VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

BÀI GIẢNG

GIẢI TÍCH II

(Hệ Kĩ sư tài năng)

Hà Nội - 2014

PGS. TS. Nguyễn Xuân Thảo Email: thao.nguyenxuan@mail.hust.edu.vn

GIẢI TÍCH 2

BÀI 1. CHƯƠNG I.

ỨNG DỤNG PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

§ 1. Hàm vectơ

1.1. Định nghĩa. Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Ánh xạ $t \in I \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là hàm vectơ của biến số t xác định trên I.

Đặt $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$. Quỹ tích điểm $M(x(t); y(t); z(t))$ khi t biến thiên trong I là đường L trong $\mathbb{R}^3$, gọi là tốc đồ của hàm vectơ $\vec{r}(t)$. Ta cũng nói rằng đường L có các phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$.

1.2 Giới hạn. Ta nói rằng hàm vectơ $\vec{r}(t)$ có giới hạn là $\vec{a}$ khi t dần tới t_0 nếu $|\vec{r}(t) - \vec{a}| \to 0$ khi $t \to t_0$, tức là nếu với $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $|t - t_0| < \delta$ $\Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$. Khi đó ta kí hiệu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Hàm vectơ $\vec{r}(t)$ xác định trên I được gọi là liên tục tại $t_0 \in I$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

Nhận xét. Tính liên tục của hàm vectơ $\vec{r}(t)$ tương đương với tính liên tục của các hàm toạ độ

1.3 Đạo hàm. Cho hàm vectơ $\vec{r}(t)$ xác định trên I và $t_0 \in I$. Giới hạn (nếu có) của tỉ số

$$\frac{\Delta \vec{r}}{h} = \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

khi $h \to 0$ được gọi là đạo hàm của $\vec{r}(t)$ tại t_0 và kí hiệu là $\vec{r}'(t_0)$ hay $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$. Khi đó ta nói rằng hàm vectơ khả vi tại t_0.

Ta có $\frac{\Delta \vec{r}}{h} = \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}\vec{i} + \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}\vec{j} + \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h}\vec{k}$

Khi đó nếu các hàm số $x(t),\ y(t),\ z(t)$ khả vi tại t_0 thì hàm vectơ $\vec{r}(t)$ cũng khả vi tại t_0 và có $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$

Đạo hàm cấp cao (tương tự)

Khi h khá nhỏ ta có thể xấp xỉ vectơ $\Delta \vec{r} = \overrightarrow{M_0 M}$ bởi vectơ tiếp tuyến $h.\vec{r}'(t_0)$

Tính chất.

1°/ Tuyến tính $\left(\alpha \vec{f}(t) + \beta \vec{g}(t)\right)' = \alpha \vec{f}'(t) + \beta \vec{g}'(t),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2°/ $\left\langle \vec{f}(t), \vec{g}(t) \right\rangle' = \left\langle \vec{f}(t), \vec{g}'(t) \right\rangle + \left\langle \vec{f}'(t), \vec{g}(t) \right\rangle$

3°/ $\left(\vec{f}(t)\vec{g}(t)\right)' = \vec{f}(t)\vec{g}'(t) + \vec{f}'(t)\vec{g}(t)$

1.4. Tích phân Riemann của hàm vectơ

Cho $\vec{f}(t) = \left(f_1(t), \cdots, f_n(t)\right)$. Ta có $\vec{f}(t)$ khả tích trên [*a* ; *b*] $\Leftrightarrow$ $f_k(t), k = \overline{1, n}$ khả tích trên [*a* ; *b*] và có $\int_a^b \vec{f}(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \cdots, \int_a^b f_n(t)dt\right)$.

Hàm $\vec{F}(t)$ được gọi là nguyên hàm của $\vec{f}(t)$ nếu $\vec{F}'(t) = \vec{f}(t)$, khi đó ta viết

$$\int \vec{f}(t)dt = \vec{F}(t) + C$$

và ta cũng có $\int \vec{f}(t)dt = \left(\int f_1(t)dt, \int f_2(t)dt, \cdots, \int f_n(t)dt\right)$

Ta cũng có công thức Leibnitz $\int_a^b \vec{f}(t)dt = \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$.

Ứng dụng. Tìm khoảng cách xa nhất của viên đạn được bắn ra từ bệ phóng tạo góc α so với mặt nằm ngang và với vận tốc ban đầu v_0

§ 2. Đường trong không gian ba chiều

2.1. Đường cong liên tục, trơn, trơn từng khúc

Tiếp tuyến và pháp diện của đường tại một điểm.

Cho đường cong L trong không gian có phương trình tham số là $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Phương trình vectơ của nó là $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

2.2. Vectơ pháp tuyến của đường

Cho $M_0\left(x(t_0); y(t_0); z(t_0)\right)$ thuộc L, khi đó vectơ $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$ nằm trên tiếp tuyến của L tại M_0. Giả sử các $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ không đồng thời triệt tiêu, khi đó ta có $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$. Do đó điểm $P(X; Y; Z)$ nằm trên tiếp tuyến của L tại M_0 khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{M_0P}$ đồng phương với vectơ $\vec{r}'(t_0)$, tức là

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Đây chính là phương trình tiếp tuyến của L tại M_0.

Đường thẳng đi qua M_0 vuông góc với tiếp tuyến của L tại đó được gọi là pháp tuyến của L tại M_0.

Phương trình pháp diện của đường cong L tại điểm $M_0 \in L$ là

$$\left(X - x(t_0)\right)x'(t_0) + \left(Y - y(t_0)\right)y'(t_0) + \left(Z - z(t_0)\right)z'(t_0) = 0.$$

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

$$x = R\cos^2 t,\ y = R\sin t\cos t,\ z = R\sin t \text{ tại } t = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

$$z = x^2 + y^2,\ x = y \text{ tại điểm } (1;1;2)$$

• **Đường chính quy:** đường chứa gồm toàn các điểm chính quy

• Giả sử đường cong L có tiếp tuyến dương MT tại M, tiếp tuyến dương $M'T'$ tại M'. Đặt $\Delta\alpha = \left(\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{M'T'}\right)$, $\Delta s = \overset{\frown}{MM'}$. Giới hạn (nếu có) của tỉ số $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ khi M' dần đến M trên đường L được gọi là độ cong của đường cong L tại M, kí hiệu là $C(M)$.

Người ta chứng minh được công thức tính độ cong của đường L là

$$C = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

Ví dụ 1. Tính độ cong của đường đinh ốc trụ tròn xoay $x = a\cos wt$, $y = a\sin wt$, $z = akt$

Ví dụ 2. Tính độ cong của đường $x = \ln\cos t$, $y = \ln\sin t$, $z = t\sqrt{2}$ tại $(x\,;y\,;z)$

2.3. Độ dài của đường

Cho đường cong Γ liên tục: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a\,;\,b]$;

phân hoạch π trên $[a\,;\,b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Độ dài đường gấp khúc $l_\pi = \sum_{i=1}^{n} \left|M(t_{i-1})M(t_i)\right|$

Định nghĩa. Cho tập hợp $\{l_\pi : \pi \in P\}$, P là phân hoạch $[a\,;\,b]$, ta bảo Γ khả trường (có độ dài) nếu $l(\Gamma) = \sup\limits_{\pi \in P} l_\pi$

Định lí 1. Nếu ánh xạ $t \mapsto M(t), t \in [a\,;b]$ có đạo hàm $\vec{M}'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$ và $\left|\vec{M}'(t)\right|$ bị chặn trên $[a\,;\,b]$ thì Γ là khả trường.

Định lí 2. Nếu ánh xạ $t \mapsto M(t), t \in [a\,;b]$ có đạo hàm $\vec{M}'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$ liên tục (trơn) trên $[a\,;\,b]$ thì cung Γ khả trường và có độ dài

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

Nhận xét. Khi đường cong Γ trơn từng khúc ($\vec{M}'(t)$ liên tục từng khúc) thì Γ cũng khả trường và có công thức tính như trên.

2.4. Tham số tự nhiên của đường.

Phương trình tự hàm $X = X(s), Y = Y(s)$, s là độ dài cung.

Ví dụ. $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi, \varphi \in [0\,;2\pi]$

$$s = \int_0^{\varphi}\sqrt{x'^2 + y'^2}dt = R\varphi \Rightarrow \begin{cases} X = R\cos\dfrac{s}{R} \\ Y = R\sin\dfrac{s}{R} \end{cases}$$ là phương trình tự hàm

§ 3. Đường cong phẳng

3.1. Tiếp tuyến và pháp tuyến của đường

• **Điểm chính quy.** Trong hệ toạ độ Descarter, cho đường cong L có phương trình $f(x,y) = 0$. Điểm $M_0(x_0\,;y_0) \in L$ được gọi là điểm chính quy nếu $f'_x(x_0\,;y_0)$ và $f'_y(x_0\,;y_0)$ không đồng thời bằng không, là điểm kì dị trong trường hợp còn lại.

• **Vectơ pháp tuyến.** Xét điểm chính quy $M_0(x_0\,;y_0) \in L$, $\vec{n}\left(f'_x(x_0\,;y_0), f'_y(x_0\,;y_0)\right)$, $dM = (dx, dy)$ nằm trên tiếp tuyến của đường cong L tại điểm M_0, do đó $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến L tại M_0 (do có $\vec{n}.dM = 0$).

• **Phương trình tiếp tuyến.** Điểm $P(x, y)$ nằm trên tiếp tuyến của đường cong L tại M_0. Phương trình tiếp tuyến của đường cong L tại M_0 là

$$(x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Ví dụ. Tìm pháp tuyến và phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ tại điểm $(1; \sqrt{3})$.

3.2. Độ cong

Cho đường cong L đơn, có tiếp tuyến tại mọi điểm. Trên đường cong L chọn một chiều làm chiều dương. Trên tiếp tuyến của L tại M, ta chọn một hướng ứng với chiều dương của L, gọi là "tiếp tuyến dương".

Định nghĩa 1. Cho M, M' là hai điểm trên L, còn $MT, M'T'$ là hai tiếp tuyến dương. Ta gọi độ cong trung bình của cung $\overset{\frown}{MM'}$ là tỉ số của góc giữa hai tiếp tuyến dương MT và $M'T'$, được kí hiệu là $C_{tb}\left(\overset{\frown}{MM'}\right)$, tức là $C_{tb}\left(\overset{\frown}{MM'}\right) = \dfrac{\alpha}{\overset{\frown}{MM'}}$, ở đó $\alpha = \left|(MT, M'T')\right|$.

Định nghĩa 2. Ta gọi độ cong của đường L tại M là giới hạn (nếu có) của độ cong trung bình $C_{tb}\left(\overset{\frown}{MM'}\right)$ khi M' dần tới M trên L, kí hiệu là $C(M)$, tức là $C(M) = \lim\limits_{M' \to M} C_{tb}\left(\overset{\frown}{MM'}\right)$.

Ví dụ 1. Đường thẳng có độ cong bằng không tại mọi điểm.

Ví dụ 2. Tính độ cong của đường tròn bán kính R.

Dưới đây ta xây dựng công thức tính độ cong cho đường cong L trong hệ toạ độ Descarter vuông góc có phương trình $y = f(x)$.

$$C(M) = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Khi L được cho bởi phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t)$, sử dụng các công thức $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'^3(t)}$, ta nhận được $C(M) = \dfrac{|x'y'' - y'x''|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$.

Khi L cho bởi phương trình trong toạ độ cực $r = f(\varphi)$, khi đó ta có $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$. Ta có $C(M) = \dfrac{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}}$

Ví dụ 3. Tính độ cong của parabol $y = x^2$.

Ví dụ 4. Tính độ cong của đường Ellip $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Ví dụ 5. Tính độ cong của đường $r = ae^{b\varphi},\ a > 0,\ b > 0$.

3.3. Đường tròn chính khúc, khúc tâm

Tại mỗi điểm M của đường L, vẽ pháp tuyến hường về phía lõm của L, trên đó lấy một điểm I sao cho $MI = \dfrac{1}{C(M)}$. Đường tròn tâm I bán kính $R = \dfrac{1}{C(M)}$ được gọi là đường tròn chính khúc của L tại M. Nó tiếp xúc với L tại M vì nó có chung với L đường tiếp tuyến và có cùng độ cong $C(M) = \dfrac{1}{R}$ với L tại M. Tâm của đường tròn chính khúc này gọi là khúc tâm, bán kính $R = \dfrac{1}{C(M)}$ của nó được gọi là khúc bán kính.

• Cách tính toạ độ khúc tâm $I(X, Y)$:

Nếu $L : y = f(x)$ thì có: $X = x - \dfrac{y'\left(1 + y'^2\right)}{y''}$, $Y = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}$.

Nếu L được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$ thì có

$$X = x - \frac{y'\left(x'^2 + y'^2\right)}{x'y'' - y'x''},\ Y = y + \frac{x'\left(x'^2 + y'^2\right)}{x'y'' - y'x''}$$

Ví dụ 1. Đường tròn chính khúc của đường tròn bán kính R là chính nó.

Ví dụ 2. Đường thẳng không có đường tròn chính khúc. Điều này là hiển nhiên vì đường thẳng có độ cong bằng 0.

Ví dụ 3. Viết phương trình đường tròn chính khúc với đường $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $(1;1)$.

3.4. Đường túc bế, đường thân khai

Định nghĩa. Ta gọi quỹ tích các khúc tâm của đường L (nếu có) là đường túc bế của đường L.

Ví dụ 1. Lập phương trình túc bế của đường $y = x^{3/2}$.

Ví dụ 2. Tìm đường túc bế của parabol $y^2 = 2px,\ p > 0$.

Ví dụ 3. Viết phương trình đường túc bế của ellip $x = a\cos t, y = b\sin t$.

Định nghĩa. Cho Γ là đường túc bế của đường L, khi đó L được gọi là đường thân khai của Γ.

Từ các ví dụ trên ta có

- đường $y = x^{3/2}$ là đường thân khai của đường $X = -\frac{9}{2}x^2 - 2x, Y = \frac{4}{3}\sqrt{x}(3x+1)$
- Parabol $y^2 = 2px$ là đường thân khai của đường $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$
- Ellip $x = a\cos t, y = b\sin t$ là đường thân khai của đường $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$

Tính chất 1. Pháp tuyến tại mỗi điểm $M(x;y)$ của đường L là tiếp tuyến của đường túc bế Γ của L tại khúc tâm I ứng với M

Tính chất 2. Độ dài một cung trên đường Γ bằng trị số tuyệt đối của hiệu các khúc bán kính của đường thân khai L của nó tại hai mút của cung ấy, nếu dọc theo cung này khúc bán kính biến thiên đơn điệu.

Từ tính chất này ta nhận thấy đường thân khai của đường L là quỹ tích của một điểm A trên nửa đường thẳng MA tiếp xúc với L tại M khi nửa đường thẳng này lăn không trượt trên Γ.

3.5. Hình bao của một họ đường cong phụ thuộc tham số

Cho một họ đường cong L phụ thuộc một hay nhiều tham số. Nếu mọi đường cong của họ L đều tiếp xúc với một đường E và ngược lại tại mỗi điểm của đường E có một đường của họ *L* tiếp xúc với *E* tại điểm ấy thì *E* được gọi là hình bao của họ đường cong *L*.

Ví dụ 1. Họ đường tròn một tham số *c*: $(x - c)^2 + y^2 = R^2$, với bán kính *R*

Ví dụ 2. Họ đường thẳng một tham số $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0$.

Ví dụ 3. Họ đường thẳng một tham số: $y - cx = 0$, *c* là tham số.

Ví dụ 4. Đường túc bế của một đường *L* là hình bao của họ các đường pháp tuyến của *L* (Xem tính chất 1 của đường túc bế). Do đó đường túc bế của *L* còn được gọi là đường pháp bao của *L*.

Định lí. Cho họ đường $F(x, y, c) = 0$ phụ thuộc tham số *c*. Nếu các đường của họ ấy không có điểm kì dị, thì hình bao *E* của họ này được xác định bằng cách khử *c* từ hai phương trình $\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$.

Chú ý. Nếu họ đường cong $F(x, y, c) = 0$ có điểm kì dị thì hệ trên gồm cả phương trình hình bao *E* và quỹ tích các điểm kì dị. Hình bao không lấy những điểm kì dị

Ví dụ 1. Tìm hình bao của họ đường thẳng $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0$.

Ví dụ 2. Tìm hình bao của họ parabol bán lập phương $(y - c)^2 = (x - c)^3$

Ví dụ 3. Xét họ quỹ đạo của viên đạn bắn từ một khẩu pháo với vận tốc v_0, phụ thuộc vào góc bắn α. Trong hệ trục toạ độ Descarter, phương trình chuyển động của viên đạn là $\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha \end{cases}$,

ở đó *g* là gia tốc trọng trường.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH 2
BÀI 2.
§ 4. Mặt trong $\mathbb{R}^3$

Điểm M_0 trên mặt S được gọi là điểm chính quy nếu tại đó có các đạo hàm riêng $F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)$ và chúng không đồng thời bằng không. Một điểm không chính quy gọi là điểm kì dị.

Định lí. Tập hợp tất cả các tiếp tuyến của mặt S tại điểm chính quy M_0 là một mặt phẳng đi qua M_0.

• Phương trình pháp tuyến của mặt S tại điểm chính quy M_0 là

$$\frac{X-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{Y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{Z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

• Phương trình tiếp diện của mặt S: $F(x, y, z) = 0$, tại M_0 là

$$F'_x(M_0)(X-x_0)+F'_y(M_0)(Y-y_0)+F'_z(M_0)(Z-z_0)=0$$

Nói riêng khi mặt S có phương trình $z = f(x, y)$ thì phương trình tiếp diện và pháp tuyến với S tại điểm chính quy $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ lần lượt là

$$(X-x_0)f'_x(M_0)+(Y-y_0)f'_y(M_0)-(Z-z_0)=0;$$

$$\frac{X-x_0}{f'_x(M_0)}=\frac{Y-y_0}{f'_y(M_0)}=\frac{Z-z_0}{-1}.$$

Nếu mặt S có phương trình tham số $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$, $(u, v) \in D$. Khi đó phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt S tại điểm chính quy $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ lần lượt là

$$(X-x_0)A+(Y-y_0)B+(Z-z_0)C=0;$$

$$\frac{X-x_0}{A}=\frac{Y-y_0}{B}=\frac{Z-z_0}{C}$$

ở đó $A=\begin{vmatrix} y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} z'_u(M_0) & x'_u(M_0) \\ z'_v(M_0) & x'_v(M_0) \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} x'_u(M_0) & y'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) \end{vmatrix}$

• Vectơ pháp tuyến của mặt S tại M_0 là $\vec{N}(A;B;C)$.

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $z = x^2 + y^2$ tại điểm $M(1 ; –2 ; 5)$.

Ví dụ 2. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ tại điểm $M_0(3 ; 4 ; 5)$.

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong

$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=r\cot\alpha$ tại (r,φ)

CHƯƠNG II.
TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§ 1. Tích phân phụ thuộc tham số trên một đoạn

1.1. Khái niệm.

Định nghĩa. Cho $K(x, t)$ bị chặn: $x \in [c ; d]$, $t \in [a ; b]$ và khả tích theo t trên $[a ; b]$, khi đó ta gọi $I(x) = \int_a^b K(x,t)dt$ là tích phân phụ thuộc tham số x.

Ví dụ 1. $I(x) = \int_0^1 te^{xt}dt$, $x \in [1 ; 2]$

Ví dụ 2. $I(x) = \int_a^b t\sin xt\, dt$, $x \in [c ; d]$, $cd > 0$.

Ví dụ 3. $I(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+x^2t^2}$, $x \in [1 ; 2]$

1.2. Tính liên tục, khả vi, khả tích

Định lí 1. (Leibnitz). Cho $K(x, t)$ liên tục trên hình chữ nhật D: $a \le t \le b$, $c \le x \le d$ thì

1°/ $I(x)$ liên tục trên $[c ; d]$

2°/ $I(x)$ khả tích trên $[\alpha ; \beta] \subset [c ; d]$ và có $\int_\alpha^\beta I(x)dx = \int_a^b dt \int_\alpha^\beta K(x,t)dx$

3°/ Nếu có $\frac{\partial}{\partial x}K(x,t)$ liên tục trên D thì có $I'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}K(x,t)dt$.

Ta vận dụng định lí trên để tính một số tích phân phụ thuộc tham số sau

Ví dụ 1. Tính $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx,\ a, b > 0$

Ví dụ 2. Tính $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx,$

Ví dụ 3. Tính $I_n(a) = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}, a \ne 0, 0 \ne n \in \mathbb{N}$

Ví dụ 4. Tính $I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)dx,\ a,b > 0$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH 2

BÀI 3.

§ 2. Tích phân phụ thuộc tham số với cận là hàm số

2.1. Định nghĩa.

Cho $K(x, t)$ liên tục trên hình chữ nhật D: $a \le t \le b$, $c \le x \le d$, các hàm $\alpha(x)$, $\beta(x)$ liên tục trên $[c ; d]$ thoả mãn $a \le \alpha(x) \le b$, $a \le \beta(x) \le b$, ta gọi $I(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)dt$ là tích phân phụ thuộc tham số với cận là hàm số.

2.2. Tính liên tục, khả vi

Định lí 2. Cho $K(x, t)$ liên tục trên hình chữ nhật D: $a \le t \le b$, $c \le x \le d$, các hàm $\alpha(x)$, $\beta(x)$ liên tục trên $[c ; d]$ thoả mãn $a \le \alpha(x)$, $\beta(x) \le b$, thì ta có

1°/ $I(x)$ liên tục trên $[c ; d]$

2°/ Nếu thêm $\frac{\partial}{\partial x}K(x,t)$ liên tục trên D, các hàm $\alpha(x), \beta(x)$ khả vi , thì có $I(x)$ khả vi trên $[c ; d]$ và có

$$I'(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x}K(x,t)dt + \beta'(x)K(x, \beta(x)) - \alpha'(x)K(x, \alpha(x))$$

Ví dụ 1. Cho $I(x) = \int\limits_{x}^{1+x^2} \frac{dt}{1+t^2+x^3}$

Ví dụ 2. Xét tính khả vi và tính đạo hàm $I(x) = \int\limits_{\sin y}^{\cos y} e^{yx^2}dx$

§ 3. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

3.1. Hội tụ đều

Định nghĩa. Ta gọi $I(x) = \int\limits_{a}^{+\infty} K(x,t)dt$ là tích phân phụ thuộc tham số x nếu nó hội tụ với mọi $x \in [c ; d]$.

Tương tự có thể xét $\int\limits_{-\infty}^{b} K(x,t)dt$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x,t)dt$

Định nghĩa. $I(x)$ được gọi là hội tụ đều trên $[c ; d]$ nếu như $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$, $\forall b > N(\varepsilon)$, $\forall x \in [c ; d] \Rightarrow \left|\int\limits_{b}^{\infty} K(x,t)dt\right| < \varepsilon$.

3.2. Tiêu chuẩn Cauchy

Định lí (tiêu chuẩn Cauchy). $I(x)=\int\limits_0^{\infty}K(x,t)dt$ hội tụ đều trên $[c\,;d] \Leftrightarrow \exists\, b_0$ để có

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}K(x,t)dt\right|<\varepsilon,\ \forall\, b_1, b_2 > b_0,\ \forall\, x\in[c\,;d].$$

3.3. Dấu hiệu Weierstrass. Cho:

- $|K(x,t)|\le F(t),\ \forall x\in[c\,;d],\ \forall t\ge b\ge a$, $F(t)\ge 0$ và khả tích
- $\int\limits_a^{+\infty}F(t)dt$ hội tụ.

Khi đó $\int\limits_a^{+\infty}K(x,t)dt$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[c\,;d]$.

Ví dụ 1. CMR $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin tx}{a^2+t^2}dt$ hội tụ đều trên R

Ví dụ 2. Xét tính hội tụ đều của $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}x^t dt,\quad a>0, t\in[0,a]$

Ví dụ. Chứng minh rằng $\int\limits_0^{\infty}e^{-yx^2}dx$ hội tụ đều trên $(t_0;+\infty), t_0>0$.

3.4. Tiêu chuẩn Dirichlet. Cho

- $\left|\int\limits_a^{b}K(x,t)dt\right|<C_0,\ \forall\ b>a,\ \forall\ x\in[c\,;d],\ \exists\ C_0>0$
- $\varphi(x, t)$ hội tụ đều theo x đến 0 khi khi $t\to\infty$ và đơn điệu theo t với mỗi x cố định thuộc $[c\,;d]$.

Khi đó $\int\limits_a^{\infty}K(x,t)\varphi(t,x)dt$ hội tụ đều trên $[c\,;d]$

Ví dụ 1. Xét tính hội tụ đều $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\sin xt}{\sqrt{t}}dt$, $x\in[x_0\,;+\infty)$, $x_0>0$.

Ví dụ 2. CMR $\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$, $t \geq 0$

3.5. Tiêu chuẩn Abel. Giả thiết rằng:

1°/ $\int\limits_a^{+\infty} K(x,t)dt$ hội tụ đều trên $[c\ ;\ d]$

2°/ $|\varphi(x,t)| \leq C_0$, $\exists\ C_0 > 0$, $\forall\ t \geq a$, $\forall\ x \in [c\ ;\ d]$, và với mỗi x cố định ta có hàm $\varphi(x, t)$ đơn điệu theo t.

Khi đó ta có $\int\limits_a^{\infty} K(x,t)\varphi(t, x)dt$ hội tụ đều trên $[c\ ;\ d]$.

Ví dụ 1. Xét tính hội tụ đều $\int\limits_0^{\infty} e^{-tx}\frac{1}{x^2+\sqrt{t}}dt$, $x \in [x_0\ ;\ +\infty)$, $x_0 > 0$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH 2
BÀI 4.

§ 3. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số (TT)

3.6. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số khác

3.6.1. Tính tich phân Dirichlet

a) Định nghĩa $I(y)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{x}dx,\ y\in\mathbb{R}$

hàm $f(x,y)=\frac{\sin(yx)}{x}$ xác định trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ở đó $f(0,y)=y$

b) Các tính chất.

1°/ $I(y)$ hội tụ đều trên $[\alpha ; \beta]$, với $\beta \geq \alpha > 0$ (hoặc $\beta \leq \alpha < 0$)

2°/ $I(y)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y$

3.7. Tính liên tục

Bổ đề. Cho $I(y)=\int\limits_a^{\infty}f(x,y)dx$ hội tụ đều trên tập U và dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $a_n > a$, $\forall\ n$. Khi đó dãy hàm $\varphi_n(y)=\int\limits_a^{a_n}f(x,y)dx$ hội tụ đều về hàm số $I(y)$ trên U.

Định lí 1. Cho hàm f liên tục trên $[a, \infty) \times [\alpha ; \beta]$ và tích phân $I(y)=\int\limits_a^{\infty}f(x,y)dx$ hội tụ đều trên $[\alpha ; \beta]$. Khi đó hàm $I(y)$ liên tục trên $[\alpha ; \beta]$.

Hệ quả. f liên tục và dương trên miền $[a ; \infty) \times [\alpha ; \beta]$, tích phân $\int\limits_a^{\infty}f(x,y)dx$ hội tụ tới hàm liên tục $I(y)$ trên $[\alpha ; \beta]$. Khi đó ta có tích phân trên hội tụ đều.

3.8. Tính khả vi

Định lí. Giả thiết rằng

1°/ Hàm f liên tục và có đạo hàm riêng f'_y liên tục trên miền $[a ; \infty) \times [\alpha ; \beta]$

2°/ Tích phân $I(y)=\int\limits_a^{\infty}f(x,y)dx$ hội tụ trên $[\alpha ; \beta]$

3°/ Tích phân $\int\limits_a^{\infty}f'(x,y)dx$ hội tụ đều trên $[\alpha ; \beta]$

Khi đó hàm *I*(*y*) khả vi trên [α ; β] và đạo hàm được tính theo công thức $I'(y)=\int_a^{\infty} f'_y(x,y)\,dx$

3.9. Tính khả tích

Định lí. Cho

1°/ Hàm *f* liên tục trên miền [*a* ; ∞) × [α ; β]

2°/ Tích phân $I(y)=\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ hội tụ đều trên [α ; β]

Khi đó *I*(*y*) khả tích trên [α ; β] và có $\int_{\alpha}^{\beta} dy\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_a^{\infty} dx\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dy$

Hệ quả. Cho

1°/ *f* liên tục, dương trên miền [*a* ; ∞) × [α ; ∞)

2°/ Các tích phân $J(x)=\int_{\alpha}^{\infty} f(x,y)\,dy$, $I(y)=\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ hội tụ tới các hàm liên tục

Khi đó nếu một trong các tích phân sau tồn tại $\int_a^{\infty} dx\int_{\alpha}^{\infty} f(x,y)\,dy$, $\int_{\alpha}^{\infty} dy\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$

thì tích phân còn lại cũng tồn tại và chúng bằng nhau.

3.10. Một số ví dụ.

a) Xét sự tồn tại, khả vi của các hàm $f_{\alpha}(x)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}e^{ixt}\,dt$

b) Tính $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,dx,\ a,b>0$

c) Tính $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx\,dx,\ a,b>0$

d) Tính $\int_0^{\infty}\frac{\arctan ax}{x(1+x^2)}\,dx,\ a>0$

e) Tính $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos mx\,dx,\ a>0$

§ 4. Các tích phân Euler

4.1. Tích phân Euler loại 1

a) Định nghĩa. Tích phân Euler loại 1 (hay gọi là hàm Beta) là tích phân phụ thuộc hai tham số dạng $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\ p>0,\ q>0$

b) Tính chất

1°/ *B*(*p*, *q*) hội tụ với *p* > 0, *q* > 0.

2°/ *B*(*p*, *q*) hội tụ đều trên miền $[p_0 ; p_1] \times [q_0 ; q_1]$, ở đó $p_1 > p_0 > 0$, $q_1 > q_0 > 0$

3°/ Hàm $B(p, q)$ liên tục

4°/ Hàm Beta có tính đối xứng

5°/ Công thức truy hồi: $B(p+1, q+1) = \dfrac{q}{p+q+1} B(p+1, q) = \dfrac{p}{p+q+1} B(p, q+1)$.

Nói riêng $B(1, 1) = 1$, $B(p + 1, 1) = \dfrac{1}{p+1}$

$$B(p+1, n) = \frac{n!}{(p+n)(p+n-1)\cdots(p+2)} B(p+1, 1) = \frac{n!}{(p+n)(p+n-1)\cdots(p+1)}$$

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!} B(1, 1) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

4.2. Tích phân Euler loại 2

a) Định nghĩa. Tích phân Euler loại 2 (hay còn gọi là hàm Gamma) là tích phân phụ thuộc một tham số có dạng $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \; p > 0$

b) Tính chất

1°/ $\Gamma(p)$ hội tụ với mọi $p > 0$, và hội tụ đều trên miền $[p_0 \,;\, p_1]$ với $p_1 > p_0 > 0$

2°/ $\Gamma(p)$ liên tục

3°/ Công thức truy hồi $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall x > 0$

$$\Gamma(n + p) = (n + p - 1)(n + p - 2) \ldots p\,\Gamma(p).$$

Nói riêng $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(n + 1) = n!$; $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$

4°/ Liên hệ với $B(p, q)$: $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

4.3. Một số ví dụ tính tích phân nhờ hàm Gamma và Beta

Ví dụ 1. Tính $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}(t-x)t^{x-1} \ln t \, dt$ $\qquad (\Gamma(x))$

Ví dụ 2. Tính $\displaystyle\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx$, a>0 $\qquad \left(\dfrac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)\right)$

Ví dụ 3. Tính $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta \, d\theta$, $p, q > 0$ $\qquad \left(\dfrac{1}{2} B(q, p)\right)$

Ví dụ 4. Tính $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2p-1}(1-x)^{2q-1}}{(1+x^2)^{p+q}} dx$, $p, q > 0$ $\qquad (2^{p+q-2} B(p, q))$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH 2
BÀI 5
CHƯƠNG III. TÍCH PHÂN BỘI
A. TÍCH PHÂN HAI LỚP (TÍCH PHÂN KÉP)

3.0. Tính thể tích bằng tích phân lặp

• Đã biết công thức tính thể tích vật thể trong Giải tích I: $V = \int_a^b S(x)dx$ (0.1)

• Diện tích tiết diện thẳng $S(x)$ được tính như sau:

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \qquad (0.2)$$

• Thay (0.2) vào (0.1) ta có

$$V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Ví dụ 1. Tính tích phân lặp $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} 2ydy \right) dx$

Ví dụ 2. Sử dụng tích phân lặp tính thể tích tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng

$$x + y + z = 1.$$

3.1. Tích phân hai lớp trên hình chữ nhật đóng

3.1.1. Định nghĩa

a) Phân hoạch π chia hình chữ nhật $R = [a ; b] \times [c ; d]$ thành hữu hạn các hình chữ nhật đóng, đôi một không có phần trong chung và có $|R| = \sum_{i=1}^{n} \Delta R_i$,

ΔR_i là diện tích hình chữ nhật thứ i, $|R|$ là diện tích hình chữ nhật R;
d_i là đường chéo hình chữ nhật ΔR_i, $d(\pi) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$

b) Tổng tích phân

$$\sigma = \sigma(f, \pi, p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta R_i,\ p_i(\xi_i, \eta_i),$$

Hàm f(x,y) xác định và bị chặn trên R

c) Các tổng Đacbu

• Tổng Đacbu dưới: $s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta R_i$

• Tổng Đacbu trên: $S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta R_i$, ở đó

$$m_i = \inf_{\Delta R_i} f(x, y), M_i = \sup_{\Delta R_i} f(x, y),$$

thì có

$$m|R| \le s(\pi) \le \sigma(f, \pi, p_1, ..., p_n) \le S(\pi) \le M|R|$$

d) Tổng trên không tăng, tổng dưới không giảm

• Ta bảo phân hoạch π' mịn hơn π nếu mỗi hình chữ nhật trong phân hoạch π' luôn nằm trong hình chữ nhật nào đấy của phân hoạch π

• Khi π' mịn hơn π, ta có $s(\pi) \le s'(\pi) \le S'(\pi) \le S(\pi)$.

e) Dãy chuẩn tắc các phép phân hoạch

Cho $\{\pi_n\}$ là dãy các phân hoạch hình chữ nhật R. Dãy $\{\pi_n\}$ được gọi là chuẩn tắc nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi_n) = 0$.

f) Định nghĩa tích phân kép

Cho f xác định trên hình chữ nhật đóng R, Nếu có $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f, \pi, p_1, \ldots, p_n) \equiv$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta R_i = I$ (số thực hữu hạn) với mọi dãy chuẩn tắc

$$\{\pi_n\}: \pi_n = \{\Delta R_1, \Delta R_2, ..., \Delta R_{p_n}\},$$

với mọi cách chọn điểm $p_i = (\xi_i ; \eta_i) \in \Delta R_i$, thì ta có hàm f khả tích trên R và viết $\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy = I$.

3.1.2. Điều kiện khả tích

Định lí 1. Hàm f khả tích trên R đóng $\Rightarrow$ f bị chặn

Định nghĩa. $\{\pi_n\}$ là dãy chuẩn tắc bất kì. Ta gọi $\lim\limits_{n\to\infty} s(\pi_n)$ ($\lim\limits_{n\to\infty} S(\pi_n)$) là tích phân dưới hai lớp (tích phân trên hai lớp) và kí hiệu là $\underline{\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy}$ ($\overline{\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy}$)

Định lí 2. Ta có

1°/ $s(\pi) \le \underline{\iint\limits_R f(x,y)dxdy} \le \overline{\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy} \le S(\pi)$

2°/ $\sup\limits_{P(R)} s(\pi) = \underline{\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy}$, $\inf\limits_{P(R)} S(\pi) = \overline{\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy}$,

$\mathcal{P}(R)$ là tập tất cả các phân hoạch của R.

Định lí 3.

Cho f bị chặn trên $\bar{R}$. Khi đó f khả tích trên R

$$\Leftrightarrow \underline{\iint_R f(x,y)dxdy} = \overline{\iint_R f(x,y)dxdy}$$

Định lí 4. Cho f bị chặn trên $\bar{R}$. Khi đó f khả tích trên $R \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, bé tuỳ ý, $\exists$ phân hoạch π của R sao cho $S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$

Định lí 5. f liên tục trên $\bar{R}$ thì f khả tích trên R.

Định lí 6. f xác định và bị chặn trên $\bar{R}$, có f liên tục trên $R \setminus E$, ở đó $E \subset R$ và $|E| = 0$ $\Rightarrow f$ khả tích trên R.

3.2. Độ đo Peanno – Jourdan

• **Độ đo.** Tìm lớp $M \subset \mathbb{R}^2$ để $\forall A \subset M$ có độ đo là $m(A)$ thoả mãn:

1°/ $0 \le m(A) \le +\infty$

2°/ Mọi hình chữ nhật $\Delta \in M$ và có $m(\Delta) = |\Delta|$

3°/ Mọi $A, B \in M$, rời nhau thì có

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

• **Độ đo Peanno – Jordan.** Cho $A \subset \mathbb{R}^2$, ta gọi độ đo ngoài của nó là $m^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i \supset A\right\}$, ở đó Δ_i là những hình chữ nhật.

Nếu $A \subset \Delta_0$ nào đó thì ta gọi độ đo trong của nó là

$$m_*(A) = |\Delta_0| - m^*(\Delta_0 \setminus A).$$

Tập A được gọi là đo được $\Leftrightarrow m^*(A) = m_*(A)$ và khi đó ta định nghĩa $m(A) = m^*(A) = m_*(A)$

Độ đo Peanno-Jordan thoả mãn các tiên đề về độ đo.

3.3. Tích phân hai lớp trên tập hợp bị chặn

a) Định nghĩa. R là hình chữ nhật đóng, tập bị chặn $D \subset R$, hàm f gọi là xác định trên D, và

$$f_0(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Nếu f_0 khả tích trên R thì ta bảo f khả tích trên D và định nghĩa

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R f_0(x,y)dxdy$$

Định lí 7. D giới nội trong R, f bị chặn, $f \geq 0$ trên D. Nếu f khả tích trên D thì tập

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\} \text{ (vật thể hình trụ)}$$

đo được theo nghĩa Jordan trong $\mathbb{R}^3$ và thể tích của A là $|A| = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$

Định lí 8. Tập D giới nội trong $\mathbb{R}^2$, $X_D(x, y) = 1$, $(x, y) \in D$. Tập D đo được theo nghĩa Jordan $\Leftrightarrow$ X_D khả tích trên D, khi đó ta có $|D| = \iint\limits_D X_D(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D dx\,dy$

Hệ quả 1. Tập D bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ thì D đo được theo nghĩa Jordan $|\partial D| = 0$

Hệ quả 2. Hàm số $f : [a\,;\,b] \to \mathbb{R}$ khả tích trên đoạn $[a\,;\,b]$ thì đồ thị Γ của f có diện tích 0.

Hệ quả 3. D giới nội trong $\mathbb{R}^2$, ∂D là hợp của hữu hạn cung được xác định bởi các hàm số liên tục thì D là tập hợp đo được.

Miền giới nội trong $\mathbb{R}^2$ thoả các điều kiện của Hệ quả 3 được gọi là miền chính quy trong $\mathbb{R}^2$

b) Tính chất

1°/ Cộng tính. $D = D_1 \cup D_2$ bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, $|D_1 \cap D_2| = 0$, f khả tích trên D_1, D_2 $\Rightarrow$ f khả tích trên D và có

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy$$

2°/ Tuyến tính. D bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, f, g khả tích trên D $\Rightarrow$ $\alpha f + \beta g$ khả tích trên D và có $\iint\limits_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,dx\,dy$

$$= \alpha \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_D g(x, y)\,dx\,dy, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3°/ Bảo toàn thứ tự. Hai hàm f, g khả tích trên tập bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$, và có $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$. Khi đó

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \leq \iint\limits_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

Hệ quả 4. Nếu $m \leq f(x, y) \leq M$, $\forall (x, y) \in D$, thì có

$$m|D| \leq \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \leq M|D|$$

Hệ quả 5. $\left|\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy\right| \leq \iint\limits_D |f(x, y)|\,dx\,dy$

4°/ Khả tích.

Định lí 9. D là tập đo được trong $\mathbb{R}^2$, f liên tục, bị chặn trên $D \Rightarrow f$ khả tích trên D.

Định lí 10.

$|D| = 0$, f bị chặn trên $D \Rightarrow \iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = 0$.

Định lí 11. g bị chặn trên D, f khả tích trên D, $|E| = 0$, $E \subset D$, $g(x, y) = f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D \setminus E \Rightarrow g$ khả tích trên D và có $\iint\limits_D g(x, y)dx\,dy = \iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$

5°/ Các định lí giá trị trung bình

Định lí 12. D là tập hợp đo được, f khả tích trên D và có $m \le f(x, y) \le M$, $\forall (x, y) \in D$.

Khi đó $\exists\ \mu \in [m, M]$ sao cho $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = \mu|D|$

Định lí 13. Cho D đóng, đo được, liên thông, f liên tục trên $D \Rightarrow \exists\ p(\xi, \eta) \in D$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = f(p)|D|.$$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH 2
BÀI 6

A. TÍCH PHÂN HAI LỚP (TÍCH PHÂN KÉP) (TT)

3.4. Đưa tích phân hai lớp về tích phân lặp

a) Định lí Fubini trên hình chữ nhật. *f* khả tích trên hình chữ nhật $R=[a\,;b]\times[c\,;d]$

1°/ Nếu tồn tại $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ với *x* cố định ∈ [*a* ; *b*] ⇒ $\varphi(x)=\int\limits_c^d f(x,y)dy$ khả tích trên [*a* ; *b*] và có $\iint\limits_R f(x,y)dx\,dy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$ (4.1)

2°/ ∃ $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, với *y* cố định thuộc [*c* ; *d*] ⇒ $\psi(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ khả tích trên [*c* ; *d*] và có $\iint\limits_R f(x,y)dx\,dy=\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy$ (4.2)

Nói riêng, nếu có *f* liên tục trên *R* thì ta có đồng thời (4.1), (4.2)

Ví dụ 1. $\iint\limits_R (x+y)^2\,dx\,dy$, *R* = [0 ; 1]×[0 ; 2]

Ví dụ 2. $\iint\limits_R \frac{x^2dx\,dy}{1+y^2}$, *R* = [0 ; 1]×[0 ; 1]

b) Định lí Fubini trên tập hợp bị chặn

1°/ φ_1, φ_2 khả tích trên [*a* ; *b*], $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, ∀*x* ∈ [*a* ; *b*],

$D=\{(x\,;y): a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$

f khả tích trên *D*, ∃ $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, ∀*x* cố định thuộc [*a* ; *b*].

Khi đó, $\varphi(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ khả tích trên [*a* ; *b*] và có

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (4.3)$$

Nói riêng, nếu φ_1, φ_2 liên tục trên [*a* ; *b*], *f* liên tục trên *D* thì vẫn đúng

2°/ ψ_1, ψ_2 khả tích trên [*c* ; *d*], $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, ∀*y* ∈ [*c* ; *d*],

$D = \{(x ; y): c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

f khả tích trên D và $\exists \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$, $\forall$ y cố định thuộc $[c ; d]$.

Khi đó $\psi(y) = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$ khả tích trên $[c ; d]$ và có

$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \qquad (4.4)$$

Nói riêng, nếu ψ_1, ψ_2 liên tục trên $[c ; d]$, f liên tục trên D thì vẫn đúng

Ví dụ 1. $\iint\limits_D (x^2 + y)dx\,dy$, D: $y^2 = x$, $y = x^2$.

Ví dụ 2. $\iint\limits_D \sqrt{4x^2 - y^2}dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = 0$, $y = x$.

Ví dụ 3. $\iint\limits_D |\cos(x + y)|dx\,dy$, D: $[0 ; \pi] \times [0 ; \pi]$

Ví dụ 4. $\iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}dx\,dy$, D: $[-1 ; 1] \times [0 ; 2]$

Ví dụ 5. Đổi thứ tự tính tích phân $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$

Ví dụ 6. Tính $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 e^{-x^2}dx$

3.5. Đổi biến trong tích phân 2 lớp.

a) Đổi biến

Định lí 1. Tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$, D là tập con đo được, compact của U, ánh xạ φ: $U \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$, ở đó

• x, y khả vi liên tục

• $\varphi_{|D^\circ}$ là đơn ánh

• Định thức Jacobi $J(u,v) = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} \ne 0$ trên D°.

Khi đó

• $\varphi(D)$ là tập compact đo được

• Nếu $f : \varphi(D) \to R$ liên tục trên $\varphi(D)$ thì có

$$\iint_{\varphi(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f\big(x(u, v), y(u, v)\big)\left|J(u, v)\right| du\,dv$$

Ví dụ 1. Tính $\iint_D x\sin(x+y)\,dx\,dy$, $D: 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le x$

Ví dụ 2. Tính $\iint_D (2-x-y)^2\,dx\,dy$, D: $0 \le x \le 1$, $-x \le y \le x$

Ví dụ 3. Tính $\iint_D \arcsin\sqrt{x+y}\,dx\,dy$, $D: \left\{\begin{matrix} x+y=0, y=-1 \\ x+y=1, y=0 \end{matrix}\right\}$

Ví dụ 4. Tính $\iint_D dx\,dy$, D: $y = x$, $y = 4x$, $xy = 1$, $xy = 2$.

b) Đổi biến trong toạ độ cực

Cho ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\theta, r) \mapsto (x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Ta có $J(\theta, r) = \dfrac{D(x, y)}{D(\theta, r)} = \begin{vmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -r$.

Dễ thấy φ không là song ánh, tuy nhiên thu hẹp của φ trên $A = (\alpha\,;\,\alpha + 2\pi) \times (0\,;\,+\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ là song ánh từ $A \to \mathbb{R}^2 \setminus (0\,;0)$.

Nếu D là tập compact đo được sao cho Int$D \subset U_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ thì thu hẹp của φ trên Int$D$ là đơn ánh và $J(\theta, r) \ne 0$ trên Int$D$. Khi đó với hàm số liên tục tuỳ ý $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ ta luôn có $\iint_{\varphi(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

Ví dụ 1. $I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, D: $x^2 + y^2 \le 1$.

Ví dụ 2. $I = \iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.

Ví dụ 3. $I = \iint_D \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

Ví dụ 4. $I = \iint_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, D : $\{x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$

Ví dụ 5. $I = \iint_D \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)^2}}\,dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{2} + y^2 \le 1$

c) Tích phân hai lớp trên tập đối xứng

Cho $D = D_1 \cup D_2$, $D_2 = \mathbb{S}\,(D_1)$, các tập D_1, D_2 đo được và $|D_1 \cap D_2| = 0$, $\mathbb{S}$ là phép đối xứng

1°/ Nếu $f(S(x, y)) = f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$ thì có $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = 2\iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy$

2°/ Nếu $f(S(x, y)) = -f(x, y)$ thì có $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = 0$

Ví dụ 1. Tính $I = \iint\limits_D \left(x^2 - y^2\right)dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$

Ví dụ 2. Tính

$$I = \iint\limits_D \left(x^5 - y^5\right)dx\,dy,\ D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

3.6. Tính thể tích vật thể

$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y), (x, y) \in D\right\}$

$V = |B| = \iint\limits_D \left[\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)\right]dxdy$

Ví dụ 1. Tính thể tích vật thể

a) ellipxoit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$

+) $V = 2c\iint\limits_D \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy$

+) $x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi abc$

b) $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0$ ($\dfrac{48\sqrt{6}}{5}$)

c) $2az \ge x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

d) $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$

e) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$

f) $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $(x \ge 0,\ y \ge 0)$, $z = 0$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH 2

BÀI 7

TÍCH PHÂN HAI LỚP (TT)

3.7. Diện tích mặt cong

a) Mặt cong tham số trơn.

• **Mặt cong tham số:** U là miền (mở và liên thông) trong $\mathbb{R}^2$, mặt cong tham số Σ:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in U.$$

• **Mặt trơn:** Mặt cong Σ trơn $\Leftrightarrow$:

1°/ Các hàm x, y, z có các đạo hàm riêng liên tục trên U

2°/ Hai vectơ $\overrightarrow{M}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$, $\overrightarrow{M}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$ là độc lập tuyến tính, $\forall\ (u, v) \in U$

• **Mặt đơn.** Mặt cong Σ là đơn $\Leftrightarrow$ ánh xạ

$(u, v) \mapsto M(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ là đơn ánh

b) Mặt trơn với biểu diễn tham số

Cho mặt cong với tham số Σ: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in U$, $U \subset \mathbb{R}^2$

Pháp tuyến của mặt Σ tại điểm $M(u, v)$ là

$\overrightarrow{N}(u,v) = (A,B,C)$, ở đó $A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$

Hay $\overrightarrow{N}(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$

Hàm số sau liên tục $(u,v) \mapsto \left\|\overrightarrow{N}(u,v)\right\| \equiv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

c) Diện tích mặt cong. Cho mặt cong tham số Σ đơn, trơn $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in U$, U là miền trong $\mathbb{R}^2$.

Định nghĩa. Số thực không âm $\iint\limits_D \left\|\overrightarrow{N}(u,v)\right\| du\, dv$ gọi là diện tích của mặt S, kí hiệu là $\mu(S)$ hoặc $|S|$.

• Ta gọi $dS = \left\|\overrightarrow{N}(u,v)\right\| du\, dv$ là yếu tố diện tích của mặt S.

d) Diện tích mặt $z = f(x, y)$**.** Cho f có các đạo hàm riêng liên tục trên U, tập compact $D \subset U$, khi đó ta có $\mu(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dx\,dy$, ở đó S: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Ví dụ 1. Tính diện tích phần của mặt đinh ốc

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = h\theta$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Ví dụ 2.

Tìm diện tích phần của mặt paraboloit $z = 1 - x^2 - y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$

B. TÍCH PHÂN BA LỚP

3.8. Tích phân ba lớp trên hình chữ nhật đóng

a) Phép phân hoạch hình hộp chữ nhật.

Cho hình hộp chữ nhật đóng $P = [a ; a'] \times [b ; b'] \times [c ; c']$. Chia P thành những hình họp chữ nhật đóng $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$, đôi một có phần trong không giao nhau gọi là phép phân hoạch π. Kí hiệu d_i là đường chéo của hình chữ nhật V_i, $d(\pi) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$ gọi là đường kính của phân hoạch π.

Dãy $\{\pi_n\}$ những phép phân hoạch hình hộp chữ nhật P gọi là chuẩn tắc nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi_n) = 0$.

b) Tổng tích phân và các tổng Dacbu trên, dưới của hàm số xác định trên hình hợp chữ nhật được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong trường hợp tích phân hai lớp và tích phân một lớp.

c) Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên hình hộp chữ nhật đóng P, dãy chuẩn tắc $\{\pi_n\}$ các phép phân hoạch P; $\pi_n = \{\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_{P_n}\}$

Lấy tuỳ ý $Q_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta V_i$, $i = 1, 2, \ldots, P_n$. Đặt $\sigma_n(f, \pi_n, Q_1, \cdots, Q_n) = \sum\limits_{i=1}^{P_n} f(Q_i)\Delta V_i$

Nếu có $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = I \in \mathbb{R}$, với mọi dãy chuẩn tắc $\{\pi_n\}$ các phân hoạch của hình hộp P và mọi cách chọn điểm $Q_i \in \Delta V_i$, thì khi đó ta nói hàm f khả tích trên P và I gọi là tích phân ba lớp của hàm số f trên hình hộp chữ nhật đóng P, kí hiệu là

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \text{ hoặc } \iiint\limits_P f(x, y, z)\,dV$$

Ví dụ. Tính $\iiint\limits_D 2\,dx\,dy\,dz$, $D = [1 ; 2] \times [2 ; 4] \times [1 ; 4]$

d) Điều kiện khả tích được thiết lập hoàn toàn tương tự như đối với tích phân hai lớp. Ở đây ta chỉ nêu một định lí về sự tồn tại tích phân

Định lí 1. Cho hàm số f bị chặn trên hình hộp chữ nhật đóng P, $E \subset P$, E là tập hợp có thể tích 0. Nếu f liên tục trên tập hợp $D \backslash E$ thì f khả tích trên P.

3.9. Tích phân ba lớp trên một tập hợp bị chặn

a) Định nghĩa. Cho tập bị chặn $B \subset \mathbb{R}^3$, hình hộp chữ nhật đóng $P \supset B$ và hàm số

$$f_0 = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in B \\ 0, & (x, y, z) \in P \setminus B \end{cases}.$$

Nếu hàm số f_0 khả tích trên P thì ta nói f khả tích trên B và định nghĩa

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_P f_0(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

b) Tính chất. Tích phân ba lớp có các tính chất tương tự như tích phân hai lớp, cụ thể: tuyên tính, cộng tính, bảo toàn thứ tự, định lí giá trị trung bình, ...

c) Độ đo Jordan.

1°/ Tập bị chặn $B \subset \mathbb{R}^3$, $X(x, y, z) = 1$, $\forall (x, y, z) \in B$

Tập B đo được theo nghĩa Jordan $\Leftrightarrow$ hàm số X khả tích trên B. Khi đó thể tích của B là $V(B) \equiv |B| = \iiint\limits_B X(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_B dx\,dy\,dz$.

Hệ quả 1. B bị chặn $\subset \mathbb{R}^3$, khi đó B đo được theo nghĩa Jordan $\Leftrightarrow$ $V(\partial B) = 0$

2°/ D đo được trong $\mathbb{R}^2$, f khả tích trên D, khi đó $V(S) = 0$, ở đó

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\right\}.$$

Hệ quả 2. D là miền chính quy trong $\mathbb{R}^2$ và hàm số f liên tục, bị chặn trên D thì có $V(S) = 0$.

Hệ quả 3. Tập B bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, ∂B là hợp của một họ hữu hạn $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_z$, $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_x$, $y = y(z, x)$, $(z, x) \in D_y$, các hàm x, y, z liên tục trên các miền chính quy đóng D_z, D_x, D_y, thì tập B đo được theo nghĩa Jordan

Ví dụ. Hình cầu, elipxoit, trụ tròn xoay là những tập hợp đo được theo nghĩa Jordan

d) Các lớp hàm khả tích: Tập B đo được trong $\mathbb{R}^3$, hàm số f liên tục, bị chặn trên B thì khả tích trên B.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH 2
BÀI 8
B. TÍCH PHÂN BA LỚP (TT)

3.10. Cách tính. Gặp nhiều khó khăn trong việc tính tích phân ba lớp bằng định nghĩa. Giải pháp hợp lí là dựa vào kĩ thuật tính tích phân hai lớp và tích phân một lớp.

a) Tích phân ba lớp trên hình hộp chữ nhật

Định lí Fubini. Cho f khả tích trên hình hộp chữ nhật đóng $P = [a, a']\times[b, b']\times[c, c']$

1°/ Với mỗi $(x, y) \in \mathbb{R} = [a, a'] \times [b, b']$, hàm số $z \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên đoạn $[c, c']$ thì hàm số $\varphi(x, y) = \int\limits_c^{c'} f(x, y, z)dz$ khả tích trên $\mathbb{R}$ và có

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_R \varphi(x, y)dx\,dy = \iint\limits_R dx\,dy \int\limits_c^{c'} f(x, y, z)dz \qquad (10.1)$$

2°/ Với mỗi $z \in [c, c']$, hàm số $(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên hình chữ nhật $R = [a, a']\times[b, b']$ thì hàm số $\psi(z) = \iint\limits_R f(x, y, z)dx\,dy$ khả tích trên $[c, c']$ và

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dx\,dy,dz = \int\limits_c^{c'} \psi(z)dz = \int\limits_c^{c'} dz \iint\limits_R f(x, y, z)dx\,dy \qquad (10.2)$$

b) Cho hàm f liên tục trên hình hộp chữ nhật đóng P, khi đó ta có các công thức (10.1) và (10.2), khi đó do hàm số $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = \int\limits_c^{c'} f(x,y, z)dz$ liên tục trên hình chữ nhật $R = [a, a']\times[b, b']$, nên ta có

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \int\limits_a^{a'} dx \int\limits_b^{b'} dy \int\limits_c^{c'} f(x, y, z)dz$$

c) Cho tập D đo được theo Jordan trong $\mathbb{R}^2$, các hàm số $\varphi_1, \varphi_2: D \to \mathbb{R}$ khả tích trên D và $\varphi_1(x, y) \le \varphi_2(x, y)$, $\forall\ (x_1, x_2) \in D$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}$ (vật thể hình trụ)

Định lí (Fubini). Cho hàm $f : B \to \mathbb{R}$ khả tích trên B. Với mỗi $(x, y) \in D$, hàm số $z \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên đoạn $[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$ thì hàm số

$$\psi(x, y) = \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)dz$$

khả tích trên D và có

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \psi(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

d) Cho tập hợp D đo được trên $\mathbb{R}^2$, hàm số φ_1, φ_2 liên tục, bị chặn trên D, hàm $f: B \to \mathbb{R}$ liên tục, bị chặn trên B thì định lí Fubini nói trên vẫn đúng.

e) Cho B là tập đo được theo Jordan trong $\mathbb{R}^3$, giới hạn bởi $z = c$ và $z = c'$ và mỗi $z \in [c, c']$, tiết diện thẳng B cắt bởi mặt phẳng $Z = z$ là tập đo được theo Jordan trong $\mathbb{R}^2$, gọi B_z là hình chiếu của tiết diện đó lên mặt phẳng Oxy.

Định lí (Fubini). Cho hàm $f: B \to \mathbb{R}$ khả tích trên B. Nếu mỗi $z \in [c, c']$, hàm số $(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên B_z thì hàm số $\varphi(z) = \iint\limits_{B_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$ khả tích trên $[c, c']$ và có $\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_c^{c'} \varphi(z)\,dz = \int\limits_c^{c'} dz \iint\limits_{B_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$

Nói riêng, Định lí đúng với hàm số f liên tục và bị chặn trên B.

Ví dụ 1. Tính $\iiint\limits_B x\,dx\,dy\,dz$, B: $x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. $\left(\frac{1}{24}\right)$

Ví dụ 2. Tính $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, $V: x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ $\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}\right)$

3.11. Đổi biến trong tích phân ba lớp

a) Đổi biến

Định lí 1. Cho Ω là tập mở $\subset \mathbb{R}^3$, tập compact, đo được $B \subset \Omega$, ánh xạ φ: $\Omega \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $\varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, ở đó

1°/ Các hàm $x, y, z: \Omega \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên Ω.

2°/ Thu hẹp của φ trên Int$B$ là đơn ánh

3°/ Định thức Jacobi $J(u, v, w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \ne 0$, $\forall\ (u, v, w) \in$ Int B.

Khi đó ta có

1°/ $\varphi(B)$ là tập compact đo được

2°/ Nếu $f: \varphi(B) \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\varphi(B)$ thì

$$\iiint\limits_{\varphi(B)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_B f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|J(u,v,w)\right|du\,dv\,dw$$

b) Toạ độ trụ. Cho ánh xạ φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$.

Rõ ràng có $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ đều thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^3$,

$$J(r,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

Với mỗi $\alpha\in\mathbb{R}$, thu hẹp của φ lên tập hợp $A = (0\,;\,\infty)\times[\alpha,\ \alpha + 2\pi]\times\mathbb{R}^+$ là song ánh từ A lên $\mathbb{R}^3$ bỏ đi trục Oz, nên có $J(r,\ \varphi,\ z) \neq 0$ trên A.

Thu hẹp của φ trên tập mở $\Omega_\alpha = (0\,;\,\infty)\times(\alpha,\ \alpha + 2\pi)\times\mathbb{R}^+$ là song ánh từ Ω_α lên tập mở $V_\alpha = \mathbb{R}^3 \setminus P_\alpha^+$, P_α^+ là nửa mặt phẳng đóng có bờ là trục Oz cắt mặt phẳng Oxy theo nửa đường thẳng tạo với trục Ox góc α.

Khi B là tập compact đo được sao cho $\text{Int}B \subset \Omega_\alpha$, $\forall\alpha$ thì thu hẹp của φ trên $\text{Int}B$ là đơn ánh và $J(r,\ \varphi,\ z) \neq 0$ trên $\text{Int}B$. Khi đó ta có

$$\iiint\limits_{\varphi(B)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{B} f\big(x(r,\varphi,z),\,y(r,\varphi,z),\,z(r,\varphi,z)\big)r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Ví dụ 1. Tính $\iiint\limits_B \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2}$, B: $x^2 + y^2 \le a^2,\ 0\le z\le h,\ a>0,\ h>0$. $\quad(\frac{1}{2}\pi h^2\ln(1+a^2))$

Ví dụ 2. Tính $\iiint\limits_B \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz$, B: $2az \ge x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2$ $\quad(\frac{32\sqrt{2}}{15}\pi a^3)$

Ví dụ 3. Tính $\iiint\limits_B z\,dx\,dy\,dz$, $B: z^2=\dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2),\ z=h>0$ $\quad(\frac{\pi h^2R^2}{4})$

Ví dụ 4. Tính $\iiint\limits_B dx\,dy\,dz$, $B: x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz,\ x^2 + y^2 \le z^2$ và chứa $(0\,;\,0\,;\,R)$

Ví dụ 5. Tính $\iiint\limits_B z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, $B: y=\sqrt{2x-x^2},\ y=0,\ z=0,\ z=a>0$

c) Toạ độ cầu. Cho ánh xạ $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(r,\varphi,\theta)\mapsto(r\sin\theta\cos\varphi,\,r\sin\theta\sin\varphi,\,r\cos\theta)$ rõ ràng các hàm số $x,\ y,\ z\in C^\infty$ trên $\mathbb{R}^3$, và có

$$J(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r^2\sin\theta,$$

$\theta=\widehat{(Oz,OM)},\ \varphi=\widehat{(Ox,OM')}$

Với mỗi $\alpha\in\mathbb{R}$, thu hẹp φ trên tập hợp $A = (0\,;\,\infty)\times[\alpha,\ \alpha + 2\pi)\times(0,\ r)$ là song ánh từ A lên $\mathbb{R}^3$ bỏ đi trục Oz, và có $J(r,\ \varphi,\ \theta) \neq 0$ trên A.

Thu hẹp của φ trên tập mở $\Omega_\alpha = (0\,;\,\infty)\times(\alpha,\ \alpha + 2\pi)\times\mathbb{R}$ là song ánh lên tập hợp mở $V_\alpha=\mathbb{R}^3\setminus P_\alpha^+$, ở đó P_α^+ là nửa mặt phẳng đóng có bờ là trục Oz, cắt mặt phẳng Oxy theo nửa đường thẳng tạo với trục Ox góc α.

Khi B là tập compact, đo được sao cho $\text{Int}B \subset \Omega_\alpha$, α nào đó thì thu hẹp của φ trên

Int$B$ là đơn ánh và $J(r, \varphi, \theta) \neq 0$ trên Int$B$, do đó có

$$\iiint\limits_{\varphi(B)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{B} f\big(x(r,\varphi,z), y(r,\varphi,z), z(r,\varphi,z)\big) r^2 \sin\theta\,dr\,d\varphi\,dz$$

Ví dụ 1. $\iiint\limits_{B} dx\,dy\,dz,\quad B: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$

Ví dụ 2. $\iiint\limits_{B} \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz,\quad B: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

Ví dụ 3. $\iiint\limits_{B} x^2 y^2 z^2\,dx\,dy\,dz,\quad B: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$

Ví dụ 4. $\iiint\limits_{B} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz,\quad B: x^2 + y^2 + z^2 \leq x$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH 2
BÀI 9

CHƯƠNG IV. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. Tích phân đường loại 1

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa. $f(x, y)$ xác định trên đường cong $C = \overset{\frown}{AB}$. Chia C thành n phần (không dẫm lên nhau) bởi các điểm $A \equiv A_0, A_1, \ldots, A_n \equiv B$.

Gọi tên và độ dài của cung thứ i: $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ là Δs_i, $i = \overline{1, n}$.

Lấy tuỳ ý $M_i(x_i\,;\,y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$.

Nếu có $\lim_{n\to\infty} I_n = I$ với mọi cách chia C và mọi cách chọn điểm M_i thì ta gọi I là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ lấy trên đường cong C và kí hiệu

$$I = \int_C f(x, y)ds = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds$$

Ví dụ 1. Tính $\int_C 2ds$, C: $x^2 + y^2 = 9$, $x \ge 0$, từ $(0\,;\,-3)$ đến $(0\,;\,3)$

Ví dụ 2. Xét $\int_C D(x, y)ds$, C: $0 \le x \le 1$, $y = 0$, $D(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in I \end{cases}$

3. Sự tồn tại.

Định lí 1. $f(x, y)$ liên tục trên đường cong trơn C thì tồn tại $\int_C f(x, y)ds$

• Ý nghĩa cơ học

$f(x, y) > 0$ là mật độ khối lượng của đường cong vật chất C thì có khối lượng của đường cong là $m = \int_C f(x, y)ds$

5. Tính chất. Có tính chất giống như tích phân xác định trừ ra tính chất sau

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)ds$$

6. Cách tính. Ta cần tính $\int_C f(x, y)ds$

a) $C : y = y(x),\ a \le x \le b$, khi đó ta có $\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$

Ví dụ 1. Tính $I = \int\limits_C \frac{4y}{x}ds$, $C : y = \frac{x^2}{2}$ nối điểm $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$ với $B(2 ; 2)$.

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_C xy\,ds$, $C : |x| + |y| = a,\ a > 0$.

b) C: $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$, thì có $\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t);y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

Ví dụ 1. Tính $\int\limits_C xy\,ds$, $C : x^2 + y^2 = R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_C (x-y)ds$, $C : x^2 + y^2 = ax$.

c) $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, thì có

$$\int\limits_C f(x,y,z)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

Ví dụ 1. Tính $\int\limits_C (x+y)ds,\ x = t,\ y = \sqrt{\frac{3}{2}}t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1$

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t \ge 0$.

§2. Tích phân đường loại hai

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa. Cho hàm vectơ $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$ xác định trên đường cong C nối hai điểm A, B, $C = \overset{\frown}{AB}$, vectơ $\vec{T}(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \sin\alpha(M)\vec{j}$ là vectơ tiếp tuyến với C tại M, $\alpha(M) = \left(\vec{T}, Ox\right)$, khi đó tích phân đường loại một của hàm

$f(x,y) = \vec{F}.\vec{T} = P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)$ trên đường C

$$I = \int\limits_C \vec{F}.\vec{T}\,ds = \int\limits_C [P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)]ds$$

cùng được gọi là tích phân đường loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ hay của các hàm $P(M)$, $Q(M)$ lấy trên C đi từ A đến B. Ta cũng có

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Tương tự, ta cùng có tích phân đường loại hai của hàm

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + \vec{R}(M)\vec{k},\ M \in \mathbb{R}^3 \text{ là}$$

$$I = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

α, β, γ lần lượt là các góc giữa tiếp tuyến $\vec{T}$ với các trục Ox, Oy, Oz

Ví dụ 1. Tính $\int_C xdx + e^{xy^2}dy$, C: $y = 1$, $x : 0 \to 2$

Ví dụ 2. Xét $\int_C \sin x^2 dx + dy$, $C : x = 2$, $y : 0 \to 1$

3. Sự tồn tại

Định lí 1. Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục trên đường cong trơn từng khúc C thì tồn tại $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

4. Ý nghĩa cơ học : Tính công của lực di chuyển chất điểm dọc theo đường cong C.

5. Tính chất : Có các tính chất giống như tích phân xác định, chẳng hạn :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy$$

6. Cách tính.

a) Nếu $C : y = y(x),\ x : a \to b$ thì có

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\big)dx$$

Ví dụ 1. Tính $\int_C xydx + (y - x)dy$,

a) $C : y = x^2$, $x : 0 \to 1$

b) $C : y = 0$, $x : 0 \to 1$

c) $x = 1$, $y : 0 \to 1$

Ví dụ 2. Tính $\int_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, $ABCDA$ là chu tuyến hình vuông với các đỉnh $A(1 ; 0)$, $B(0 ; 1)$, $C(-1 ; 0)$, $D(0, -1)$.

b) C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, t: $\alpha \to \beta$, có

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta \big[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big]dt$$

Ví dụ 1. Tính $\oint\limits_C xdx + (x+y)dy$, $C: x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t: 0 \to 2\pi$

Ví dụ 2. Tính $\int_C \dfrac{(x+y)dx - (x-y)dy}{(x^2+y^2)}$, C là $x^2 + y^2 = a^2$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Chú ý. Tương tự cũng có công thức khi $C: x = x(t),\ y = y(t),\ z(t),\ t: \alpha \to \beta$

7. Công thức Green

Định lí 1. Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền D compact, giới hạn bởi đường cong kín, trơn từng khúc C, thì có

$$\oint\limits_C Pdx + Qdx = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy$$

Ví dụ 1. Tính $\oint\limits_C (1-x^2)ydx + (1+y^2)xdy$, C: $x^2 + y^2 = R^2$

Ví dụ 2. Tính $\oint\limits_C (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$, $C: x^2 + y^2 = ax$.

8. Điều kiện để tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Định lí 1. (ĐL mệnh đề tương đương). Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền D đơn liên thì bốn mệnh đề sau là tương đương

1°/ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D$

2°/ $\oint\limits_L Pdx + Qdx = 0$, $\forall$ L kín thuộc D.

3°/ $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào A, B mà không phụ thuộc vào đường nối A, B.

4°/ $\exists U(x, y): du = Pdx + Qdy$

Chú ý : $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dU = U\Big|_A^B = U(B) - U(A)$

Ví dụ 1. $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} \left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right)dy$

Ví dụ 3. Tính $\int\limits_L \frac{x}{(x+y^2)^2}[(x+2y^2)dx - 2xydy]$,

ở đó L: $y = 1 - x^3$, đi từ A(1,0) đến B(0,1).

Chú ý. Tương tự có thể mở rộng định lí này cho đường cong trong không gian:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t : \alpha \to \beta.$$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

GIẢI TÍCH 2
BÀI 10

B. TÍCH PHÂN MẶT

§1. Tích phân mặt loại 1

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa.

• Cho hàm số $f(M)$ xác định trên mặt S nào đó $\subset \mathbb{R}^3$

• Chia mặt S thành n phần bất kì không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của chúng là ΔS_i, $i = \overline{1, n}$.

• Lấy điểm tuỳ ý $M_i(x_i\,;\,y_i\,;\,z_i) \in \Delta S_i$, lập tổng $I_n = \sum_{n=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$.

• Nếu $\lim_{n\to\infty} I_n = I$ sao cho $d \to 0$, $\forall$ cách chia S và cách chọn M_i thì ta gọi I là tích phân mặt loại một của hàm số $f(M)$ trên mặt S và kí hiệu

$$I = \iint_S f(M)dS \text{ hoặc } I = \iint_S f(x, y, z)dS$$

Ví dụ 1. Tính $\iint_S 2dS,\ S = x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1,\ z \ge 0$

Chú ý. $\iint_S dS$ chính là diện tích của mặt S.

2. Tính chất. Có các tính chất giống như tích phân đường loại một

3. Sự tồn tại

Định lí 1. Cho hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt trơn hay trơn từng phần S

$$\Rightarrow \exists \iint_S f(x, y, z)dS$$

4. Cách tính. $z = z(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$, khi đó có

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

Ví dụ 1. Tính $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, S là mặt bán cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$.

Ví dụ 2. Tính $\iint_S (xy + yz + zx)dS$, S : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

§2. Tích phân mặt loại hai

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa.

a) Định nghĩa. Cho mặt S giới hạn bởi một đường trơn từng khúc C. Lấy $M_0 \in S$ và dựng pháp tuyến $\vec{N}$ của S tại M_0, nếu xuất phát từ M_0 đi theo một đường cong kín bất kì L trên S không cắt đường biên C trở lại vị trí M_0 mà hướng của pháp tuyến tại M_0 không thay đổi thì mặt S gọi là mặt hai phía. Trường hợp ngược lại thì S được gọi là mặt một phía.

Mặt S được gọi là định hướng từng phần nếu nó liên tục và được chia thành một số hữu hạn phần định hướng bởi các đường trơn từng khúc.

Cho mặt định hướng S giới hạn bởi đường cong C. Ta gọi hướng dương trên C ứng với phía đã chọn của S xác định theo quy tắc bàn tay phải.

b) Định nghĩa tích phân mặt loại hai.

- Cho hàm vectơ $\vec{F} = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ xác định trên mặt hai phía S
- Chọn một phía của S ứng với pháp tuyến

$$\vec{N}(M) = \vec{i}\cos\alpha(M) + \vec{j}\cos\beta(M) + \vec{k}\cos\gamma(M)$$

- Ta gọi tích phân mặt loại một của hàm $\vec{F}.\vec{N} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ trên mặt S:

$$I = \iint_S \vec{F}.\vec{N}\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

là tích phân mặt loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ (hay của các hàm P, Q, R) lấy trên phía đã chọn của mặt S.

Ví dụ 1. Tính $\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,\ S: x^2 + y^2 = 1, z = 2$, hướng lên trên, trong đó

$$P = z^{x^{zy}},\ Q = e^{y^2}\sin x^2,\ R = \left(x^2 + y^2\right)^z$$

Chú ý. Gọi hình chiếu của ΔS_i lên các mặt phẳng Oyz, Ozx, Oxy lần lượt là $\Delta S_i^{(1)}, \Delta S_i^{(2)}, \Delta S_i^{(3)}$, khi đó có

$$\cos\alpha(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(1)},\ \cos\beta(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(2)},\ \cos\gamma(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(3)}.$$

Do đó ta cũng kí hiệu tích phân mặt loại hai là $I = \iint_S Pdydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$

3. Tính chất. Có các tính chất tương tự như tích phân đường loại hai

4. Định lí tồn tại. Cho các hàm P, Q, R liên tục trên mặt định hướng từng phần S thì tích phân mặt loại hai của các hàm đó lấy theo một phía của S là tồn tại.

5. Cách tính.

- Ta có $\iint_S Pdydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_S Pdydz + \iint_S Qdzdx + \iint_S R\,dxdy$

• Ta tính một tích phân trong vế phải, chẳng hạn $I_1 = \iint\limits_S R\,dxdy$

Cho $S : z = f(x, y)$ xác định trên D.

Tích phân lấy theo phía trên của mặt S là $I_1 = \iint\limits_D R\big(x, y, z(x, y)\big)dxdy$

Tích phân lấy theo phía dưới của mặt S là $I = -\iint\limits_D R\big(x, y, z(x, y)\big)dxdy$

Ví dụ 1. $\iint\limits_S z\,dxdy$, S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Ví dụ 2. $\iint\limits_S x^3 dydz$, S là phía trên của nửa trên của mặt Ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $z \ge 0$.

§3. Công thức Stokes

1. Đặt vấn đề

2. Công thức Stokes

Định lí 1. Các hàm P, Q, R cùng các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên mặt định hướng từng phần S, giới hạn bởi đường trơn từng khúc C, thì ta có công thức

$$\oint\limits_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')ds$$

$$= \iint\limits_S \Big[\big(R'_y - Q'_z\big)\cos\alpha + \big(P'_z - R'_x\big)\cos\beta + \big(Q'_x - P'_y\big)\cos\gamma\Big]dS$$

$$= \iint\limits_S \big(R'_y - Q'_z\big)dydz + \big(P'_z - R'_x\big)dzdx + \big(Q'_x - P'_y\big)dxdy$$

ở đó : $\vec{\tau} = (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ là vectour tiếp tuyến với C, còn $\vec{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là vectour pháp tuyến với S.

Chú ý. 1°/ Trong mặt phẳng thì công thức Stokes trở thành công thức Green đã biết.

2°/ Công thức Stokes còn viết dưới dạng sau

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix};$$

$$\oint_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')ds = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Ví dụ 1. Tính $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, C: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, lấy hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn thừ phía dương của Ox.

Ví dụ 2. $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$,

ở đó $C: x^2 + y^2 = a^2, \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1\,(a > 0, h > 0)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

2. Định lí bốn mệnh đề tương đương.

Từ công thức Stokes có thể chứng minh được định lí bốn mệnh đề tương đương cho tích phân đường trong khôn gian.

Định lí 1. Các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền V đơn liên thì bốn mệnh đề sau là tương đương

1) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

2) $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$, $\forall$ đường cong kín $L \subset V$.

3) $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường nối các điểm A, $B \in V$ mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B.

4) $\exists\, U(x, y, z)$: $du = Pdx + Qdy + Rdz$

Ví dụ 1. $\oint_C yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, ở đó C là đường cong kín bất kì

3. Ý nghĩa vật lí.

a) Lưu số (hoàn lưu) của trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc theo chu tuyến kín C là

$$T = \int_C \vec{F}.\vec{\tau}ds = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

b) Vectơ xoáy

Định nghĩa. Vectơ xoáy ($\operatorname{rot}\vec{F}(M)$) tại M trong trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ là

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Ví dụ 1. Tìm vectơ xoáy của điện trường $\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{r^3}$

Vectơ xoáy có các tính chất sau:

- Tuyến tính
- $\operatorname{rot}(u\vec{c})=\overrightarrow{\operatorname{grad}u}\wedge\vec{c}$, $\vec{c}$ là hằng số
- $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\overrightarrow{\operatorname{grad}u}\wedge\vec{F}$

c) Công thức Stokes dưới dạng vectơ. $\oint\limits_C \vec{F}\vec{\tau}ds=\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F}\vec{N}dS$

Do đó có: lưu số của trường vectơ $\vec{F}$ theo một đường cong kín C bằng thông lượng của vectơ $\operatorname{rot}\vec{F}$ qua mặt S giới hạn bởi đường cong C.

§ 4. Công thức Ostrogradsky

• Đặt vấn đề

1. Công thức

Định lí 1. (Công thức Ostrogradsky). Các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền compact $V\subset\mathbb{R}^3$ giới hạn bởi mặt cong kín trơn từng phần S, thì ta có công thức

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV,$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía ngoài của S.

Ví dụ 1. $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, S là phía ngoài mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Ví dụ 2. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, ở đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2. Ý nghĩa Vật lí.

a) Dive của trường vectơ

• Định nghĩa. Cho trường vô hướng u, vectơ gradient của trường vô hướng u là

$\overrightarrow{\operatorname{grad}u}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục

• Tính chất.

+) Tuyến tính

+) $\overrightarrow{\text{grad}}(u_1u_2) = u_1\overrightarrow{\text{grad}}\,u_2 + u_2\overrightarrow{\text{grad}}\,u_1$.

+) $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(u) = f'(u)\overrightarrow{\text{grad}}\,u$.

Ví dụ (Bài toán con muỗi). Con muỗi đậu trong trường nhiệt độ T. Hỏi con muỗi cần bay theo hướng nào để được mát nhanh nhất.

b) Công thức Ostrogradsky dưới dạng vectơ $\iint\limits_S \vec{F}\vec{N}\,dS = \iiint\limits_V \text{div}\,\vec{F}\,dV$, ở đó

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

ở đó N là vectour pháp tuyến phía ngoài của mặt S kín.

c) Điểm nguồn, điểm rò, trường vectơ có thông lượng bảo toàn

• Cho $\text{div}\,\vec{F}$ liên tục tại $M \in V$ và $\text{div}\,\vec{F}(M) > 0$. Gọi V' là miền giới hạn bởi mặt kín S' trong lân cận đủ nhỏ của M. Từ công thức ở mục b) $\Rightarrow$ thông lượng qua mặt S' từ trong ra ngoài là số dương, hay thông lượng vào mặt S' ít hơn thông lượng ra khỏi mặt đó. Khi đó điểm M được gọi là điểm nguồn của trường.

Ngược lại nếu $\text{div}\,\vec{F}(M) < 0$ thì M được gọi là điểm rò của trường.

• Nếu $\text{div}\,\vec{F}(M) = 0, \forall M \in$ trường thì trường không có các điểm nguồn và điểm rò. Khi đó ta bảo $\vec{F}$ là trường ống.

• Nếu $rot\,\vec{F}(M) = 0, \forall M \in$ trường thì F được gọi là trường bảo toàn.

• F được gọi là trường điều hòa $\Leftrightarrow$ F vừa là trường ống, vừa là trường thế.

Ví dụ 1. Tính thông lượng của trường $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua mặt xung quanh và mặt toàn phần của hình trụ $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le x \le h$.

Ví dụ 2. Tính thông lượng của điện trường $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (Định luật Gauss)

3. Toán tử Haminton

a) Định nghĩa. $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

b) Tính chất

• $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}}\,u$

• $\vec{\nabla}\vec{F} = \text{div}\,\vec{F}$

- $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{F}$
- $\vec{\nabla}^2 = \Delta$, ở đó Δ là toán tử Laplace $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$
- $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} u\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} u\right) = \Delta u$
- $\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} u\right) = 0$
- $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right) = 0$

Thank you and Good bye!