$ $(x_n < p)$

2°) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \leq p$ $(x_n \geq p) \Rightarrow a \leq p$ $(a \geq p)$

3°) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow a = b$.

4°) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists M > 0$: $|x_n| \leq M$, $\forall n$.

c) Phép toán

Có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, khi đó ta có

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$; $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$, $y_n \neq 0$, $\forall\ n$.

d) Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

1°) Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn. $\forall$ dãy đơn điệu tăng (giảm) bị chặn trên (dưới) $\Rightarrow$ có giới hạn.

2°) Tiêu chuẩn kẹp. Có $x_n \le y_n \le z_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

3°) Tiêu chuẩn Cauchy. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon): \forall m, n > N$ có $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Ví dụ 1. Cho dãy x_n: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn.

Ví dụ 2. Cho dãy x_n: $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)$. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH I
BÀI 2.
(§6, §7, §8)
§6. Giới hạn hàm số

• Đặt vấn đề

a) $\lim\limits_{x\to 1} 2^x = ?$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = ?$ **c)** $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = ?$

I. Định nghĩa

– ĐN1. $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$ là điểm tụ của $X \Leftrightarrow \exists\, x \in U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}, \forall\, \varepsilon > 0$.

– ĐN2. $f(x)$ xác định trên X, x_0 là điểm tụ của X. Ta bảo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\,(x_n) \subset X,\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a.$$

– ĐN3. $f(x)$ xác định trên X, x_0 là điểm tụ của X. Ta bảo

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$: $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Chú ý. ĐN2 ~ ĐN3.

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x\to 2} (3x+2)$ **Ví dụ 2.** $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$

II. Tính chất và phép toán

1) Tính chất

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b \Rightarrow a = b$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - a) = 0$

c) $f(x) = c \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$

d) $f(x) \le h(x) \le g(x),\ \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0);\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$

e) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Rightarrow |f(x)| \le c,\ \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus \{x_0\}$

f) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ a > p \Rightarrow f(x) > p,\ \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus \{x_0\}$

2. Phép toán

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x).g(x)\right)=a.b$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b},\ (b\neq 0)$

3. Khử dạng vô định

a) Các dạng vô định $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; $\infty-\infty$; 1^{∞}; 0^0; ∞^0

b) Khử dạng vô định. Sử dụng các phép biến đổi đại số và các giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ;\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\tan\dfrac{\pi x}{4}$

Ví dụ 3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{2x+1}$

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$ $\quad(e^{-\frac{1}{2}})$

III. Giới hạn hàm hợp, một phía, vô cực

1. Giới hạn hàm hợp. $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0,\ \lim\limits_{u\to u_0} f(u)=a \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=a$

2. Giới hạn một phía.

Định nghĩa 4.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ bé tuỳ ý, $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$: $0<x-x_0<\delta(\varepsilon)\Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$.

Định nghĩa 5.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ bé tuỳ ý, $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$: $0<x_0-x<\delta(\varepsilon)\Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$.

Mối liên hệ giữa giới hạn một phía và giới hạn

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

3. Giới hạn ở vô cực và giới hạn vô cực

Định nghĩa 6. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\ (x_n)\to\infty$ có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$

Định nghĩa 7. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ bé tuỳ ý, $\exists\ N(\varepsilon)>0$: $|x|>N(\varepsilon)\Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$.

Chú ý. ĐN6 ~ ĐN7.

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x}}{x+\sqrt[5]{x^4}+2x}$

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Ví dụ 3. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin x-\sin\sqrt{1+x^2}\right)$ (0)

Ví dụ 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x-1}-\cos\sqrt{x+1}\right)$ (0)

Định nghĩa 8. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall\ (x_n)\to\infty$ có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$

Định nghĩa 9

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall\ N>0$ lớn tuỳ ý, $\exists\ \delta(N)>0$: $|x-x_0|<\delta(N)\Rightarrow|f(x)|>N$.

§7. Vô cùng bé, vô cùng lớn

• Đặt vấn đề

I. Vô cùng bé

I. Định nghĩa. $\alpha(x)$ là VCB, $x\to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

2. Tính chất.

a) $\alpha(x)$ là VCB, $x\to x_0$, $c=$ const $\Rightarrow c\alpha(x)$ là VCB khi $x\to x_0$.

b) $\alpha_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ là VCB khi $x\to x_0\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$ là VCB khi $x\to x_0$

c) $\alpha(x)$ là VCB khi $x\to x_0$, $f(x)$ bị chặn trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)\Rightarrow \alpha(x)f(x)$ là VCB, $x\to x_0$

3. Liên hệ giữa VCB và giới hạn

Định lí. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow f(x)-L$ là VCB khi $x\to x_0$ (hay $f(x)=L+\alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB)

4. So sánh VCB. Giả sử $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x\to x_0$.

Định nghĩa. $\alpha(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$

Định nghĩa. $\alpha(x)$ là VCB cùng cấp với VCB $\beta(x)$ khi $x\to x_0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Định nghĩa. $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn VCB $\beta(x)$ khi $x\to x_0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$

Ví dụ 1. a) $\sin x\sim x$, $e^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ khi $x\to 0$

b) Cho $\alpha(x)=\dfrac{ex}{2}$, $\beta(x)=e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Chứng minh rằng $\alpha(x)\sim\beta(x)$ khi $x\to 0$.

c) Cho $\alpha(x) = e - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}, \quad \beta(x) = ex.$

Chứng minh rằng $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to 0$.

5. Ứng dụng tìm giới hạn

a) $\alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x)$, $\beta(x) \sim \bar{\beta}(x)$, $x \to x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^x - 1\right)\tan x}{\sin^2 x}$

Ví dụ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x}\sqrt[4]{1+4x} - 1}{\sqrt{1-x} - 1}$ (– 4)

b) $\beta(x)$ là VCB cấp cao hơn $\alpha(x)$ khi $x \to x_0 \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

c) $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$;

$\alpha(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k(x)$, $\alpha_1(x)$ là VCB có cấp thấp nhất;

$\beta(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k(x)$, $\beta_1(x)$ là VCB có cấp thấp nhất

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Ví dụ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \sin^3 x + \tan^4 x}{4x + x^4 + 5x^8}$

II. Vô cùng lớn

1. Định nghĩa. $f(x)$ xác định $U_{\varepsilon_0}(x_0)$ (có thể trừ x_0), $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

Chú ý. Hàm là VCL $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ không bị chặn

Ví dụ 6. $f(x) = x\sin x$ là không bị chặn nhưng không phải là VCL.

2. Liên hệ giữa VCB và VCL

a) $f(x)$ là VCB, $x \to x_0$ và $f(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \to x_0$.

b) $f(x)$ là VCL, $x \to x_0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \to x_0$.

3. So sánh các VCL. Giả sử $A(x)$, $B(x)$ là các VCL khi $x \to x_0$,

a) $A(x)$ là VCL cấp cao hơn VCL $B(x)$, $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \infty$

b) $A(x)$, $B(x)$ là các VCL cùng cấp, $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = a \neq 0$

c) $A(x)$, $B(x)$ là các VCL tương đương, $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = 1$.

4. Ứng dụng tìm giới hạn

a) Cho các VCL tương đương $A(x) \sim \bar{A}(x)$, $B(x) \sim \bar{B}(x)$, $x \to x_0 \Rightarrow$
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\bar{A}(x)}{\bar{B}(x)}$

b) Cho $A(x)$, $B(x)$ là các VCL khi $x \to x_0$;

$A(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(x)$, $A_1(x)$ là VCL có cấp cao nhất;

$B(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k(x)$, $B_1(x)$ là VCL có cấp cao nhất

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$

Ví dụ 7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{9x^4 + x^3 + x + 2}{2009x^4 + 3x^2 + x + 1} = \dfrac{9}{2009}$

Ví dụ 8. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{\cot(x^2 - 1)}$ $\quad (e^{-\frac{1}{2}})$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (2 + x)^{\cot(1 - x^2)}$ $\quad (e^{\frac{1}{2}})$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - 4^x)\ln(1 + 2x)}{x^2 + 2x^3}$ $\quad (-2\ln 4)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - 9^x)\ln(1 + 3x)}{3x^2 - 4x^3}$ $\quad (-2\ln 3)$

§ 8. HÀM SỐ LIÊN TỤC

• Đặt vấn đề

I. Hàm liên tục

1. Định nghĩa. $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow$

+) $f(x)$ xác định trên $U_{\varepsilon_0}(x_0)$

+) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0\right)$

$f(x)$ liên tục trái tại $x_0 \Leftrightarrow$ +) $f(x)$ xác định trên $U_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \{x < x_0\}$

$$+)\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Tương tự ta có ĐN liên tục phải.

Định nghĩa. $f(x)$ liên tục trên $(a\,;b) \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $\forall\, x \in (a\,;b)$

$f(x)$ liên tục trên $[a\,;b] \Leftrightarrow f(x)$ liên tục trong $(a\,;b)$, liên tục trái tại b và liên tục phải tại a.

Ví dụ 1. Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$: $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

Ví dụ 2. a) Tìm a để $y = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{1}{x-1}}{2^{\frac{1}{x-1}}+1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$

liên tục tại $x = 1$. $(\nexists\ a)$

b) Tìm a để $y = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{1}{x+1}}{2^{\frac{1}{x+1}}+1}, & x \neq -1 \\ a, & x = -1 \end{cases}$

liên tục tại $x = -1$. $(\nexists\ a)$

Ví dụ 3. a) Tìm a để $y = \begin{cases} a\sin(\operatorname{arccot} x), & x \leq 0 \\ \cos\ln x - \cos\ln(x + x^2), & x > 0 \end{cases}$

liên tục tại $x = 0$. $(a = 0)$.

b) Tìm a để $y = \begin{cases} a\cos(\arctan x), & x \leq 0 \\ \sin\ln(x + x^2) - \sin\ln x, & x > 0 \end{cases}$

liên tục tại $x = 0$. $(a = 0)$.

2. Tính liên tục của các hàm sơ cấp. Mọi hàm số sơ cấp liên tục trên các khoảng mà hàm số đó xác định.

3. Phép toán. Cho $f(x)$, $g(x)$ liên tục tại $x_0 \Rightarrow f(x) \pm g(x)$ liên tục tại x_0, $f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 và $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$

4. Ý nghĩa. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b] \Rightarrow$ đồ thị là đường liền nét.

5. Tính chất

Định lí 1. (Weierstrass 1) $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b] \Rightarrow f(x)$ bị chặn trên $[a\,;\,b]$

Định lí 2. (Weierstrass 2) $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b] \Rightarrow f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trên $[a\,;\,b]$

Định lí 3. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$, $M = \max\limits_{[a;\,b]} f$, $N = \min\limits_{[a;\,b]} f$, $\mu \in [m\,;\,M] \Rightarrow \exists\, c \in [a\,;\,b]$: $f(c) = \mu$.

Hệ quả. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$, $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a\,;\,b)$: $f(c) = 0$.

6. Điểm gián đoạn

Định nghĩa. $f(x)$ xác định $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, gián đoạn tại $x_0 \Leftrightarrow f(x)$ không liên tục tại x_0.

$f(x)$ xác định $U_{\varepsilon_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$ thì ta bảo $f(x)$ gián đoạn tại x_0

Định nghĩa. Điểm gián đoạn x_0 của hàm $f(x)$ là điểm gián đoạn loại 1

$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x), \exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Các điểm gián đoạn còn lại được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Ví dụ 4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Ví dụ 5. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Ví dụ 6. Phân loại điểm gián đoạn của hàm số

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{x-1}{x}}}$ ($x = 1$, loại 2; $x = 0$, loại 1)

b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 3^{\frac{x+1}{x}}}$ ($x = -1$, loại 2; $x = 0$, loại 1)

II. Hàm số liên tục đều

Định nghĩa. $f(x)$ liên tục đều trên $X \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý. $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall\, x_1, x_2 \in X$, $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Ví dụ 7. $y = x + 2$.

Định lí (Cantor). $f(x)$ liên tục trong $[a\,;\,b] \Rightarrow f(x)$ liên tục đều trong $[a\,;\,b]$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH I

BÀI 3.

§9. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

• Đặt vấn đề

I. Định nghĩa. $f(x)$ xác định trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $f'(x_0) = a$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 1. $y = 2010$, tính y'

Ví dụ 2. $y = x^3$, tính y'

Ví dụ 3. $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, tính y'

Ví dụ 4. $y = |x|$, xét $y'(0)$

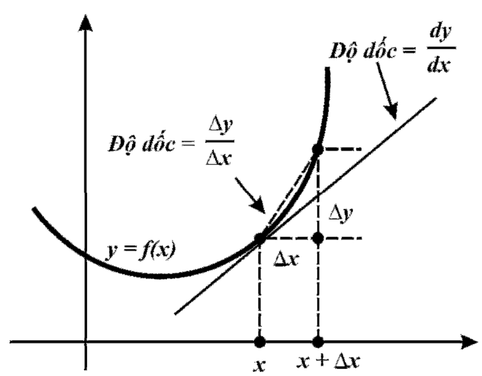
Ví dụ 5. Tìm k để hàm số $f'(x)$ liên tục tại $x = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} (\arcsin x)^k \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\quad (k > 2)$

b) $f(x) = \begin{cases} (\arctan x)^k \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\quad (k > 2)$

a) Ý nghĩa hình học

$f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$.



b) Ý nghĩa cơ học. Xét chất điểm M chuyển động thẳng, không đều với quãng đường là $S(t)$ tính từ điểm O nào đó. Khi đó vận tốc tức thời tại t_0 là

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Ví dụ 6. Một người đi xe máy với vận tốc 30km/h trong nửa đầu tiên của đoạn đường và 20km/h trong nửa thứ hai. Hỏi vận tốc trung bình là bao nhiêu?

(24km/h)

Ví dụ 7. Một tên lửa bắn thẳng lên từ mặt đất với vận tốc ban đầu v_0 m/s và đạt độ cao trong t giây là $S = tv_0 - 16t^2$

a) Tìm vận tốc ở thời điểm t

b) Mất bao lâu để tên lửa đạt tới độ cao tối đa?

c) Tính vận tốc tên lửa khi chạm đất

d) Vận tốc ban đầu là bao nhiêu để tên lửa chạm đất sau khi bắn 15 giây.

c) Ý nghĩa thực tế. $\dfrac{dy}{dx}$ là suất biến đổi của y theo x.

Ví dụ 8. Cho hình tròn bán kính r, ta có $S = \pi r^2$, ta có $S' = 2\pi r$. Như vậy suất biến đổi diện tích của một hình tròn theo bán kính chính bằng chu vi của nó.

Ví dụ 9. Một cái thang dài 13ft đứng dựa vào bức tường thì chân thang bị trượt ra xa bức tường với tốc độ không đổi 6ft/s. Đầu trên của chiếc thang chuyển động xuống dưới nhanh như thế nào khi chân thang cách tường 5ft?

Ví dụ 10. Người ta hút dầu ra khỏi thùng để làm sạch nó. Biết sau khi hút t phút lượng dầu còn lại trong thùng là $V = 40(50 - t)^2$ lít.

a) Tìm lượng dầu hút trung bình trong 20 phút đầu tiên.

$$\left(v_{tb} = \frac{40.50 - 40.30^2}{20} = 3200\ (\text{l/p})\right)$$

b) Tìm tốc độ dầu được hút ra khỏi thùng tại thời điểm $t = 20$ phút.

$$\left(v(20) = (40.50^2 - v)'_{t=10} = 2400\,\text{l/p}\right)$$

Ví dụ 11. Một cái thùng hình nón với đỉnh ở phía dưới có chiều cao 12 ft và đường kính đáy là 12ft được bơm đầy nước với tốc độ không đổi là 4ft^3/phút. Hãy tính tốc độ biến đổi chiều cao cột nước khi

a) nước sâu 2ft $\left(y'(2) = \dfrac{1}{\pi}\right)$

b) nước sâu 8ft. $\left(y'(8) = \dfrac{1}{16\pi}\right)$

2. Đạo hàm một phía, mối liên hệ với liên tục, đạo hàm của hàm ngược.

a) Đạo hàm một phía.

Định nghĩa.

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};\ f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nhận xét. $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$

Ví dụ 1. $y = \sqrt{1 - x}$, xét $y'(1 - 0)$

b) Liên hệ đạo hàm và liên tục.

$\exists f'(x_0) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại x_0.

Ngược lại không đúng, ví dụ $y = \sqrt[3]{x}$ liên tục tại $x_0 = 0$ nhưng $\nexists\ f'(0)$.

c) Đạo hàm của hàm số ngược

+) Hàm số $x = \varphi(y)$ có hàm ngược $y = f(x)$

+) $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = \varphi(y_0)$

+) $\varphi'(y_0) \neq 0$

Khi đó ta có $f'(x_0) = \dfrac{1}{\varphi'(y_0)}$.

Ví dụ 2. $y = \text{arccot}\, x$, tính y'.

Ví dụ 3. $y = \arcsin x$, tính y'.

3. Phép toán và công thức.

a) Phép toán. Các hàm f, g khả vi tại $x_0 \Rightarrow$

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$, $g(x_0) \neq 0$.

b) Đạo hàm các hàm sơ cấp cơ bản.

Ta dẫn ra công thức của một vài hàm

- $c' = 0$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

c) Đạo hàm của hàm hợp.

$\exists\, y'_u(u_0)$, $\exists\, u'_x(x_0) \Rightarrow y = y(u(x))$ có đạo hàm tại x_0 và có $y'_x(x_0) = y'_u(u_0).u'_x(x_0)$.

Ví dụ 1. $y = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - 2009)$, tính $y'(1)$. (2008!)

Ví dụ 2. $y = \begin{cases} 2 + x, & x \le -2 \\ (2 + x)(x - 3), & -2 < x \le 3 \\ x - 3, & x > 3 \end{cases}$, tính y'. $\left(= \begin{cases} 1, & x < -2 \\ 2x - 1, & -2 < x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}\right)$

Ví dụ 3. $y = x^x$, tính y'.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng:

- Đạo hàm của hàm chẵn là hàm lẻ
- Đạo hàm của hàm lẻ là hàm chẵn
- Đạo hàm của hàm tuần hoàn là hàm tuần hoàn có cùng chu kì

Ví dụ 5. $y = x^{x^x}$, tính y'.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng

a) $3\arctan x + \arctan(x + 2) < 4\arctan(x + 1), \quad \forall x > 0$

b) $2\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(x + 2) > 3\operatorname{arccot}(x + 1), \quad \forall x > 0$

Ví dụ 7. **a)** CMR $\arctan x^4 - \arctan y^4 \le \ln \dfrac{x^2}{y^2}$, $\forall\, x, y$: $x \ge y > 0$.

b) CMR $\operatorname{arccot} x^4 - \operatorname{arccot} y^4 \ge \ln \dfrac{y^2}{x^2}$, $\forall\, x, y$: $x \ge y > 0$.

4. Vi phân

a) Định nghĩa. $f(x)$ xác định trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, nếu có $\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, ở đó A chỉ phụ thuộc vào x_0 chứ không phụ thuộc vào Δx, $\alpha(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn so với Δx thì ta nói $f(x)$ khả vi tại x_0 và có

$$df = A\Delta x.$$

Ví dụ 1. $y = 2x + 3$, tính dy.

b) Ý nghĩa hình học. Nếu $A \neq 0$ thì $\Delta f \sim df$.

Nhận xét $A\Delta x$ là tuyến tính đối với Δx nên nó đơn giản hơn Δf nhiều.

c) Ứng dụng tính gần đúng.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df.$$

Ví dụ 2. Tính gần đúng $\sqrt{4,01}$.

Ví dụ 3. Một mảnh kim loại hình vuông, mỗi cạnh 20cm, khi nung nóng mỗi cạnh dãn ra 0,1cm. Tính gần đúng phần diện tích mảnh kim loại dãn ra.

d) Liên hệ giữa đạo hàm và khả vi

$$f'(x_0) = A \Leftrightarrow df(x_0) = A\Delta x.$$

Ví dụ 4. $\dfrac{d}{d(x^2)}(x^6 + 3x^4 + 1)$

Ví dụ 5. $\dfrac{d}{d(x^3)}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$

e) Tính bất biến của vi phân cấp 1

$$y = f(x) \text{ khả vi, } x = \varphi(t) \text{ khả vi} \Rightarrow dy = f'(x)dx.$$

5. Đạo hàm và vi phân cấp cao

a) Đạo hàm cấp cao.

Định nghĩa. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Ví dụ 1. • $y = x^{(\alpha)}$, $y^{(n)} = ?$

• $y = \sin x$, $y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Quy tắc. $\exists\, f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ thì có

1°) $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$

2°) $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ 2. $y = x\ln x$, tính $y^{(5)}$

Ví dụ 3. $y = \sin ax \cos bx$, tính $y^{(20)}$

Ví dụ 4. $y = x^2\cos x$, tính $y^{(30)}$

Ví dụ 5. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, tính $y^{(n)}$

Ví dụ 6. Tính $y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$

a) $y = \dfrac{1 - 2x}{e^{2x}}$ $\quad\left((-2)^n e^{-2x}(n + 1 - 2x)\right)$

b) $y = x\ln(1 - 3x)$ $\quad\left(\dfrac{(n-2)!\,3^{n-1}}{(1 - 3x)^n}(3x - n)\right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH I
BÀI 4.
(§9, §10)

§9 ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN (Tiếp theo)

5. Đạo hàm và vi phân cấp cao.

a) Đạo hàm cấp cao.

Định nghĩa. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Ví dụ 1. a) $y = \sin x$, $y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tính $y^{(n)}$ c) $y = \log_a|x|$, tính $y^{(n)}$

Quy tắc. $\exists\, f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$

1°) $(\alpha f(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x)$

2°) $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$

3°) $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ 2. $y = x\ln x$, tính $y^{(5)}$

Ví dụ 3. $y = \sin ax\cos bx$, tính $y^{(20)}$

Ví dụ 4. $y = x^2\cos x$, tính $y^{(30)}$

Ví dụ 5. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, tính $y^{(n)}$

Ví dụ 6. a) $y = \dfrac{1-2x}{e^x}$, tính $y^{(n)}$ $\quad((-2)^n e^{-2x}(n + 1 - 2x))$

b) $y = x\ln(1 - 3x)$, tính $y^{(n)}$ $\quad\left(\dfrac{(n-2)!3^{n-1}}{(1-3x)^n}(3x - n)\right)$

c) $y = f(x)$, $\begin{cases} x = 3t + 2t^3 \\ y = te^{t^2} \end{cases}$, tính $f'(x)$, $f''(x)$ $\quad\left(f' = \dfrac{e^{t^2}}{3},\ f'' = \dfrac{2 + e^{t^2}}{9(1 + 2t^2)}\right)$

d) $y = f(x)$, $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = 2t - e^{2t} \end{cases}$, tính $f'(x)$, $f''(x)$ $\quad\left(f' = 2(1 - e^t),\ f'' = \dfrac{-2e^t}{1 + e^t}\right)$

e) $f(x) = x^2\sin(1 - x)$. Tính $f^{(50)}(1)$ $\quad(-100)$

f) $f(x) = (1 - x^2)\cos x$. Tính $f^{(51)}(0)$ $\quad(102)$

b) Vi phân cấp cao

Định nghĩa. $d^n f = d(d^{n-1}f)$

khi x là biến số độc lập ta có $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$.

Ví dụ 7. $y = x^3e^x$, tính $d^{10}y$

Vi phân cấp cao không có tính bất biến

Ví dụ 8. $y = x^3$, $x = t^2$, có $d^2y \neq y^{(2)}dx^2$

Ví dụ 9. a) $y = (x + 1)^2 \ln(2x + 3)$, tính $d^{11}y(-1)$, $(8!\,C_{11}^2 2^{10} dx^{11})$

b) $y = (1 - x^2)\ln(2x - 1)$, tính $d^{10}y(1)$. $(-7!\,C_{10}^2.2^9 dx^{10})$

Ví dụ 10. a) $f(x) = e^x \sin x$, tính $d^{22}f(0)$ $(-2^{11}dx^{22})$

b) $f(x) = e^x \cos x$, tính $d^{20}f(0)$ $(-2^{10}dx^{20})$

c) CMR: Với mọi số tự nhiên lẻ n, phương trình $x = \int\limits_0^x (\arctan t)^n \, dt$ có không quá 2 nghiệm thực phân biệt

d) CMR: Với mọi số tự nhiên lẻ n, phương trình $x = \int\limits_0^x (\operatorname{arccot} t)^n \, dt$ có không quá 2 nghiệm thực phân biệt.

§ 10. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG

• Đặt vấn đề.

1. Các định lí về hàm khả vi

Định lí Fermat. $f(x)$ xác định trên $(a\,;\,b)$, $f(x)$ đạt cực trị tại $c \in (a\,;\,b)$, $\exists\, f'(c)$ thì $f'(c) = 0$.

Ví dụ 1. a) $y = x^2$, $x \in (-1\,;\,2)$ b) $y = |x|$, $x \in (-1\,;\,1)$.

Định lí Rolle. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$, khả vi trên $(a\,;\,b)$, $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a\,;\,b)$ sao cho $f'(c) = 0$

Ví dụ 2. $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$, $x \in [-3\,;\,-1]$

Ví dụ 3. $f(x) = 2 - \sqrt[5]{x^4}$, $x \in [-1\,;\,1]$

Ví dụ 4. $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in \left[-\dfrac{3}{2}\,;\;1\right]$

Ví dụ 5. $f(x)$ khả vi $[0\,;\,1]$, $f'(0).f'(1) < 0$. CMR $\exists\, c \in (0\,;\,1)$: $f'(c) = 0$.

Ví dụ 6. a) Cho $a = b + c$. CMR phương trình $4ax^3 + 3bx^2 + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1\,;\,0)$.

b) Cho $a + b + c = 0$. CMR phương trình $ax^3 + 2bx + 2c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0\,;\,2)$.

Định lí Lagrange. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$, khả vi trên $(a\,;\,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a\,;\,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ví dụ 7. $f(x) = x(x+1)$, $x \in [0\ ;\ 2]$

Ví dụ 8. $f(x) = |x|(x-1)$, $x \in [-1\ ;\ 2]$

Ví dụ 9. CMR: $|\arctan a - \arctan b| \le |a-b|$

Ví dụ 10. a) Chứng minh rằng các VCB $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to +\infty$,

$$\alpha(x) = \arctan^2(x+1) - \arctan^2 x,\quad \beta(x) = \frac{\operatorname{arccot}(1-x^2)}{1+x^2}.$$

b) Chứng minh rằng các VCB $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to +\infty$,

$$\alpha(x) = \operatorname{arccot}^2(1-x) - \operatorname{arccot}^2(2-x),\quad \beta(x) = \frac{4\operatorname{arccot}(1-x^2)}{1+x^2}.$$

c) Chứng minh rằng $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \ln 2$

d) Chứng minh rằng $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n-k} > \ln 2$

e) Tìm a để $\alpha(x) = \tan\dfrac{1}{3+x^a} - \tan\dfrac{1}{1+x^a}$ là VCB cùng bậc với $\dfrac{1}{x^4}$ khi $x \to +\infty$.

f) Tìm a để $\alpha(x) = \tan\dfrac{1}{2+x^a} - \tan\dfrac{1}{5+x^a}$ là VCB cùng bậc với $\dfrac{1}{x^6}$ khi $x \to +\infty$.

Định lí Cauchy. $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a\ ;\ b]$, khả vi trên $(a\ ;\ b) \Rightarrow \exists\, c \in (a\ ;\ b)$:

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Ngoài ra, nếu $g'(x) \ne 0$, $\forall\, x \in (a\ ;\ b)$ thì có

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ví dụ 11. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $x \in [1\ ;\ 2]$

Ví dụ 12. $f(x) = |x|(x+1)$, $g(x) = x$, $x \in [-2\ ;\ 1]$

Ví dụ 13. a) CMR $\forall\, x > 0$ có $3\arctan x + \arctan(x+2) < 4\arctan(x+1)$.

b) CMR $\forall\, x > 0$ có $2\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(x+2) > 3\operatorname{arccot}(x+1)$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH I
BÀI 5

§10. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG (TIẾP THEO)

Đặt vấn đề

1° "Cấu trục thế giới hoàn hảo nhất, được sáng tạo bởi người thông minh nhất. Không có gì xảy ra trên thế giới mà không có sự tham gia của lí thuyết cực đại, cực tiểu" – Euler

2° Tia sáng qua gương: Heron, cực tiểu đường đi, thế kỉ 1 trước công nguyên

3° Tia sáng qua nước, Fermat 1657, $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta} = const$, cực tiểu thời gian

2. Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Định lí. $f(x)$ có $f^{(k)}(x)$ ($k = 1, 2, ..., n$) liên tục tại x_0 và có $f^{(n+1)}(x)$ trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

c ở giữa x_0 và $x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 \le \theta \le 1$.

Khi $x_0 = 0$ ta có công thức Maclaurin.

Ví dụ 1. Viết công thức Taylor $f(x) = x^4$ tại $x_0 = 1$.

Ví dụ 2. Viết công thức Maclaurin $f(x) = xe^x$ đến x^2.

Công thức Maclaurin của một số hàm

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, c giữa 0 và x;

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dfrac{\sin\left(c + (2n+2)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$,
c giữa 0 và x;

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{\cos\left(c + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$;
c giữa 0 và x;

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$,

ở đó $R_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$, c giữa 0 và x;

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$,
c giữa 0 và x.

Ví dụ 3. Tính gần đúng sin40° với sai số δ < 0,0001.

- $\sin 40° = \sin\frac{2\pi}{9}$

- $\dfrac{\left(\frac{2\pi}{9}\right)^7}{7!} < \dfrac{0,7^7}{7!} < 0,0000163$

- $\sin 40° \approx \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{2\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{2\pi}{9}\right)^5 \approx 0,6428$.

Ví dụ 4. Tính gần đúng e với sai số $\delta < 0,00001$.

Ví dụ 5 . a) Tìm a để $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + ax^4 - \sin^2 x}{x^2 \ln(1+x^2)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

khả vi tại $x = 0$. $\left(a = -\frac{1}{3}\right)$

b) Tìm a để $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + ax^4 - \ln(1+x^2)}{x^3(e^{2x} - 1)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

khả vi tại $x = 0$. $\left(a = -\frac{1}{2}\right)$

3. Quy tắc L'Hospital, ứng dụng khai triển hữu hạn

a) Quy tắc L'Hospital

Định lí L'Hospital 1. $f(x)$, $g(x)$ khả vi $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g'(x) \neq 0$ trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A$

Định lí L'Hospital 2. $f(x)$, $g(x)$ khả vi $U_{\varepsilon_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A$

• **Chú ý.** – Quy tắc L'Hospital vẫn đúng khi thay $x_0 = \infty$

– Có thể áp dụng nhiều lần quy tắc L'Hospital

– Quy tắc L'Hospital chỉ là điều kiện đủ mà không là điều kiện cần

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x + \cos x}{3x}$

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

Ví dụ 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{2009}}$

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x$, $\alpha > 0$

Ví dụ 5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

Ví dụ 6. $\lim\limits_{x\to 0^+}(|\ln x|)^{2x}$

Ví dụ 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

Ví dụ 8. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x-1}$

Ví dụ 9 . $\lim\limits_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\sin x}$ **(1)**

Ví dụ 10 . a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cot x}$ **(1)**

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x}$ **(1)**

c) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$ **(1)**

Ví dụ 11 . $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$ **(** $e^{-\frac{2}{\pi}}$ **)**

Ví dụ 12 .

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos^2 x)^{\tan^2 x}$ **(** $\sqrt{e}$ **)**

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\sin^2 x)^{\cot^2 x}$ **(** $e^{-\frac{3}{2}}$ **)**

Ví dụ 13 .

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin x-\sin\sqrt{1+x^2}\right)$ **(0)**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x-1}-\cos\sqrt{x+1}\right)$ **(0)**

Ví dụ 14 .

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$ **(** $-\dfrac{1}{12}$ **)**

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$ **(** $e^{-\frac{1}{2}}$ **)**

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1-2t)dt}{x\sin^3 x}$ **(–1)**

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\dfrac{1}{2-x}\right]$ **(** $\dfrac{1}{2}$ **)**

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\ln(2-x)}+\dfrac{1}{x-1}\right]$ **(** $\dfrac{1}{2}$ **)**

Ví dụ 15 . a) CMR: Bất phương trình $x<\int_1^x\ln\left(3-\dfrac{1}{t}\right)dt$ có nghiệm $x>1$.

b) CMR: Bất phương trình $x<\int_2^x\ln\left(3-\dfrac{2}{t}\right)dt$ có nghiệm $x>2$.

4. Hàm số đơn điệu

Định nghĩa.

$f(x)$ tăng (đồng biến) trên $[a\,;b]\Leftrightarrow\forall\, x_1, x_2\in[a\,;b],\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

$f(x)$ giảm (nghịch biến) trên $[a\,;b]\Leftrightarrow\forall\, x_1, x_2\in[a\,;b],\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Định nghĩa. Hàm số $f(x)$ đơn điệu trong $[a\,;\,b]\Leftrightarrow$ trên đoạn này hàm số chỉ tăng (giảm, không tăng, không giảm)

Định lí 1. $f(x)$ liên tục trong $[a\,;b]$, khả vi trong $(a\,;b)$

Nếu $f(x)$ tăng (giảm) trong $[a ; b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$)

Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) trong $(a ; b)$, có ít nhất một điểm x để $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\Rightarrow$ $f(b) > f(a)$ ($f(b) < f(a)$)

Hệ quả. 1) $f(a) \leq g(a)$, $f'(x) \leq g'(x)$, $x \in (a ; b) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$, $x \in [a ; b]$

2) $f(a) < g(a)$, $f'(x) < g'(x)$, $x \in (a ; b) \Rightarrow f(x) < g(x)$, $x \in [a ; b]$

Ví dụ 1 . a) $x \geq y > 0$. CMR $\operatorname{arccot} x^4 - \operatorname{arccot} y^4 \geq \ln\dfrac{y^2}{x^2}$

b) $x \geq y > 0$. CMR $\arctan x^4 - \arctan y^4 \leq \ln\dfrac{x^2}{y^2}$

Ví dụ 2 . a) CMR: $\forall x > 0$ có $3\arctan x + \arctan(x + 2) < 4\arctan(x + 1)$

b) CMR: $\forall x > 0$ có $2\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(x + 2) > 3\operatorname{arccot}(x + 1)$

5. Bất đẳng thức hàm lồi

Định nghĩa. $f(x)$ xác định trên $[a ; b]$, $f(x)$ lồi trong $[a ; b] \Leftrightarrow \forall\, t \in [0 ; 1]$ ta có

$$tf(a) + (1 - t)f(b) \geq f(ta + (1 - t)b)$$

Nếu dấu "$\leq$" thì ta có $f(x)$ lõm trong $[a ; b]$

Định lí. Nếu $f''(x) > 0$ trong khoảng $I \Rightarrow f(x)$ lồi trong $[a ; b]$, $\forall a, b \in I$, $a < b$.

Nếu $f''(x) < 0$ trong khoảng $I \Rightarrow f(x)$ lõm trong $[a ; b]$, $\forall a, b \in I$, $a < b$.

Ví dụ 1 . a) CMR: $\forall x$ có $3\arctan x + \arctan(x + 2) < 4\arctan(x + 1)$

b) CMR: $\forall x$ có $2\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(x + 2) > 3\operatorname{arccot}(x + 1)$

6. Cực trị

Định nghĩa. $f(x)$ xác định trong $(a ; b)$, đạt cực đại tại $x_0 \in (a ; b) \Leftrightarrow \exists U_{\varepsilon_0}(x_0)$ để có $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$

tương tự thì $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0

Định lí. $f(x)$ liên tục trong $[a ; b]$, khả vi trong $(a ; b)$ (có thể trừ ra hữu hạn điểm). Khi x biến thiên qua c, $f'(x)$ đổi dấu từ + sang – thì $f(x)$ đạt cực đại tại $x = c$.

Tương tự khi $f'(x)$ đổi dấu ngược lại thì ta có $f(x)$ đạt giá trị cực tiểu tại $x = c$.

Nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x biến thiên qua c thì không có cực trị tại $x = c$.

Ví dụ 1. $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$

Định lí 2. $f^{(n)}(x)$ liên tục trên $U_{\varepsilon_0}(c)$ và có $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$, $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Nếu n chẵn, đạt cực tiểu tại $x = c$ nếu $f^{(n)}(c) > 0$

đạt cực đại tại $x = c$ nếu $f^{(n)}(c) < 0$

Nếu n lẻ thì không đạt cực trị tại $x = c$.

Ví dụ 2. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 450m^2 được rào lại để thỏ không vào phá vườn. Biết cạnh của mảnh vườn là một bức tường. Hỏi kích thước chiều dài cần rào ngắn nhất là bao nhiêu?

Ví dụ 3. Một kg khoai tây cửa hàng nhập vào có giá 70 cent, người bán hàng có thể bán được 500kg khoai tây với giá 1,5đôla/1kg. Biết rằng với mỗi cent mà người bán hàng hạ giá thì số lượng bán được sẽ tăng gấp 25 lần. Hỏi người bán hàng cần đưa ra giá khuyến mãi là bao nhiêu để thu được nhiều lợi nhuận nhất.

Ví dụ 4. Một tia sáng đi từ *A* đến mặt gương phẳng và đến *B* theo luật phản xạ. CMR: đó là đường đi ngắn nhất từ *A* đến *B* qua gương. Có kết luận gì khi thay mặt gương bằng mặt nước và điểm *B* nằm ở dưới nước?

Ví dụ 5. Tìm cực trị:

a) $y = \left(x\sqrt[3]{4+x}\right)^2$ ($y_{min}(-4) = y_{min}(0) = 0$; $y_{max}(-3) = 9$)

b) $y = \left(x\sqrt[3]{8+x}\right)^2$ ($y_{min}(0) = y_{min}(8) = 0$; $y_{max}(6) = 36\sqrt[3]{4}$)

c) $y = x\sqrt[3]{(1-x)^2}$ ($y_{min}(1) = 0$; $y_{max}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$)

d) $y = (1-x)\sqrt[3]{x^2}$ ($y_{min}(0) = 0$; $y_{max}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$)

Ví dụ 6 . a) Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất $y = \pi - 3x^2 - 6\operatorname{arccot} x^2$, $-1 \le x \le \sqrt[4]{3}$

(max $f = -3 - \frac{\pi}{2}$; min $f = -2\pi$)

b) Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất $y = 2\pi + 3x^2 - 6\operatorname{arccot} x^2$, $-\sqrt[4]{3} \le x \le 1$

(max $f = 2\pi$, min $f = 3 + \frac{\pi}{2}$)

c) Chứng minh rằng $2x^2 \arctan x^2 \ge \ln\left(1 + x^4\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

c) Chứng minh rằng $2x^3 \arctan x^3 \ge \ln\left(1 + x^6\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH I

BÀI 6

§11. CÁC LƯỢC ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

• Đặt vấn đề

I. Hàm số $y = f(x)$

1) Điểm uốn

Định nghĩa. Điểm $I(c\,;\,f(c))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$ $\Leftrightarrow$ là điểm phân chia phần lồi, lõm của đồ thị hàm số

Cách tìm. Tìm $(c\,;\,f(c))$ sao cho $f''(x)$ đổi dấu khi x biến thiên qua $x = c$.

2) Tiệm cận

Định nghĩa. • $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y = f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

• $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị $y = f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \rho(f(x), ax + b) = 0$.

Khi đó ta có $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - ax\right)$

Khi $a = 0$ ta có tiệm cận ngang

Ví dụ 1. Tìm các tiệm cận

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$, b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$, c) $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$,

d) $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$ e) $y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}, & |x| > 1 \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}$

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số

a) $y = \dfrac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ($x = \pm 2$, $y = 3x$ phải ; $y = -3x$ trái)

b) $y = \dfrac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ($x = \pm 1$, $y = 2x$ phải ; $y = -2x$ trái)

c) $y = \dfrac{x^2 \operatorname{arccot} x}{x + 1}$ ($x = -1$, $y = 1$, $y = \pi x + 1 - \pi$)

d) $y = \dfrac{x^2 \operatorname{arccot} x}{1 - x}$ ($x = 1$, $y = -1$, $y = -\pi x - 1 - \pi$)

3. Lược đồ khảo sát đồ thị.

a) Tập xác định

b) Chiều biến thiên: tăng giảm, cực trị, lồi lõm, tiệm cận, bảng biến thiên

c) Đồ thị

Ví dụ 3. $y = \dfrac{4x^3 + 1}{x^4}$

Ví dụ 4. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

Ví dụ 5. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

Ví dụ 6. $y = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$

II. Đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha ; \beta]$

Tương tự như $y = f(x)$, chỉ khác là khảo sát gián tiếp y theo x qua biến trung gian t, và chú ý

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad ; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)\,x'(t) - y'(t)\,x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3}$$

Ví dụ 1. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

Ví dụ 2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$

Ví dụ 3. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$

Ví dụ 4. a) Cho $y = f(x)$, ở đó $\begin{cases} x = 3t + 2t^3 \\ y = te^{t^2} \end{cases}$, tính $f'(x)$, $f''(x)$

$$\left(f' = \frac{e^{t^2}}{3},\ f'' = \frac{2 + e^{t^2}}{9\left(1 + 2t^2\right)}\right)$$

b) Cho $y = f(x)$, ở đó $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = 2t - e^{2t} \end{cases}$, tính $f'(x)$, $f''(x)$

$$\left(f' = 2\left(1 - e^t\right),\ f'' = \frac{-2e^t}{1 + e^t}\right)$$

c Cho $y = f(x)$, ở đó $\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = 3t^4 + 2t^2 \end{cases}$, tính $f'(x)$, $f''(x)$

$$\left(f' = 4t,\ f'' = \frac{4}{3t^2 + 1}\right)$$

d Cho $y = f(x)$, ở đó $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t^5 - 5t \end{cases}$, tính $f'(x)$, $f''(x)$

$$\left(f' = \frac{5\left(t^2 - 1\right)}{3},\ f'' = \frac{10t}{9\left(t^2 + 1\right)}\right)$$

Ví dụ 5 . Tìm các tiệm cận

a) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^3 - 1} \\ y = \dfrac{-2t^2}{t^3 - 1} \end{cases}$ $\left(y = -2x - \dfrac{2}{3}\right)$ b) $\begin{cases} x = \dfrac{-t}{t^3 + 1} \\ y = \dfrac{3t^2}{t^3 + 1} \end{cases}$ $(y = 3x - 1)$

III. Đường cong cho trong hệ toạ độ cực

1) Hệ toạ độ cực. Hệ gồm điểm O, trục Ox gọi là hệ toạ độ cực

$M(r\,;\,\varphi)$, $r = |\overrightarrow{OM}|$, $0 \le r < \infty$, $\varphi = \left(Ox\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

Ví dụ 1.

a) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ b) $r = \cos\varphi$ c) $r = \sin\varphi$ d) $r = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ e) $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$

Liên hệ với hệ toạ độ Descartes:

$(r\,;\,\varphi) \to (x\,;\,y)$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$(x\,;\,y) \to (r\,;\,\varphi)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$, lấy φ: $\sin\varphi$ cùng dấu với y.

Chú ý. Trong hệ toạ độ cực suy rộng ta có $-\infty < r < \infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$, khi $r_1 < 0$ thì định nghĩa $(r_1\,;\,\varphi) = (-r_1\,;\,\varphi + \pi)$

2. Lược đồ khảo sát đường cong $r = f(\varphi)$

a) Tìm tập xác định

b) Chiều biến thiên: Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn, chiều biến thiên, cực trị, bảng biến thiên, $\tan V = \dfrac{r}{r'}$, ở đó V là góc dương giữa $\overrightarrow{OM}$ và vectơ chỉ phương của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm M.

c) Đồ thị

Ví dụ 1. $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$

Ví dụ 2. $r = a\sin3\varphi$, $a > 0$

Ví dụ 3. $r = a\sin2\varphi$, $a > 0$

Ví dụ 4. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

Ví dụ 5. $r = a(1 + 2\cos\varphi)$, $a > 0$

Ví dụ 6. $r = a\sin n\varphi$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$

Ví dụ 7. $r = a\cos n\varphi$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH I
BÀI 7
CHƯƠNG II. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN
§1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

• Đặt vấn đề

I. Định nghĩa.

1. Định nghĩa.

$f(x)$ trên $(a\,;\,b)$, $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in (a\,;\,b)$

Ví dụ

a) $f(x) = 2010$ **b)** $f(x) = 0$ **c)** $f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \sin x$ **e)** $f(x) = \ln x$ **f)** $y = x^2 e^x$

g) $f(x) = x^2 \ln x$ **h)** $f(x) = x\cos x$ **i)** $f(x) = x^3 \sin x$

Định lí. $F'(x) = f(x)$, $x \in (a\,;\,b)$, khi đó tập tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) + C$

Định nghĩa. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

2. Tính chất

a) $f(x)$ liên tục trên $(a\,;\,b) \Rightarrow \exists \int f(x)\,dx$

b) Tuyến tính. $\exists \int f(x)\,dx,\ \exists \int g(x)\,dx$

$\Rightarrow \int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Toán tử $\int$ *có khả nghịch trái, không có khả nghịch phải*

c) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ **d)** $\int \left(\dfrac{d}{dx} f(x)\right) dx = f(x) + C$

3. Bảng một số tích phân thông dụng

$$\int x^{\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

II. Các phương pháp tính

1. Đổi biến số

Mệnh đề 1. Nếu $\int g(t)\,dt = G(t) + C \Rightarrow \int g(w(x))\,w'(x)\,dx = G(w(x)) + C$

Mệnh đề 2. Nếu $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(x) + C \Rightarrow \int g(t)\,dt = G(\varphi^{-1}(t)) + C$, ở đó $t = \varphi(x)$ có hàm ngược là $x = \varphi^{-1}(t)$

Ví dụ 1

a) $\int x(x+4)^{12}\,dx$ b) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

d) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ e) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$ f) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

g) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ h) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$ i) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

k) $\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}dx$ $\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}+C\right)$

m) $\int \frac{\cot x}{1+\sin^2 x}dx$ $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}+C\right)$

2. Tích phân từng phần. Các hàm *u, v* khả vi, có $\int udv = uv - \int vdu$

Ví dụ 2

a) $\int \ln^2 xdx$ b) $\int (5x+6)\cos 3xdx$ c) $\int \sin(\ln x)\,dx$

d) $\int (\arcsin x)^2\,dx$ e) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$ f) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

g) $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$ h) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$ i) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

k) $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Ví dụ 3.

a) $\int \frac{xdx}{e^x(x-1)^2}$ $\left(-\frac{e^{-x}}{x-1}+C\right)$ b) $\int \frac{(1+x)\,dx}{x^2e^x}$ $\left(-\frac{e^{-x}}{x}+C\right)$

c) $\int \operatorname{arccot}\sqrt{2x-1}\,dx$ $\left(\frac{1}{2}\left[2x\operatorname{arccot}\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-1}\right]+C\right)$

d) $\int \arctan\sqrt{2x+1}\,dx$ $\left(\frac{1}{2}\left[2(x+1)\arctan\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+1}\right]+C\right)$

3. Sử dụng các lớp hàm có tính chất đặc biệt

Ví dụ

a) $\int x^8e^xdx$ b) $\int x^9\cos xdx$ c) $\int x^{10}\sin xdx$

d) $\int x^ne^xdx$ e) $\int x^n\cos xdx$ f) $\int x^n\sin xdx$

4. Tích phân của một vài lớp hàm khác

a) Hàm hữu tỉ $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ là các đa thức bậc m, n của x.

Định lí. Nếu $Q_n(x) = a_n(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x^2+px+q)^{\mu} \ldots (x^2+lx+s)^{\gamma}$, ở đó $\alpha, \beta, \ldots, \mu \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{R}$, $p^2-4q<0$, $l^2-4s<0$, $\alpha+\beta+\ldots+2(\mu+\ldots+\gamma)=n$. Khi đó

$$R(x) = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}$$

$$+ \ldots + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\gamma}} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{P_{\gamma-1}x+Q_{\gamma-1}}{x^2+lx+s},$$

các hệ số nêu trên được tính theo phương pháp hệ số bất định.

Từ đó, để tính $\int R(x)\,dx$ ta sẽ dẫn đến tính các tích phân sau

1°) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx$; **2°)** $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$; **3°)** $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx$;

ở đó $p^2-4q<0$.

Ví dụ.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^5}$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+3x+4}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+3)(x-1)^3}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x^6}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$

GIẢI TÍCH I

BÀI 8

§1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH (TIẾP THEO)

4. Tích phân của một vài lớp hàm

b) Hàm lượng giác. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, ở đó $R(\sin x, \cos x)$ là hàm hữu tỉ đối với các biến

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}, -\pi < x < \pi \Rightarrow \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$

Chú ý. +) $R(\sin x, \cos x)$ chẵn với $\sin x$ và $\cos x$ thì đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$

+) $R(\sin x, \cos x)$ lẻ với $\sin x$ thì đặt $t = \cos x$

+) $R(\sin x, \cos x)$ lẻ với $\cos x$ thì đặt $t = \sin x$

Ví dụ 1.

a) $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$ **b)** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$

c) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3}$ **d)** $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

e) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$ **f)** $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1}dx$

g) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$ **h)** $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

i) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}$ **k)** $\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx$

l) $\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}dx$ $\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x} + C\right)$

m) $\int \frac{\cot x}{1+\sin^2 x}dx$ $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} + C\right)$

c) Tích phân các hàm số vô tỉ $\int R\left(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C}\right)dx$

1°) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, đặt $x = a\sin t$ hoặc $x = a\cos t$ đưa về tích phân hàm lượng giác (4b).

2°) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, đặt $x = a\tan t$ hoặc $x = a\cot t \Rightarrow$ (4b)

3°) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, đặt $x = \frac{a}{\cos t}$ hoặc $x = \frac{a}{\sin t} \Rightarrow$ (4b).

Ví dụ 2.

a) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **b)** $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ **c)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx, \quad a > 0$ **e)** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx$ **f)** $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2}$

g) $\displaystyle\int x\sqrt{-x^2 + 3x - 2}\, dx$ **h)** $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx$ **i)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$

l) $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx$ $\left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 3\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right| + C\right)$

m) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}} dx$ $\left(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 5}\right| + C\right)$

Ví dụ 3. Dùng phép thế Euler để tính

- $A > 0$, đặt $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = t \pm \sqrt{A}x$
- $C > 0$, đặt $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = xt \pm \sqrt{C}$
- Nếu $Ax^2 + Bx + C = A(x - \lambda)(x - \mu)$, đặt $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = t(x - \lambda)$ hoặc $t(x - \mu)$ sẽ đưa về tích phân hàm hữu tỉ.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}$ **d)** $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}} dx$

Chú ý. Có những hàm không có nguyên hàm sơ cấp:

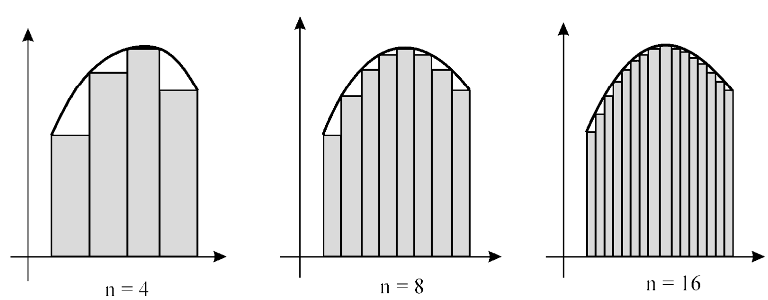
$e^{\pm x^2}$, $\cos x^2$, $\sin x^2$, $\dfrac{e^x}{x}$, $\dfrac{\cos x}{x}$, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{1}{\ln x}$, $\sqrt{1 - x^3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^3}}$ (Chứng minh bởi Liouville (Pháp) vào thế kỉ 19).

§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Đặt vấn đề

I. Định nghĩa.

1) Ý nghĩa hình học:



+) Bài toán diện tích hình thang cong: $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a\ ;\ b]$, khi đó diện tích của hình thang cong $0 \le y \le f(x)$, $a \le x \le b$

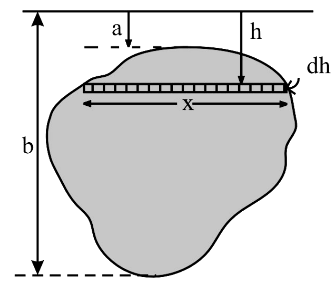
là $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\Delta x_i|$

2) Ý nghĩa cơ học $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x) > 0$

– Là khối lượng của đoạn [a ; b] với mật độ khối lượng là $f(x)$

– là công của lực có độ lớn $f(x) > 0$ tác động vào vật chuyển động thẳng từ $x = a$ đến $x = b$.

3) Tính áp lực lên mặt đĩa. Tính áp lực lên một mặt đĩa phẳng chìm trong nước trong hình



$F = \int_a^b whxdh$, ở đó w là trọng lượng riêng của nước $= \frac{1}{32}$ tấn/(ft)^3

4) Định nghĩa. $f(x)$ xác định trên [a ; b]

+) Chia [a ; b] bởi các điểm chia $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \equiv b$

+) Lấy $\xi_i \in [x_{i-1} ; x_i]$

+) Lập tổng $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, đặt $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} |\Delta x_i|$

Nếu $\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sigma = I$ không phụ thuộc vào cách chia [a ; b] và cách chọn điểm ξ_i thì I là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên [a ; b] và kí hiệu là $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ví dụ 1. a) Tính $\int_{20}^{30} 0\,dx$ **b)** Tính $\int_{11}^{2} 2010\,dx$ **c)** $\int_0^1 y(x)\,dx$, $y(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in I \end{cases}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\cos\frac{k\pi}{2n}$ $\left(\frac{2\pi - 4}{\pi^2}\right)$ **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{k\pi}{2n}$ $\left(\frac{4}{\pi^2}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **g)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3n^2 + k^2}$ $\left(\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$

h) Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \ln 2$ **k)** Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n-k} > \ln 2$

Định nghĩa. • Khi $b < a$ có $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

• Khi $a = b$ có $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

II. Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

1) Tiêu chuẩn khả tích

Định lí 1. $f(x)$ khả tích trên $[a\,;\,b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$,

$$S = \sum_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i\,,\ s = \sum_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i\,,\ M_i = \max_{\Delta x_i} f(x),\ m_i = \min_{\Delta x_i} f(x)$$

Định lí 2. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b] \Rightarrow f(x)$ khả tích trên $[a\,;\,b]$

Định lí 3. $f(x)$ bị chặn trên $[a\,;\,b]$ và có hữu hạn điểm gián đoạn trong $[a\,;\,b] \Rightarrow f(x)$ khả tích trên $[a\,;\,b]$

Định lí 4. $f(x)$ bị chặn và đơn điệu trong $[a\,;\,b] \Rightarrow f(x)$ khả tích trong $[a\,;\,b]$

Ví dụ 2. Tính

a) $\int\limits_0^2 x\,dx$ **b)** $\int\limits_0^1 x^2 dx$ **c)** $\int\limits_1^2 e^x dx$

d) $\int\limits_1^5 x^3 dx$ **e)** $\int\limits_0^1 a^x dx,\quad a > 0$ **f)** $\int\limits_a^b x^\alpha dx,\quad a > 0$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH I
BÀI 9

§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (TIẾP THEO)

2. Các tính chất của tích phân xác định

a) Tuyến tính. $\exists \int_a^b f(x)\,dx$, $\exists \int_a^b g(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Cộng tính. $f(x)$ khả tích trên khoảng có độ dài lớn nhất từ $[a ; b]$, $[a ; c]$, $[c ; b]$

$\Rightarrow$ $f(x)$ khả tích trên các khoảng còn lại và có $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

c) Bảo toàn thứ tự

+) $f(x)$ khả tích và không âm trên $[a ; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

+) $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a ; b]$ và $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

+) $f(x)$ khả tích trên $[a ; b] \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

+) Nếu $m \le f(x) \le M$ trên $[a ; b] \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

d) Các định lí trung bình.

- Định lí trung bình thứ nhất. $f(x)$ khả tích trên $[a ; b]$, $m \le f(x) \le M \Rightarrow \exists \mu \in [m ; M]$ để có $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$.

Nếu thêm $f(x)$ liên tục trên $[a ; b]$ thì $\exists\, c \in [a ; b]$: $\int_a^b f(x)\,g(x)dx = f(c)(b-a)$

- Định lí trung bình thứ hai. $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a ; b]$, $m \le f(x) \le M$ và có $g(x)$ không đổi dấu trên $[a ; b] \Rightarrow \exists\, \mu \in [m ; M]$: $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$

Nếu thêm $f(x)$ liên tục trên $[a ; b]$ thì $\exists\, c \in [a ; b]$: $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx$

e) Tính chất

1°/ Tích phân các hàm chẵn, lẻ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm chẵn} \\ 0, & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm lẻ} \end{cases}$$

2°/ $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ chẵn} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ lẻ} \end{cases}$$ **(Warllis)**

III. Công thức đạo hàm theo cận , công thức Newton – Leibnitz

Định lí. $f(x)$ khả tích trên $[a\,;\,b] \Rightarrow I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ liên tục trên $[a\,;\,b]$.

Nếu thêm $f(t)$ liên tục tại $t = x \in [a\,;\,b] \Rightarrow I'(x) = f(x)$.

Ví dụ 1.

a) $\dfrac{d}{dx}\int_1^x e^{-t^2}dt$ **b)** $\dfrac{d}{dx}\int_x^1 \sqrt{1+t^3}\,dt$ **c)** $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \sin t^2\,dt$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^4 x\int_0^x t^2\sin t\,dt\right)$ $(\frac{1}{4})$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\tan^3 x\int_x^{\pi/2}(\pi-2t)\cos t\,dt\right)$ **(0)**

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1-2t)\,dt}{x\sin^3 x}$ **(–1)** **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^3}\tan t\,dt}{x^2\ln(1+x^4)}$ $(\frac{1}{2})$

h) Tìm a để tích phân đạt giá trị nhỏ nhất $\int_0^a e^x\arctan(1+x)\,dx$ $(a = -1)$

i) Tìm a để tích phân đạt giá trị nhỏ nhất $\int_0^a e^{-x}\arctan(1-x)\,dx$ $(a = 1)$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sin^2 2t\,dt}{\int_0^x \ln(1+2t^3)\,dt}$ **(2)** **l)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t^2\sin^3 3t\,dt}{\int_0^x \ln(1-3t^4)\,dt}$ **(0)**

Công thức Newton – Leibnitz: $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$ và có nguyên hàm là $F(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ví dụ 2.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$

a) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$;

b) $\int_0^1 x^3 e^x dx$

c) $\int_0^3 |2-x|\, dx$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, $p > 0$

f) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin \frac{k\pi}{2n}$ $\quad (\frac{4}{\pi^2})$

g) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \cos \frac{k\pi}{2n}$ $\quad (\frac{2\pi-4}{\pi^2})$

Ví dụ 3. Cửa thẳng đứng của một con đập có dạng hình vuông với cạnh bằng 4ft ngập trong nước và cách mặt nước 2ft. Hãy tính áp lực của nước tác động lên cửa đập.

Ví dụ 4. Một thùng hình trụ có bán kính *r*, chiều cao *h*, chứa nước có chiều cao D. Tính công sản ra khi bơm nước qua đáy trên thùng.

Ví dụ 5. Trong buồng đốt của một xi lanh hình trụ chứa một lượng khí nhất định với áp suất ban đầu là p = 101325N/m^2 và thể tích ban đầu là V_1 = 0,4m^3. Tính công sản ra khi pittông chuyển động đến vị trí sao cho buồng đốt có thể tích V_2 = 0,8m^3 (coi nhiệt độ không khí không thay đổi)

IV. Các phương pháp tính

a) Đổi biến số. Xét $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$.

Định lí 1. Xét $x = \varphi(t)$ thoả mãn:

+) $\varphi'(t)$ liên tục trên $[\alpha\,;\beta]$

+) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

+) Khi t biến thiên trong $[\alpha\,;\beta]$ thì $\varphi(t)$ biến thiên trong $[a\,;b]$.

Khi đó ta có $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Định lí 2. Xét $t = \varphi(x)$ thoả mãn:

+) $\varphi(x)$ biến thiên đơn điệu trên $[a\,;b]$ và có đạo hàm liên tục.

+) $f(x)dx$ trở thành $g(t)dt$, ở đó $g(t)$ liên tục trong $[\varphi(a)\,;\varphi(b)]$.

Khi đó ta có $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt$

Ví dụ 1.

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}dx$

b) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

c) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{-e^x+6}dx$

h) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ $\quad (\frac{\pi^2}{4})$

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x(\sin x + \cos x)}{1+|\sin 2x|}dx$ $\quad$ (1)

k) $\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x^2(3x+1)^2}$ $\quad (2 + 6\ln\frac{3}{4})$

d) $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}\,dx$

l) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$ $(2+\ln 3)$

e) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx,\quad n\in\mathbb{N}$

m) $\displaystyle\int_1^5 \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$ $(2-\ln 3)$

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{x^2}\arctan x}{1+x^6+\sin x^2}\,dx$

n) $\displaystyle\int_1^2 \frac{xdx}{(x^2-2x+2)^2}$ $(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2})$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\cos^3 x}{1+\sin^3 x}\right)dx$ (0)

o) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$ $(-\frac{\pi}{8})$

b) Tích phân từng phần

Cho các hàm u, v khả vi liên tục trên $[a\,;\,b]$, khi đó ta có $\displaystyle\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du$

Ví dụ 2.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\arctan x\,dx$

b) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\sin 3x\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{2x}dx$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}+\cos x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_1^2 \arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,dx$ $(\frac{\pi}{2}-1)$

h) $\displaystyle\int_1^2 \arccos\sqrt{\frac{2x-1}{2x}}\,dx$ $(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1))$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|(1-2\arctan x)^2\,dx$ $(1+\frac{\pi^2}{2}-2\pi+4\ln 2)$

k) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|(1+\arctan x)^3\,dx$ $(1+3\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}+\ln 2\right))$

l) $\displaystyle\int_0^1 (\arccos x)^2\,dx$ $(\pi-2)$

m) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin^2 x\,dx$ $(\frac{\pi^2}{4}-2)$

n) $\displaystyle\int_0^1 \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$ (1)

o) $\displaystyle\int_1^2 \arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x}}dx$ $(\frac{\pi}{2}-1)$

p) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin^2 x\,dx$ (π)

q) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4-5x)\sin^2 x\,dx$ (2π)

§3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Đặt vấn đề

I. Tích phân suy rộng với cận vô tận

1. Định nghĩa $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x)\,dx$

Ta nói tích phân suy rộng hội tụ nếu vế phải tồn tại (hữu hạn) và phân kì trong trường hợp ngược lại.

Tương tự ta định nghĩa $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty}\int_B^{a} f(x)\,dx$

Ta định nghĩa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$

Tích phân trên hội tụ $\Leftrightarrow$ cả hai tích phân vế phải hội tụ.

Ví dụ 1. Tính

a) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ **b)** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+4x^2}$ **c)** $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$

d) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}},\quad \alpha\in\mathbb{R}$ **e)** $\int_0^{\infty}x^3e^{-x^2}dx$ **f)** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

g) $\int_0^{\infty}\frac{2x+1}{e^{2x}}dx$ **(1)** **h)** $\int_1^{\infty}e^{-\sqrt{x-1}}dx$ **(2)**

i) $\int_{-\infty}^{0}x2^{2x-1}dx$ $\left(\frac{-1}{8\ln^2 2}\right)$ **k)** $\int_{-\infty}^{0}x3^{2x+1}dx$ $\left(\frac{-3}{4\ln^2 3}\right)$

l) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(2+x^2)}$ $\left(\frac{1}{4}\ln 3\right)$ **m)** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$ $\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$

2. Các dấu hiệu hội tụ

a) Khi $f(x)\ge 0$ và khả tích trên $[a\,;A]$, $\forall\, A > a$.

Định lí 1. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ $\Leftrightarrow \int_a^{A} f(x)\,dx \le L,\ \forall\, A$.

Định lí 2. f, g khả tích trên $[a\,;A]$, $\forall\, A > a$; $0\le f(x)\le g(x)$, $\forall\, x\ge a$.

Nếu $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

Nếu $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ phân kì $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x)\,dx$ phân kì

Have a good understanding!

GIẢI TÍCH I
BÀI 10

§3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG (TT)

2. Các dấu hiệu hội tụ

Hệ quả. Nếu có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in (0\ ;\ +\infty) \Rightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx,\ \int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nếu có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

Nếu có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ phân kì $\Rightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ phân kì

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ, phân kì

a) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1+x^3}{x^4+1}dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{10}\,dx}{(x^4+x^3+x^2+1)^3}$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$ **e)** $\displaystyle\int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x\ln(\ln x)}$ **f)** $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$

g) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln^{\alpha}(3+2x)}{2+x}dx$ (HT với α < –1, PK với α ≥ 1)

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x.2^{2x-1}dx$ **(HT)** **i)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x.3^{2x+1}dx$ **(HT)**

b) *f(x)* có dấu tuỳ ý. Nếu $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ. Khi đó ta bảo $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ tuyệt đối

Còn nếu $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ mà $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ phân kì thì ta bảo $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ bán hội tụ.

Tiêu chuẩn Dirichlet. Nếu $F(x) = \int\limits_a^{x}\varphi(t)dt$ bị chặn khi x → +∞ thì $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}dx$ hội tụ ∀ $\alpha > 0$ ($a > 0$).

Ví dụ 3. Xét hội tụ, phân kì

a) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{2+x^1}}$ **c)** $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{(\sqrt{x}-1)\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}+1}$

d) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$ **e)** $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^k\ln x}$ **f)** $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}x^k dx$

g) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{b^2+x^2}dx,\quad a, b > 0$ **h)** $\int\limits_1^{\infty} e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^{\lambda}}dx,\ \lambda > 0$

II. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

1) Định nghĩa. $f(x)$ bị chặn và khả tích trên $[a\ ;\ b-\eta]$, $\forall\ \eta \in (0\ ;\ b-a)$, $f(b-0)$ không giới nội (khi đó b được gọi là điểm bất thường), khi đó

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0^+}\int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx.$$

Ta bảo tích phân suy rộng hội tụ nếu vế phải tồn tại (hữu hạn) và phân kì trong trường hợp còn lại.

Tương tự nếu $f(x)$ khả tích trên $[a+\eta\ ;\ b]$, $\forall \eta \in (0\ ;\ b-a)$, và $f(a+0)$ không bị chặn (khi đó a là điểm bất thường), khi đó $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\eta\to 0^+}\int\limits_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx$

Tích phân suy rộng hội tụ $\Leftrightarrow$ vế phải tồn tại (hữu hạn)

- Nếu $f(x)$ không bị chặn tại $x = c \in (a\ ;\ b)$, khi đó ta có $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Tích phân suy rộng ở vế trái hội tụ $\Leftrightarrow$ cả hai tích phân suy rộng ở vế phải hội tụ

Ví dụ 1. Tính hoặc xét sự phân kì

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\alpha}}$ **(HT với $\alpha < 1$, PK với $\alpha \ge 1$)** **b)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ **d)** $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$ **e)** $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$

f) $\int\limits_3^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$ **g)** $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ **h)** $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$

i) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$ **k)** $\int\limits_0^1 (\ln x)^n\,dx,\quad n \in \mathbb{N}$ **l)** $\int\limits_{-1}^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2. Các dấu hiệu hội tụ

a) $f(x) \ge 0$

Định lí. $f(x)$ có b là điểm bất thường, có $f(x) \le g(x)$, $\forall\ x \in (a\ ;\ b-\varepsilon)$. Khi đó

Nếu $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx$ hội tụ

Nếu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ phân kì $\Rightarrow \int\limits_a^b g(x)\,dx$ phân kì.

Hệ quả. $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0\ ;\ +\infty) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx$ và $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nếu $k = 0$, từ $\int_a^b g(x)\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ

Nếu $k = +\infty$, từ $\int_a^b g(x)\,dx$ phân kì $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ phân kì.

b) *f*(*x*) có dấu thay đổi.

Nếu $\int_a^b |f(x)|\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ, khi đó $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ tuyệt đối

Nếu $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ còn $\int_a^b |f(x)|\,dx$ phân kì thì ta nói $\int_a^b f(x)\,dx$ bán hội tụ.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ, phân kì của tích phân sau

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ **b)** $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$ **c)** $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ **d)** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$

e) $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$ **f)** $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$ **g)** $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin x}-1}\,dx$ **h)** $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^k x}$

i) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **k)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$ **l)** $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$

Chú ý. Khi *f* có điểm bất thường là *a* thì $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx$; khi đó tích phân suy rộng ở vế trái hội tụ $\Leftrightarrow$ cả hai tích phân suy rộng ở vế phải cùng hội tụ

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ, phân kì của các tích phân sau:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5-1}}$ **(HT)** **b)** $\int_0^{\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2\ln(1+2\sqrt{x})}\,dx$ **(HT)**

c) $\int_0^{\infty} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3\ln(1+3\sqrt{x})}\,dx$ **(HT)** **d)** $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{4^x-2^x}\,dx$ **(HT)** **e)** $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{9^x-3^x}\,dx$ **(HT)**

f) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q}$ **g)** $\int_2^{\infty} \frac{\sin(x-2)}{\sqrt{(x-2)^3}}\,dx$ **(HT)** **h)** $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{(x-1)^4}}\,dx$ **(HT)**

i) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{x\sqrt{x}+x^6}\,dx$ **(HT)** **k)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^3+e^x)}{x\sqrt{x}+x^4}\,dx$ **(HT)**

Ví dụ 4. Tính

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ **b)** $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$ **c)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$, $0 < \alpha < 2\pi$

Nhận xét. Liên hệ giữa hai loại tích phân suy rộng ?

§4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. Sơ đồ tổng tích phân, vi phân

1) Sơ đồ tổng tích phân. Giả sử cần tính $A(x)$, $x \in [a ; b]$, ngoài ra $A(x)$ thoả mãn tính chất cộng, khi đó ta tính A theo sơ đồ sau:

+) Chia $[a ; b]$ thành n phần bởi các điểm chia $x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \equiv b$

+) Phân tích A thành tổng $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$, ở đó A_i là đại lượng A trên Δx_i

+) Tìm hàm số $f(x)$ sao cho $A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $\xi_i \in [x_{i-1} ; x_i]$

+) Tính gần đúng đại lượng A: $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

+) Sử dụng định nghĩa tích phân, có $A = \int_a^b f(x)\,dx$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang cong

2) Sơ đồ vi phân. Cần tính $A(x)$, $x \in [a ; b]$, ngoài ra $A(x)$ thoả mãn tính chất cộng, khi đó ta tính A theo sơ đồ vi phân:

+) Lấy $x \in [a ; b]$, lấy $x + \mathrm{d}x$

+) Tính $A(x)$, $A(x + \mathrm{d}x)$

+) Tìm phần chính bậc nhất $\mathrm{d}A$ của ΔA

+) Lấy tích phân của $\mathrm{d}A$ từ a đến b

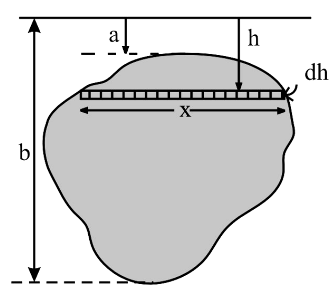
Ví dụ 2. Cho điện tích e_1 đặt ở gốc O, tính công của lực đẩy F sản ra do điện tích e_2 di chuyển từ điểm M_1 có hoành độ r_1 đến điểm M_2 có hoành độ r_2 trên trục hoành Ox

+) Gọi $A(x)$ là công lực đẩy F sinh ra do e_2 di chuyển từ M_1 đến $M(x)$

+) Ví $\mathrm{d}x$ khá bé nên coi F không đổi trên $[x ; x + \mathrm{d}x]$ và bằng $\dfrac{e_1 e_2}{x^2}$

+) $dA = \dfrac{e_1 e_2}{x^2}\,dx$

+) $A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \dfrac{e_1 e_2}{x^2}\,dx = e_1 e_2\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$



Ví dụ 3. Tính áp lực lên một mặt đĩa phẳng chìm trong nước trong hình

$F = \int_a^b whx\,dh$, ở đó w là trọng lượng riêng của nước $= \dfrac{1}{32}$ tấn/(ft)^3

Ví dụ 4. Công của lực có độ lớn $f(x) > 0$ tác động vào vật chuyển động thẳng từ $x = a$ đến $x = b$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH I
BÀI 11

§4. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (TT)

II. Ứng dụng hình học

1. Tính diện tích hình phẳng

a) Đường cong cho trong toạ độ Descarter

+) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$$

+) $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y = c$, $y = d$

$$S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)|\,dy$$

Ví dụ 1. Tính diện tích giới hạn bởi các đường:

a) $y = x(x - 1)(x - 2)$ và trục Ox

b) $y = x^2$ và $y = \dfrac{x^3}{3}$

c) $x = y^2(y - 1)$ và trục Oy

d) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = 2x$

e) $x^2 + y^2 \le 8$, $y \ge \dfrac{x^2}{2}$

f) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$

b) Đường cong cho dưới dạng tham số

+) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, không kín. Khi đó $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta |y(t)\,x'(t)|\,dt$

+) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $0 \le t \le T$, kín, giới hạn miền nằm bên trái. Khi đó

$$S = -\int_0^T y(t)\,x'(t)\,dt = \int_0^T x(t)\,y'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)]\,dt$$

Ví dụ 2. Tính diện tích giới hạn bởi đường cong:

a) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

b) Cycloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $y \ge 0$

c) Astroide: $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$

d) Cardioide: $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$

e) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$

f) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$

g) Lá Descarter: $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$

c) Đường cong trong toạ độ cực: $r = r(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$

Khi đó có $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$

Ví dụ 3. Tính diện tích giới hạn bởi đường cong:

a) $r = R$

b) $r = a\cos 2\varphi$ (hoa hồng 4 cánh)

c) $r = a\sin 3\varphi$ (hoa hồng 3 cánh)

d) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (cardioide)

e) $r^2 = a^2\sin 4\varphi$

f) $r = a\cos\varphi$, $r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$, miền chứa điểm $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$

g) $r = 2a\cos 3\varphi$, $r \ge a$

2. Tính thể tích

a) Thể tích vật thể có tiết diện thẳng góc với Ox với diện tích $S(x)$ là hàm liên tục, $a \le x \le b$ là $V = \int\limits_a^b S(x)\,dx$

Tương tự nếu vật thể có tiết diện thẳng góc với Oy với diện tích $S(y)$, $c \le y \le d$ thì ta có $V = \int\limits_c^d S(y)\,dy$

b) Vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox có thể tích là $V = \pi\int\limits_a^b y^2(x)\,dx$

Tương tự khi quay hình $x = x(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy có thể tích là $V = \pi\int\limits_c^d x^2(y)\,dy$

– Khi quay $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Oy tạo nên vật thể tròn xoay có thể tích là $V = 2\pi\int\limits_a^b xy(x)\,dx$

c) Khi quay $r = r(\varphi)$, $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$ quanh trục cực tạo nên vật thể tròn xoay có thể tích là $V = \frac{2\pi}{3}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$

Ví dụ 4. Tính thể tích vật thể

a) $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$

c) Quay $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$ quanh trục Ox

d) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$, $z = 1$

e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$, $z = -1$, $z = 2$

f) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$

g) $z = x^2 + 2y^2$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$

h) Quay một nhịp của đường xicloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ quanh trục Oy; Ox và $y = 2a$.

i) Khi quay hình $y = \sqrt{x}\,\text{arccot}\,x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox

$$\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi\ln 2}{2}\right)$$

k) Khi quay hình $y = \sqrt{x}\arctan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox

$$\left(\frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi\ln 2}{2}\right)$$

3. Tính độ dài cung

a) $\overset{\frown}{AB}$: $y = y(x)$, $a \le x \le b$, $y'(x)$ liên tục trên $[a ; b]$, khi đó có $s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$

b) $\overset{\frown}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, khi đó có $s = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$

c) $\overset{\frown}{AB}$: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, khi đó có $s = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$

Ví dụ 5. Tính độ dài đường cong

a) $x^2 + y^2 = R^2$ **b)** $y^2 = x^3$ từ $(0 ; 0)$ đến điểm có hoành độ $x = 4$.

c) $r = a(1 + \cos\varphi)$ **d)** $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ **e)** $y = \int\limits_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt$

f) Tìm chu vi của tam giác cong giới hạn bởi Ox, $y = \ln\cos x$ và $y = \ln\sin x$

g) $x = t + \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$ $\quad (8 - 4\sqrt{2})$

h) $y = \arcsin e^{-x}$, $0 \le x \le \ln 2$ $\quad (\ln(2 + \sqrt{3}))$

i) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^6 \\ y = 4 - \frac{1}{2}t^4 \end{cases}$, $0 \le t \le \sqrt[4]{8}$ $\quad \left(\frac{26}{3}\right)$

k) $\begin{cases} x = 2t - \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$ **(8)**

l) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = 2t + \cos 2t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$ **(8)**

4. Tính diện tích mặt tròn xoay

a) $y = f(x)$, $a \le x \le b$ quay quanh trục Ox, $f'(x)$ liên tục:

$$\sigma = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

+) Tương tự, $x = x(y)$, $c \le y \le d$ quay quanh trục Oy, $x'(y)$ liên tục:

$$\sigma = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+x'^2}\,dy$$

b) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$ quay quanh trục Ox

$$\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

Tương tự, nếu quay quanh trục Oy

$$\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

c) $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ quay quanh trục cực

$$\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

Ví dụ 6. Tính diện tích tròn xoay

a) $y = \tan x$, $0 \le x \le \pi/4$ quay quanh trục Ox

b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

c) $r = 2R\sin\varphi$ quay quanh trục cực

d) $r = a(1 + \cos\varphi)$ quay quanh trục cực

e) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ quay quanh trục Ox ; Oy

f) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0 \le x \le a$ quay quanh trục Ox

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

h) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ quay quanh Oy; quay quanh $y = x$

i) Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường tròn $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ quay quanh trục Oy $(12\pi^2)$

Have a good understanding!

GIẢI TÍCH I
BÀI 12
CHƯƠNG III. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN
§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

• Đặt vấn đề

I. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}, x_i \in \mathbb{R}\}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ gọi là điểm hay vectơ.

Phép toán: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Khoảng cách: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.

Định nghĩa

$M_0 \in \mathbb{R}^n$, lân cận của M_0 là $S_r(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n : \rho(M, M_0) < r, 0 < r \in \mathbb{R}\}$.

Định nghĩa

$A \subset \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^n$ là điểm trong của $A \Leftrightarrow \exists S_r(M) \subset A$

M là điểm biên của $A \Leftrightarrow S_r \cap A \neq \varnothing$, $S_r \cap CA \neq \varnothing$, $\forall\, S_r(M)$

Định nghĩa

$A \subset \mathbb{R}^n$ là mở $\Leftrightarrow$ A chứa mọi điểm trong của nó (Khi đó kí hiệu là A^o)

A đóng $\Leftrightarrow$ A chứa các điểm biên của nó (Khi đó kí hiệu là $\overline{A}$)

A là bị chặn (giới nội) $\Leftrightarrow \exists\, S_r(M) \supset A$

A là compact $\Leftrightarrow$ A đóng và giới nội

A là liên thông $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A$ có thể nối với nhau bằng một đường cong liên tục $\subset A$

$A \subset \mathbb{R}^n$ là miền $\Leftrightarrow$ A mở và liên thông

$A \subset \mathbb{R}^n$ là miền đóng $\Leftrightarrow$ A là liên thông và đóng

Miền D là đơn liên $\Leftrightarrow$ D giới hạn bởi một mặt kín

Miền D là đa liên $\Leftrightarrow$ D giới hạn bởi nhiều mặt kín rời nhau từng đôi

II. Hàm nhiều biến

1. Định nghĩa. Ánh xạ f: $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: được gọi là hàm hai biến số

Ánh xạ f: $D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: được gọi là hàm ba biến số

Khi đó D được gọi là TXĐ của hàm số, tập giá trị = $\{f(M), M \in D\}$

Ví dụ 1

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

b) $z = -\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}}$

c) $u = x\ln\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)$

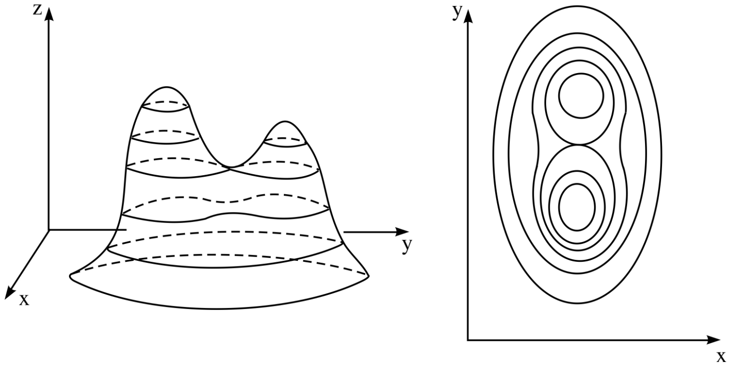
d) $z^2 = 1 - x^2 - y^2$

e) $z = \sqrt{\left(x^2 + y^2 - a^2\right)\left(4a^2 - x^2 - y^2\right)}$

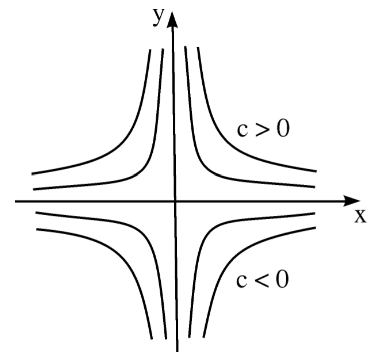
f) $z = \sqrt{\cos\left(x^2 + y^2\right)}$

g) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$

Ý nghĩa hình học: Vận dụng vào bản đồ trắc địa, nhờ sử dụng đường mức: $f(x, y) = c$



Bản đồ địa hình quả đồi



Đồ thị hàm số $z = xy$

Việc vẽ đồ thị của hàm hai biến số có sự khác biệt đột phá so với hàm một biến số (đã được nghiên cứu tỉ mỉ trong chương I). Khi $n = 2$ có thể vẽ đồ thị kết hợp với sử dụng đường mức hoặc sử dụng các phần mềm đã có để nhận được đồ thị một cách trực tiếp. Khi $n \geq 3$, chỉ có thể mô tả đồ thị hàm số này thông qua các mặt mức trong không gian 3 chiều.

2. Giới hạn của hàm nhiều biến

Ví dụ 2

a) $\lim\limits_{y \to 0}\left(\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0}\left(\lim\limits_{y \to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ **c)** $\lim\limits_{\substack{y = kx \\ x \to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Định nghĩa.

Ta bảo $M_n(x_n\,;\,y_n) \to M_0(x_0\,;\,y_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

Định nghĩa. Cho $f(x, y)$ xác định trên D, $(x_0\,;\,y_0) \in \bar{D}$.

Ta bảo $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = l \Leftrightarrow \forall\, M_n(x_n\,;\,y_n) \to M_0(x_0\,;\,y_0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l$

hoặc: $\forall\, \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$: $d(M_0\,;\,M) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon$, ở đó $M(x\,;\,y) \in D$.

Ví dụ 3

a) $\lim\limits_{(x\,;\,y)\to(0\,;\,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ **d)** $\lim\limits_{(x\,;\,y)\to(0\,;\,0)}\sqrt{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{xy}$

b) $\lim\limits_{(x\,;\,y)\to(0\,;\,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **e)** $\lim\limits_{(x\,;\,y)\to(0\,;\,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$ (0)

c) $\lim\limits_{(x\,;\,y)\to(0\,;\,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Các phép toán

Tương tự như hàm một biến số

3. Hàm liên tục

Định nghĩa. Hàm $f(M)$ xác định trên D, $M_0 \in D$, ta bảo hàm $f(M)$ liên tục tại M_0

$\Leftrightarrow \lim\limits_{D \ni M \to M_0} f(M) = f(M_0)$

Hàm $f(M)$ được gọi là liên tục trên $D \Leftrightarrow f(M)$ liên tục tại mọi điểm của D.

Ví dụ 4. Xét tính liên tục tại điểm (0 ; 0)

a) $z = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ 0, & (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$ **b)** $z = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

c) $z = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ 0, & (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$ **d)** $z = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ 0, & (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$

e) $z = \begin{cases} \dfrac{x^2\left(x^2-y^2\right)}{x^4+y^4}, & (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ a, & (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$ (không liên tục, $\forall a$)

f) $z = \begin{cases} \cos\dfrac{xy-y^2}{x^2+y^2}, & (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ a, & (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$ (không liên tục, $\forall a$)

g) $z = \begin{cases} \dfrac{x^2\arcsin^2 y - y^2\arcsin^2 x}{x^4+y^4}, & (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ a, & (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$

($a = 0$, liên tục; $a \neq 0$, không liên tục)

h) $z = \begin{cases} \dfrac{y^2\arctan^2 x - x^2\arctan^2 y}{x^4+y^4}, & (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ a, & (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$

($a = 0$, liên tục; $a \neq 0$, không liên tục)

i) Tìm a để (0 ; 0) là điểm liên tục của hàm số

1°) $z = \begin{cases} \dfrac{2x^2y - xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ a, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ (0)

2°) $z = \begin{cases} \dfrac{x^2y - 2xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ a, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ (0)

Định nghĩa. Hàm $f(x)$ liên tục đều trên $D \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall\ M', M'' \in D: d(M'\,; M'') < \delta \Rightarrow |f(M') - f(M'')| < \varepsilon.$$

Ví dụ. Xét tính liên tục đều của hàm $f = x + y + 2$

Chú ý. f liên tục đều $\Rightarrow$ f liên tục.

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN

1. Đạo hàm riêng

Định nghĩa.

$u = f(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$, ta định nghĩa các đạo hàm riêng

$$f'_x(x_0\,;\,y_0) \equiv \frac{\partial}{\partial x} f(x_0\,;\,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0\,;\,y_0) \equiv \frac{\partial}{\partial y} f(x_0\,;\,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0)}{\Delta y}$$

Chú ý.

1°/ $f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x = x_0}$; $f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{d}{dy} f(x_0, y)\Big|_{y = y_0}$

2°/ Tương tự có các định nghĩa $f'_x(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{d}{dx} f(x, y_0, z_0)\Big|_{x = x_0}$;

$f'_y(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{d}{dy} f(x_0, y, z_0)\Big|_{y = y_0}$; $f'_z(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{d}{dz} f(x_0, y_0, z)\Big|_{z = z_0}$

Ví dụ 1.

a) $u = x^{y^z}$, tính $u'_x(1\,;2\,;3)$, $u'_y(1\,;2\,;3)$, $u'_z(1\,;2\,;3)$

b) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, tính $u'_x(3\,;4\,;5)$, $u'_y(3\,;4\,;5)$, $u'_z(3\,;4\,;5)$

c) $z = \arctan\sqrt{x^y}$, tính u'_x, u'_y

d) $z = \left(1 + \log_y x\right)^3$, tính z'_x, z'_y

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\tan y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, tính $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$

$(f'_x(0\,;0) = 0,\ f'_y(0\,;0) = 0)$

f) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, tính $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$

$(f'_x(0\,;0) = 0,\ f'_y(0\,;0) = 0)$

g) $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arctan\dfrac{x}{y}$, tính $A = x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2$ (0)

h) $z = \dfrac{x^2}{3y} + \arctan\dfrac{y}{x}$, tính $A = y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} - xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + x^2$ $\left(\dfrac{2xy^2}{x^2 + y^2}\right)$

Have a good understanding!

GIẢI TÍCH I
BÀI 13
§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN (TT)

2. Vi phân toàn phần

Định nghĩa. $f(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0\,;\,y_0) \in D$. Nếu $\exists$ A, B không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$ để có $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, ở đó $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0$

thì ta bảo hàm f khả vi tại M_0 và có $df(M_0) = A\Delta x + B\Delta y$ là vi phân toàn phần của hàm f tại M_0.

Hàm f được gọi là khả vi trong miền $D \Leftrightarrow f$ khả vi tại $\forall\, M \in D$.

Chú ý. $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0\,;\,y_0) \Rightarrow f(x, y)$ liên tục tại $M_0(x_0\,;\,y_0)$.

Ví dụ 1. Xét tính khả vi của các hàm số sau tại (0 ; 0)

a) $u = x + 2y$

b) $u = 2x + \sqrt[3]{y}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ (f không liên tục tại (0 ; 0) $\Rightarrow$ không khả vi)

d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\tan y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(f không liên tục tại (0 ; 0) $\Rightarrow$ không khả vi)

f) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ (không khả vi)

Định lí 1. $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong lân cận $M_0(x_0\,;\,y_0)$

$\Rightarrow f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0\,;\,y_0)$ và có $dz = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y$

Ví dụ 2. Tính vi phân toàn phần

a) $z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ b) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $du(3, 4, 5)$

c) $z = \arctan xy$ d) $u = x^{y^z}$

Chú ý. Dựa vào vi phân để tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Ví dụ 3. Tính gần đúng

a) $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$ b) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$ c) $(1{,}04)^{2{,}02}$

d) $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$ e) $\sin 32° \cos 59°$

f) Tính gần đúng sự biến thiên của hàm số $z = \dfrac{x+3y}{y-3x}$ khi x biến thiên từ $x_1 = 2$ đến $x_2 = 2{,}5$ còn y từ $y_1 = 4$ đến $y_2 = 3{,}5$.

g) Hình chữ nhật có hai cạnh $a = 10$cm và $b = 24$cm. Đường chéo l thay đổi như thế nào nếu cạnh a dài thêm 4mm còn cạnh b ngắn đi 1mm? Tính giá trị gần đúng và so sánh với giá trị đúng của nó.

h) Chiều cao của một hình nón $h = 30$cm, bán kính đáy $R = 10$cm. Thể tích của nó thay đổi như thế nào nếu tăng h thêm 3mm và giảm R đi 1mm?

i) $\ln\left(0,02 + \sqrt[3]{1,03}\right)$ (0,03) k) $\sqrt[3]{(1,97)^2 + 4e^{0,06}}$ (2,01)

l) $A = \sqrt[3]{(1,04)^3 + (2,03)^2 + 3}$ (2,02)

m) $A = \sqrt[4]{(3,04)^2 + (2,02)^3 - 1}$ (2,015)

3. Vi phân hàm hợp, tính bất biến, các dạng vi phân

Cho hàm f: $B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, φ: $D \subset \mathbb{R}^2 \to B$

$$(x, y) \xrightarrow{\ \varphi\ } \big(u(x, y), v(x, y)\big) \xrightarrow{\ f\ } f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

Định lí 2. f có các đạo hàm riêng liên tục trên B, còn u, v có các đạo hàm riêng liên tục trên D thì $f \circ \varphi$ có các đạo hàm riêng và

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \circ \varphi) = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial y}(f \circ \varphi) = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

Chú ý.

1°/ $z = f(x, y)$, $y = y(x)$ thì có $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'(x)$

2°/ $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì có $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'(t)$

Ví dụ 4. Tính

a) $\dfrac{dz}{dt}$, $z = \dfrac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = \ln t$

b) $\dfrac{dz}{dx}$, $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = \cos x$

c) $z'(x)$ và $\dfrac{dz}{dx}$, $z = \arctan\dfrac{y}{x}$, $y = x^2$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, $z = \arctan\dfrac{x}{y}$, $x = u\sin v$, $y = u\cos v$

e) $u = \dfrac{e^{zx(y-z)}}{a^2+1}$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$, tính $\dfrac{du}{dx}$.

Tính bất biến của vi phân cấp 1:

$z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y) \Rightarrow dz = \dfrac{\partial f}{\partial u}du + \dfrac{\partial f}{\partial v}dv$

Phép toán: u, v là các hàm khả vi, khi đó ta có

$$d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = udv + vdu,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0$$

4. Đạo hàm của hàm ẩn

Khái niệm về hàm ẩn: Hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định một hay nhiều hàm ẩn y theo x. Tương tự, hệ thức $F(x, y, z) = 0$ xác định một hay nhiều hàm ẩn z theo các biến số x và y.

Hệ hai phương trình $\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$ xác định một hay nhiều cặp hàm số ẩn u, v của ba biến số x, y, z.

Định lí 3. $F(x_0, y_0) = 0$, $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận $M_0(x_0, y_0)$ và $F'_y(M_0) \neq 0$ thì hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định hàm ẩn $y = f(x)$ trong lân cận nào đó của điểm x_0, thoả mãn $y(x_0) = y_0$ và khả vi liên tục trong lân cận này, và có

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(M_0)}{F'_y(M_0)}$$

Định lí 4. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và $F'_z(M_0) \neq 0$, khi đó hệ thức $F(x, y, z) = 0$ xác định hàm ẩn $z = f(x, y)$ trong lân cận nào đó của (x_0, y_0) thoả mãn $z(x_0, y_0) = z_0$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận này, và có

$$z'_x(x_0\ ;\ y_0) = -\frac{F'_x}{F'_z}(M_0),\ z'_y(x_0\ ;\ y_0) = -\frac{F'_y}{F'_z}(M_0)$$

Định lí 5. $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$, $G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$, các hàm $F(x, y, z, u, v)$, $G(x, y, z, u, v)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận $M_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ và định thức

$$D \equiv \frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

khi đó hệ thức $\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$ xác định hai hàm ẩn $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$ trong lân cận nào đó của (x_0, y_0, z_0), thoả mãn $u(x_0, y_0, z_0) = u_0$, $v(x_0, y_0, z_0) = v_0$, các hàm u, v liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận này và có

$$u'_x(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0) = -\frac{1}{D}.\frac{D(F, G)}{D(x, v)}(M_0)\ ;\ v'_x(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0) = -\frac{1}{D}.\frac{D(F, G)}{D(u, x)}(M_0).$$

Tương tự có $u'_y(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$, $v'_y(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$, $u'_z(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$, $v'_z(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$

Ví dụ 5.

a) $z^3 - 3xyz = a^3$, tính dz

b) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$, tính dy.

c) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{y}{z} + 10$, tính dz

d) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$, tính dy, dz.

e) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$, tính vi phân toàn phần dz.

f) $x = v\cos u - u\cos v + \sin u$, $y = v\sin u - u\sin v - \cos u$, $z = (u - v)^2$, tính dz.

g) Phương trình $x.e^{yz} = y + z + 1$ xác định hàm ẩn $z(x, y)$. Tính $dz(0\ ;\ 0)$

$(dx - dy)$

h) Hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $z - ye^{x/z} = 0$. Tính $dz(0\ ;\ 1)$

$(dx + dy)$

i) Hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $xe^{y/z} - z = 0$. Tính $dz(1\ ;\ 0)$

$(dx - dy)$

k) Phương trình $x + 2y + z = ye^{xz}$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Tính $dz(0\ ;\ 1)$

$(-2dx - dy)$

l) Phương trình $xe^{yz} = 2x - y - z$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Tính $dz(1\ ;\ 0)$

$(dx - 2dy)$

m) Phương trình $y\left(z - \sqrt{x^2 - z}\right) = -2$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x}z'_x + y^2 z'_y = 2$

n) Phương trình $x\left(z - \sqrt{y^2 - z}\right) = 3$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng $x^2 z'_x - \frac{1}{y^2}z'_y = -3$

o) $x^3 - 2y^3 + 3z^3 = (x + y)z$. Tính $dz(1\ ;\ -1)$ $\left(-\frac{4}{9}dx + \frac{5}{9}dy\right)$

p) $3x^3 + 2y^3 + z^3 = (x + y)z$. Tính $dz(-1\ ;\ 1)$ $\left(-\frac{8}{3}dx - \frac{5}{3}dy\right)$

Have a good understanding!

GIẢI TÍCH I
BÀI 14
§ 2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN (TT)

5. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao:

Định nghĩa: Cho $z = f(x, y)$, ta định nghĩa:

$$f''_{x^2}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);\quad f''_{y^2}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$$f''_{xy}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);\quad f''_{yx}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Tương tự nếu $z = g(x, y, z)$ thì:

$$g'''_{x^3}(x,y,z) \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right);\quad g'''_{xyz}(x,y,z) \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right).$$

$$g'''_{yx^2}(x,y,z) \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right), \ldots$$

Ví dụ 1.

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Tính $z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yy}$

b) $z = \arctan\dfrac{x + y}{1 - xy}$. Tính $z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yy}$

c) $z = e^{xe^y}$. Tính $z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yy}$

d) $z = \sin(xy)$. Tính $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

e) $w = e^{xyz}$. Tính w'''_{xyz}.

f) $g(x, y) = (1 + x)^m (1 + y)^n$. Tính $g''_{xx}(0,0),\ g''_{xy}(0,0),\ g''_{yy}(0,0)$.

g) $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$ CMR $f''_{yx}(0,0) = 1,\ f''_{xy}(0,0) = -1$

h) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$ Tính $f''_{xy}(0,0)$ $(\nexists)$

i), $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$ Tính $f''_{yx}(0,0)$ $(\nexists)$

k), Cho $z = y\sin\dfrac{y}{x}$, tính $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}$ (0)

l), Cho $z = x\cos\dfrac{x}{y}$, tính $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}$ (0)

m) Cho $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin^3 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, tính $f'_x(x, y)$, $f''_{xy}(0, 0)$

$$\left(f'_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(y^2 - x^2)\sin^3 y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases},\quad f''_{xy}(0, 0) = 1 \right)$$

n) Cho $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y\sin^3 x}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, tính $f'_y(x, y)$, $f''_{yx}(0, 0)$

$$\left(f'_y(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - y^2)\sin^3 y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases},\quad f''_{yx}(0, 0) = 1 \right)$$

o) Cho $z = ye^{\frac{y}{x}}$. Tính $A = x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}$ (0)

p) Cho $z = ye^{\frac{x}{y}}$. Tính $A = x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}$ (0)

Định lí Schwart. z = f(x, y) có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} trong lân cận $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại $M_0(x_0, y_0) \Rightarrow f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$.

Chú ý: Định lí này có thể mở rộng cho đạo hàm riêng cấp cao hơn và cho hàm số n biến số nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục.

Ví dụ 2: Tính các đạo hàm riêng cấp hai: f''_{xy}, f''_{yx}

a. $f(x, y) = x^2y^3 + y^5$; b, $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y^2)$

Định nghĩa. z = f(x, y), ta định nghĩa $d^n z = d(d^{n-1}z)$, $2 \le n \in N$.

Nhận xét:

+ Khi *x, y* là các biến số độc lập ta có: $d^n z = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy \right)^n f$.

+ Khi *x, y* không phải là các biến số độc lập thì công thức trên không còn đúng với $n \ge 2$.

Thật vậy: $d^2 z = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy \right)^2 f + f''_{x^2}d^2x + f''_{y^2}d^2y$

Do đó vi phân toàn phần $d^n z$ $(n \ge 2)$ của hàm z nhiều biến số không có dạng bất biến.

Ví dụ 3

a) $f(x, y) = (1 + x)^m(1 + y)^n$. Tính $d^2 f 0, 0)$

b) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 5xz + 7yz$. Tính $d^2 f(0, 0, 0)$.

c) $z = x^2 + 2y + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$. Tính $d^2(1, 2)$

d) $z = e^{xy}$. Tính $d^2 z$

e) $z = e^x \cos y$. Tính $d^3 z$.

f) $f(x, y) = x^{2y}$. Tính $d^2 f(1,1)$ $(2dx^2 + 4dxdy)$

g) ($f(x, y) = y^{3x}$. Tính $d^2 f(1,1)$ $(6dxdy + 6dy^2)$

6. Công thức Taylor

Định lí: f(x,y) có đạo hàm riêng đến cấp $(n + 1)$, liên tục trong lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$. Nếu $M_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ cũng nằm trong lân cận đó thì ta có:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + ... + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) +$$
$$\frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1$$

Ví dụ 4

a, Khai triển $f(x, y) = -x^2 + 3y^2 + 2xy - 6x - 2y - 4$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm (- 2, 1).

b, Khai triển Maclaurin $f(x, y) = e^x \sin y$ đến bậc 3.

c, Khai triển Maclaurin $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x - y + xy}$.

d, Viết công thức Taylor hàm $f(x, y) = y^x$ ở lân cận điểm (1, 1) đến bậc hai.

e, Cho hàm ẩn z xác định bởi $z^3 - 2xz + y = 0$, biết z(1, 1) = 1. Hãy tính một số số hạng của khai triển hàm z theo luỹ thừa của (x – 1) và (y – 1).

§3. Cực trị

Đặt vấn đề

I. Định nghĩa: $z = f(M), \quad M \in R^n$.

Ta bảo z đạt cực tiểu tại $M_0 \Leftrightarrow f(M) > f(M_0), \forall M \in U_\varepsilon(M_0) \backslash \{M_0\}$.
Tương tự z có cực đại tại $M_1 \Leftrightarrow f(M) < f(M_1), \forall M \in U_\varepsilon(M_1) \backslash \{M_1\}$.

Ví dụ 1. a) $z = x^2 + y^2$ b) $z = 4 - x^2 - y^2$

II. Quy tắc tìm cực trị

a, $z = f(x,y)$, đặt $p = f'_x$, $q = f'_y$, $a = f''_{x^2}$, $b = f''_{xy}$, $c = f''_{y^2}$

Định lí 1. $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại $M_0, \exists f'_x, f'_y \Rightarrow f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$.

Định nghĩa: ta gọi M_0 là điểm tới hạn $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'_x(M_0) = 0 = f'_y(M_0) \\ \nexists f'_x(M_0), \ \nexists f'_y(M_0) \end{array}\right.$

Định lí 2: Giả sử $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$, $f'_x(M_0) = 0 = f'_y(M_0)$. Khi đó:

+ Nếu $b^2 - ac < 0$ thì f(x, y) đạt cực trị tại M_0; cực tiểu nếu $a > 0$, cực đại nếu $a < 0$.

+ Nếu $b^2 - ac > 0$ thì f(x, y) không đạt cực trị tại M_0.

+ Nếu $b^2 - ac = 0$ thì không có kết luận gì về cực trị tại M_0.

Ví dụ 2: Tìm các cực trị của các hàm số sau:

a) $z = x^2 - 2x + \arctan y^2$ $(z_{CT}(1\,;0) = -1)$

b) $z = \operatorname{arccot} x^2 - y^2 + 2y$ $\left(z_{CĐ}(0\,;1) = \dfrac{\pi}{2} + 1\right)$

c) $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ $(z_{CĐ}(6\,;3) = 27$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;0))$

d) $z = 3xy^2 - y^3 - x^4$ $(z_{CĐ}(3\,;6) = 27$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;0))$

e) $z = (x^2 + 2x - y)e^{-2y}$ $\left(z_{CT}\left(-1\,;-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{e}{2}\right)$

f) $z = x + y - \dfrac{1}{xy}$ $(z_{CĐ}(-1\,;-1) = 3)$

g) $z = x^3 - y^3 - 3xy$ $(z_{CĐ}(-1\,;1) = 1$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;0))$

h) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

i) $z = \dfrac{1}{4}\left(x^4 + y^4\right) - \left(x^2 + y^2\right) - xy + 1$

k) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

l) $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

m) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$

n) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

p) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

q) $z = e^{-x}\left(2x - 3y + y^3\right)$ $(z_{CĐ}(0\,;-1) = 2$, $\nexists$ cực trị tại $(2\,;1))$

+) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x}\left(-2x + 3y - y^3 + 2\right) = 0 \\ e^{-x}\left(-3 + 3y^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^3 - 3y - 2}{-2} \\ y = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(0\,;-1) \\ M_2(2\,;1) \end{cases}$

+) $z''_{xx} = e^{-x}\left(2x - 3y + y^3 - 4\right)$, $z''_{xy} = e^{-x}\left(3 - 3y^2\right)$, $z''_{yy} = e^{-x}6y$

M_i	A	B	C	Δ	Kết luận
M_1	-2	0	-6	-12	$z_{CĐ}(M_1) = 2$
M_2	$-2e^{-2}$	0	$6e^{-2}$	$12e^{-4}$	Không có cực trị

r) $z = e^{-y}\left(3x - x^3 - 2y\right)$ $(z_{CĐ}(-1\,;0) = -2$, $\nexists$ cực trị tại $(1\,;2))$

s) $z = xy\left(3 - x - y\right)$ $(z_{CĐ}(1\,;1) = 1$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;0)$, $(0\,;3)$, $(3\,;0))$

t) $z = xy\left(x + y + 3\right)$ $(z_{CĐ}(-1\,;-1) = 1$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;0)$, $(0\,;-3)$, $(-3\,;0))$

u) $z = x^2 + \dfrac{2}{x} + y + \dfrac{4}{y}$ $(z_{\min}(1\,;2) = 7$, $(1\,;-2)$ không là cực trị)

v) $z = x + \dfrac{1}{x} - y^2 - \dfrac{2}{y}$ $(z_{\max}(-1\,;1) = 5$, $(1\,;1)$ không là cực trị)

Have a good understanding!

GIẢI TÍCH I
BÀI 15
§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN SỐ (TT)

III. Cực trị có điều kiện
Đặt vấn đề

• Ta thường gặp bài toán tìm cực trị của biểu thức với điều kiện ràng buộc nào đó đối với các biến

• Tuy nhiên việc thay các điều kiện ràng buộc vào hàm ban đầu để đưa về bài toán đã biết không phải luôn thuận lợi. Ta cần khắc phục như thế nào?

• Phương pháp nhân tử Lagrange đã khắc phục được khó khăn trên, đây là công cụ quan trọng trong kinh tế, hình học vi phân và lý thuyết cơ học nâng cao.

1. Cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$

Tìm giá trị cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với ràng buộc $g(x, y) = 0$.

Đặt $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

Ta có $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, ở đó biến λ được gọi là biến Lagrange.

Như vậy bài toán tìm cực trị $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $g(x,y)=0$ được chuyển về bài toán cực trị của hàm $L(x, y, \lambda)$. Đây là phương pháp nhân tử Lagrange.

Phương pháp nhân tử Lagrange rất quan trọng trong lý thuyết, ngoài ra trong thực hành có ưu điểm sau:

• Không phải băn khoăn về tính đối xứng trong bài toán vì có thể lựa chọn một biến độc lập bất kì.

• Việc đưa thêm vào λ như một biến khác sẽ khử đi một ràng buộc

• Dễ dàng mở rộng cho trường hợp nhiều biến hơn và nhiều ràng buộc hơn

Ví dụ 1. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = x^2 + y^2, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

b) $z = x + 2y, x^2 + y^2 = 5$

c) $z = xy, x + y = 1$

d) $z = xy, x^2 + y^2 = 2x$

e) $z = x^m + y^m \ (m > 1),\ x + y = 2, (x, y > 0)$

f) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

2) Cực trị của hàm số $u = f(x, y, z)$ với điều kiện $g(x, y, z) = 0$

Tìm cực trị của hàm $w = f(x, y, z)$, với điều kiện $g(x, y, z) = 0$.

Đặt $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$

Có $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

Như vậy bài toán tìm cực trị của hàm $w = f(x, y, z)$ với điều kiện $g(x, y, z) = 0$ được chuyển về bài toán tìm cực trị của hàm: $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị có điều kiện

a) $u = xy^2z^3,\ x + y + z = a,\ \ (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$

b) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1$

c) $u = \sin x \sin y \sin z,\ x + y + z = \dfrac{\pi}{2}\ \ (x > 0, y > 0, z > 0)$

d) $u = xyz,\ xy + yz + zx = 8, (x, y, z > 0)$

e) $u = x + y + z,\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$

f) $u = x - 2y + 2z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9$

g) $u = \dfrac{x^n + y^n + z^n}{3},\ x + y + z = s\ \ (x > 0, y > 0, z > 0, s > 0),\ n > 1$

3) Cực trị của hàm $u = f(x, y, z)$ với các điều kiện $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$

Tương tự đặt $L = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z)$ có

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$$

Bài toán tìm cực trị với hai điều kiện ràng buộc nói trên chuyển về bài toán tìm cực trị của hàm $L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z)$

Ví dụ 3. Tìm cực trị với điều kiện

a) $u = xy + xz,\ \ x^2 + y^2 = 2,\ \ x + z = 2\ \ (x > 0, y > 0, z > 0)$

b) $u = xyz,\ \ x + y + z = 5,\ \ xy + yz + zx = 8$

Chú ý: Trong kinh tế, phương pháp nhân tử Lagrange được sử dụng để giải quyết bài toán tối đa hoá tổng sản lượng của một công ty, phụ thuộc vào ràng buộc của tài nguyên sẵn có cố định, chẳng hạn: $P = f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, với điều kiện $\alpha + \beta = 1$, ở đó P là sản lượng (tính bằng đô la) biểu diễn qua x đơn vị của vốn và y đơn vị của lao động.

IV. Giá trị lớn nhất, bé nhất

Cách tìm.

1° Tìm các điểm dừng (trong miền mở và trên biên)

2° So sánh giá trị của hàm số tại các điểm dừng

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất

a) $z = x^2y,\ x^2 + y^2 \le 1$

b) $z = x^2 + y^2 - 2x - y,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 2$

c) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y),\ 0 \le x, y \le \pi/2$

d) $u = x + y + z,\ x^2 + y^2 \le z \le 1$

e) Tìm hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất nội tiếp trong ellipsoide

f) Tìm điểm trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mà tổng bình phương các khoảng cách từ điểm đó đến ba điểm $M_1(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $M_2(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $M_3(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ là bé nhất

g) Tìm ellipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$ đi qua (1 ; 2 ; 3) và có thể tích bé nhất

$$\left(a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}\right)$$

h) Tìm các điểm trên ellip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ gần nhất, xa nhất tới đường thẳng $3x - y - 9 = 0$

i) $z = xy(3 - x - y)$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ (max $z = 1$, min $z = -4$)

k) $z = x^2 + y^2 + x + y$, $x + y + 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$ (max $z = 2$, min $z = -\frac{1}{2}$)

l) $z = x^2 - 9y^2$, trong miền đóng $\frac{x^2}{9} + y^2 \le 1$ (max $z = 9$, min $z = -9$)

m) $z = 4x^2 - y^2$, trong miền đóng $x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$ (max $z = 4$, min $z = -4$)

Thank you and Good bye!