ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

1. Nội dung môn học gồm 5 chương:

- ➢ Chương 1: Tập hợp – Logic – Ánh xạ – Số phức – Cấu trúc đại số
- ➢ Chương 2: Ma trận – Định thức – Hệ phương trình
- ➢ Chương 3: Không gian vecto
- ➢ Chương 4: Ánh xạ tuyến tính
- ➢ Chương 5: Dạng toàn phương, dạng song tuyến tính. Không gian Euclde

*Nhóm ngành hai được giảm tải phần: Logic, Cấu trúc đại số, Dạng toàn phương, dang song tuyến tính

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

2. Hình thức thi:

- Giữa kỳ: 60 phút, đề chung, 8-10 câu, nội dung: Chương 1,2.
- Cuối kỳ: 90 phút, đề chung, 6-8 câu, nội dung: Toàn bộ chương trình

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

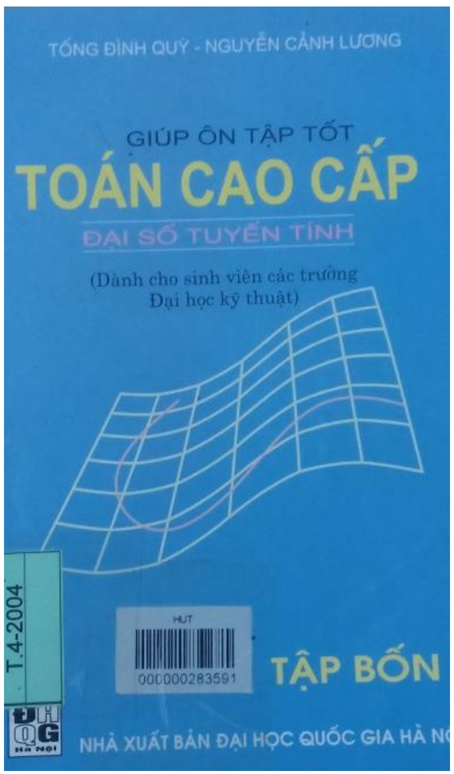
3. Tài liệu tham khảo:

- Bài giảng Đại số tuyến tính – thầy Bùi Xuân Diệu
- Sách Toán Cao Cấp, Tập 1: Đại số và hình học giải tích, thầy Nguyễn Đình Trí (chủ biên), thầy Nguyễn Xuân Thảo,….
- Bài tập Toán Cao Cấp, Tập 1: Đại số và hình học giải tích, thầy Nguyễn Đình Trí (chủ biên), thầy Nguyễn Xuân Thảo,….
- Sách "Giúp ôn tập tốt Toán Cao Cấp: Đại số tuyến tính", thầy Tống Đình Quỳ, thầy Nguyễn Cảnh Lương.
- Bài tập Đề cương Viện Toán.
- Bộ đề thi giữa kỳ, cuối kỳ các năm Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội

(Có thể mua ở quán photo hoặc tìm bản mềm trên các nhóm học tập)

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

3. Tài liệu tham khảo:



TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC

BÙI XUÂN DIỆU

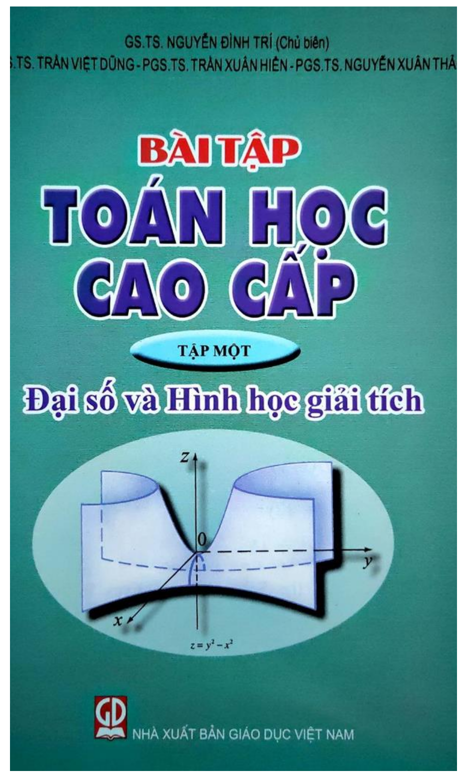
Bài Giảng

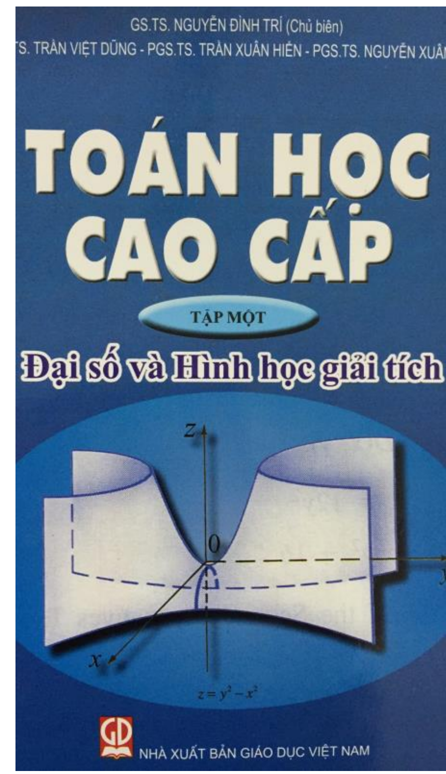
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
(lưu hành nội bộ)

Tập hợp - Logic - Ánh xạ - Số phức, Ma trận - Định thức - Hệ phương trình, Không gian véctơ, Ánh xạ tuyến tính, Dạng toàn phương - Không gian Euclide

Tóm tắt lý thuyết, Các ví dụ, Bài tập và lời giải

Hà Nội- 2009





4. Phương pháp học:

- Chia nhỏ thành các dạng bài tập cụ thể.
- Ghi nhớ các thuật toán, phương pháp biến đổi
- Chăm chỉ làm bài tập để ghi nhớ các dạng bài.

THỜI GIAN HỌC

➢Giữa kỳ

Tự học	Buổi 1+2		Buổi 3		Buổi 4+5		Buổi 6
Tập hợp Logic	Ánh xạ	Ma trận	Định thức	Hạng của ma trận	Hệ phương trình	Số phức	Cấu trúc đại số

➢ Cuối kỳ

Buổi 1+2	Buổi 3	Buổi 4+5	Buổi 6
Không gian vecto	Ánh xạ tuyến tính	Dạng song tuyến tính, dạng toàn phương. Không gian Euclide	Ôn tập, luyện đề, giải đáp thắc mắc

§1: ÁNH XẠ

- Định nghĩa:
- Tập ảnh, tập nghịch ảnh
- Đơn ánh, toàn ánh, song ánh
- Các dạng bài tập (6 dạng)

I. Định nghĩa:

- Cho hai tập hợp $E, F \neq \emptyset$ và một phép biến đổi f. Khi đó f được gọi là ánh xạ nếu mỗi phần tử $x \in E$ thông qua phép biến đổi f tạo ra *duy nhất một phần tử $y \in F$*. Ký hiệu $y = f(x)$.
- Ký hiệu ánh xạ:

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Trong đó: E là tập nguồn.

F là tập đích.

x là nghịch ảnh (hoặc tạo ảnh).

y là ảnh.

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned} f: \text{Người} &\longrightarrow \text{Người} \\ \text{Bố} &\longmapsto \text{Con} \end{aligned}$$

1 Bố có thể có bao nhiêu con?

Hỏi phép biến đổi f có là một ánh xạ không?

Trả lời:

Không.

Vì mỗi một Bố thuộc tập Người có thể có 1 hoặc nhiều Con thuộc tập Người.

❖Vậy nếu ngược lại

$$\begin{aligned} f: \text{Người} &\longrightarrow \text{Người} \\ \text{Con} &\longmapsto \text{Bố nuôi} \end{aligned}$$

Có là một ánh xạ không?

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Cho phép biến đổi sau:

$$f : \text{Địa phương} \longrightarrow \text{Địa phương}$$
$$\text{Xã} \longmapsto \text{Huyện}$$

Hỏi phép biến đổi f có là một ánh xạ không?

<u>**Trả lời:**</u>

Có.

Vì mỗi một Xã chỉ có thể thuộc một Huyện

1 Xã có thể có thể thuộc mấy Huyện

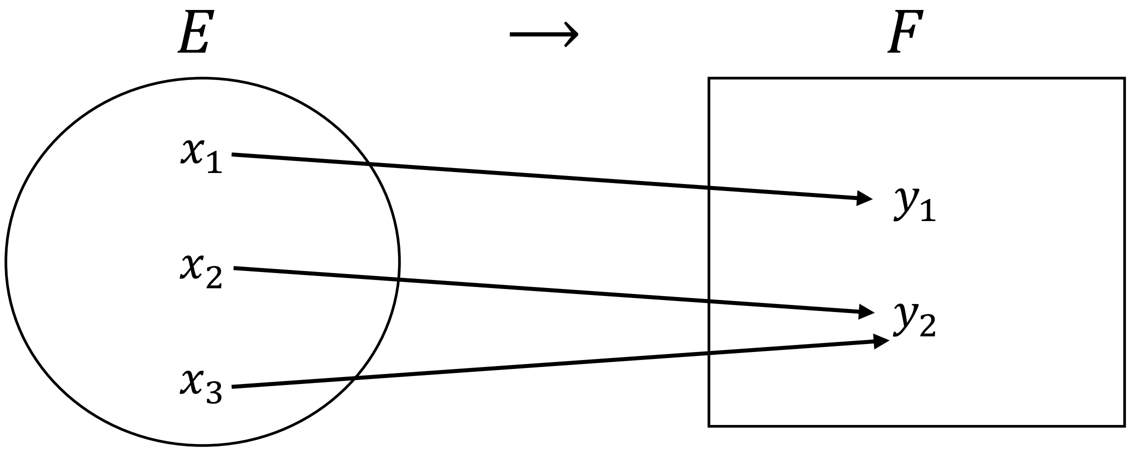
❖ Vậy nếu ngược lại

$$f : \text{Địa phương} \longrightarrow \text{Địa phương}$$
$$\text{Huyện} \longmapsto \text{Xã}$$

Có là một ánh xạ không?

Các ví dụ:

Ví dụ 3: Cho phép biến đổi f được mô tả như sau:



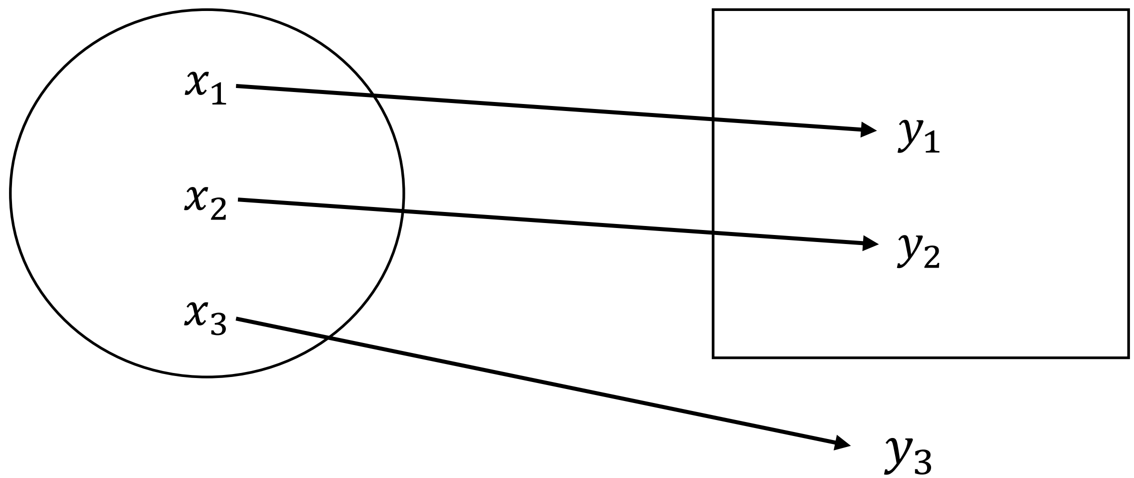
Hỏi phép biến đổi f có là một ánh xạ không?

Trả lời:

Có.

Ví dụ 4: Cho phép biến đổi f được mô tả như sau:

$$E \longrightarrow F$$



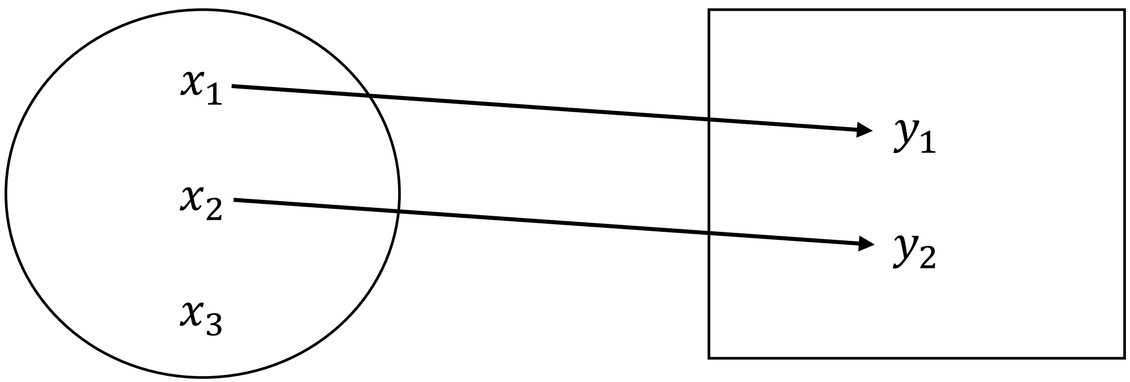
Hỏi phép biến đổi f có là một ánh xạ không?

<u>Trả lời:</u>

Không.

Ví dụ 5: Cho phép biến đổi f được mô tả như sau:

$$E \longrightarrow F$$



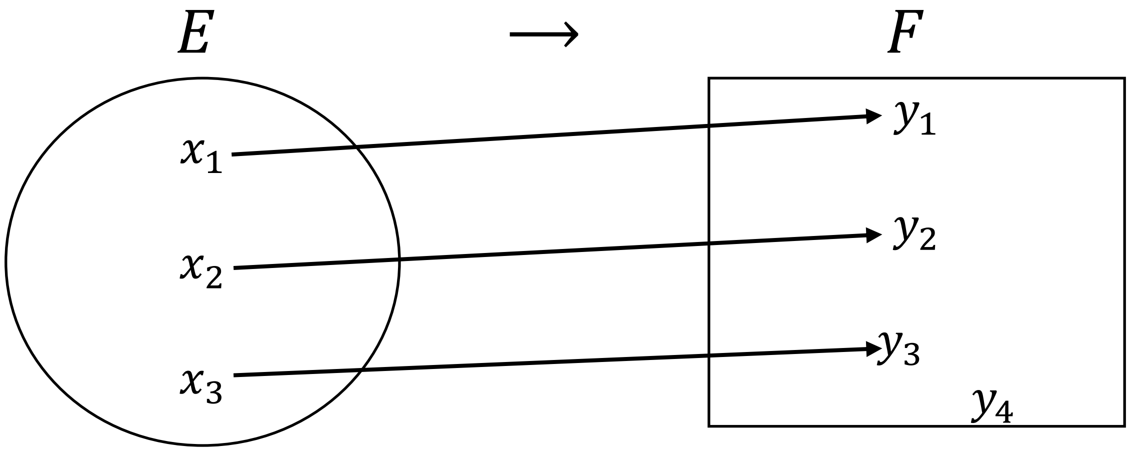
Hỏi phép biến đổi f có là một ánh xạ không?

<u>Trả lời:</u>

Không.

Các ví dụ:

Ví dụ 6: Cho phép biến đổi f được mô tả như sau:

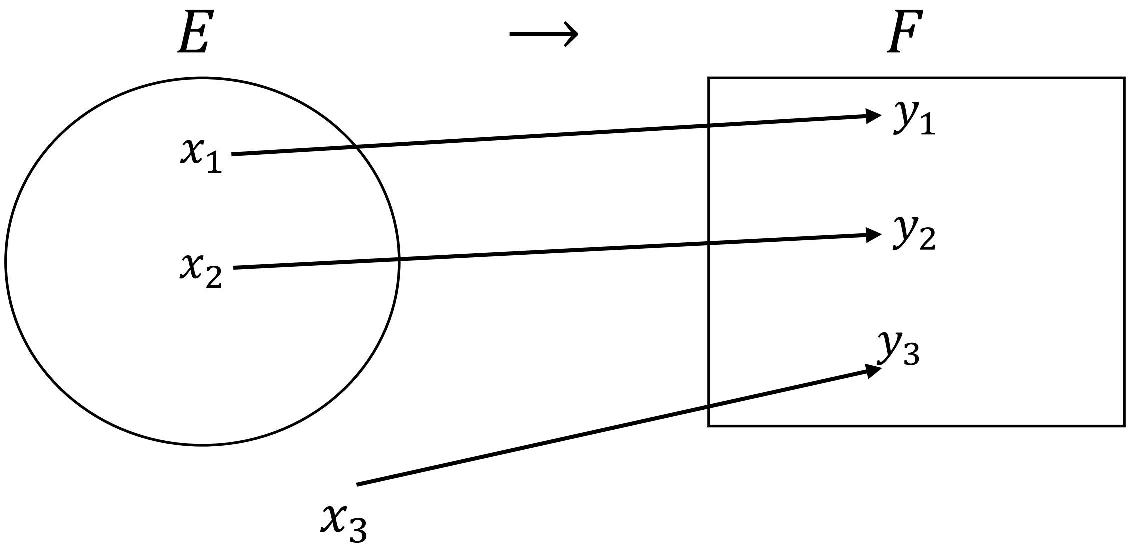


Hỏi phép biến đổi f có là một ánh xạ không?

Trả lời:

Có.

Ví dụ 7: Cho phép biến đổi f được mô tả như sau:



Hỏi phép biến đổi f có là một ánh xạ không?

Trả lời:

Có.

Các ví dụ:

Ví dụ 8: Cho phép biến đổi f được mô tả như sau:

$$f: R \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto y = f(x) = x + 1$$

Hỏi phép biến đổi f có là một ánh xạ không?

<u>**Trả lời:**</u>

Có.

Vì với mỗi một $x \in R$ đều cho ra một $y = f(x) = x + 1 \in R$

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Các ví dụ:

Ví dụ 9: Cho phép biến đổi f được mô tả như sau:

$$f: R \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto y = f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Hỏi phép biến đổi f có là một ánh xạ không?

Trả lời:

Không.

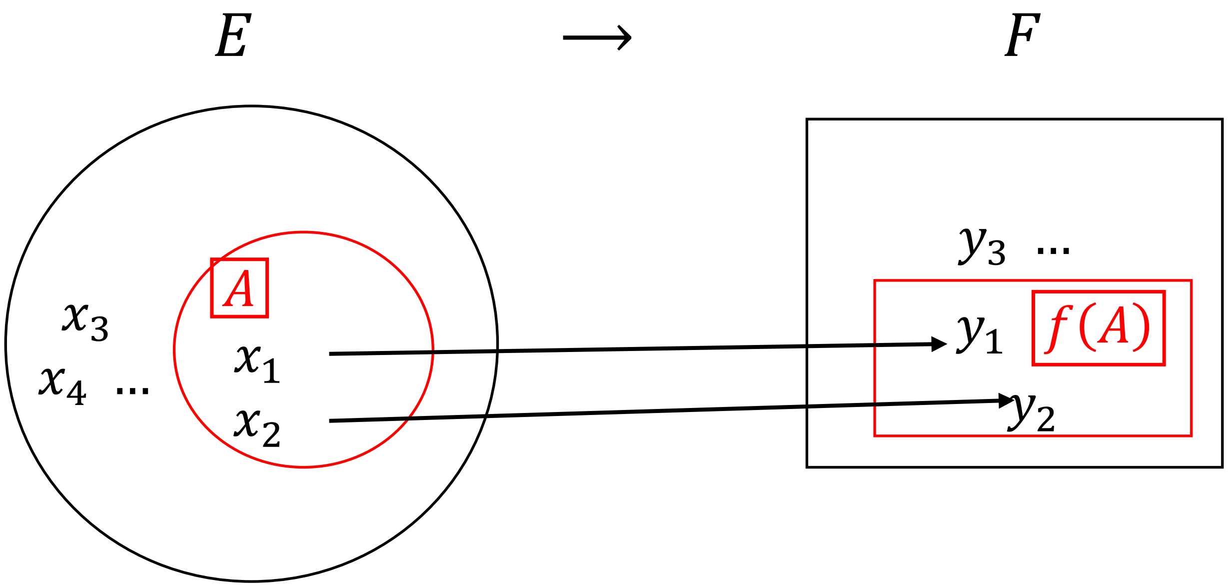
Vì với $x = 1 \in R$ thì $y = \frac{1}{0}$ không xác định (gián đoạn).

II. Tập ảnh và tập nghịch ảnh:

Cho ánh xạ $f: E \longrightarrow F$. Giả sử $A \subset E, B \subset F$

1. Tập ảnh của A qua ánh xạ f ký hiệu:

$$\boxed{f(A) = \{y = f(x) \in F | x \in A\}}$$

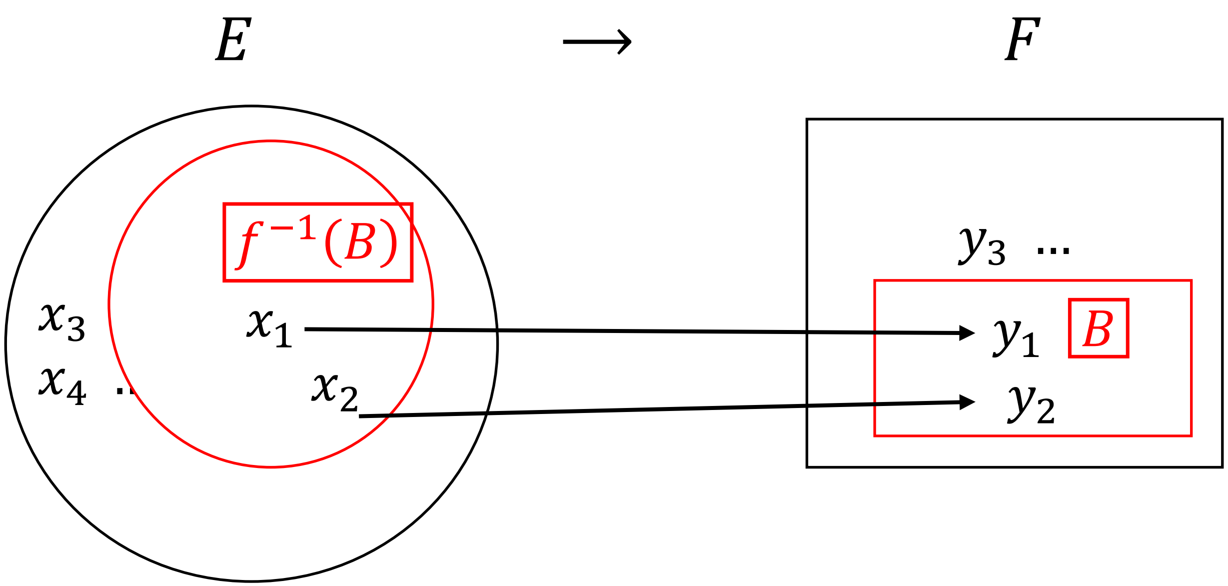


II. Tập ảnh và tập nghịch ảnh:

Cho ánh xạ $f: E \longrightarrow F$. Giả sử $A \subset E, B \subset F$

2. Tập nghịch của B qua ánh xạ f ký hiệu:

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}}$$



Dạng bài tập 1: Tìm tập ảnh

➢ ***Bài toán:***

Cho ánh xạ $f: E \longrightarrow F$ và tập $A \subset E$ $(A \neq \emptyset)$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

Tìm tập ảnh $f(A)$ của A qua ánh xạ f ?

➢ ***Phương pháp giải:***

Áp dụng

$$\boxed{f(A) = \{y = f(x) \in F | x \in A\}}$$

Vận dụng các kiến thức về tính toán đa thức, khảo sát hàm số để tìm ra các phần tử trong tập hợp $f(A)$.

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 + 3x - 4$ và $A = \{-6; 0\}$.

Tìm tập ảnh $f(A)$?

Giải:

Tập ảnh $f(A) = \{y = f(x) \in R | x \in A\}$
$\Leftrightarrow f(A) = \{f(x) = x^2 + 3x - 4 \in R | x \in \{-6; 0\}\}$

Với $x = -6 \Rightarrow f(x) = 14 \in R$

Với $x = 0 \Rightarrow f(x) = -4 \in R$

Vậy $f(A) = \{-4; 14\}$.

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 - 2x$ và $A = [0; 3]$.

Tìm tập ảnh $f(A)$?

<u>Giải:</u>

Tập ảnh $f(A) = \{y = f(x) \in R | x \in A\}$
$\Leftrightarrow f(A) = \{f(x) = x^2 - 2x \in R | x \in [0; 3]\}$

Khảo sát hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ với $x \in [0; 3]$
$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Vậy $f(A) = [-1; 3]$

Các ví dụ:

Ví dụ 3: Cho ánh xạ $f: R \to R^2, f(x) = (x + 1; x^2 + 2x + 3)$ và $A = [0; 1]$. Tìm tập ảnh $f(A)$?

Giải:

Tập ảnh $f(A) = \{y = (x + 1; x^2 + 2x + 3) \in R^2 | x \in [0; 1]\}$

+ Với $x \in [0; 1] \Rightarrow x + 1 \in [1; 2]$

+ Khảo sát hàm số $g(x) = x^2 + 2x + 3$ với $x \in [0; 1]$
$g'(x) = 2x + 2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	-1	0	1
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$		3 $\nearrow$	6

Vậy $f(A) = [1; 2] \times [3; 6]$

Các ví dụ:

Ví dụ 4: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (4x; 5y)$ .Tìm tập ảnh $f(A)$ với $A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 9\}$

<u>Giải:</u>

Tập ảnh $f(A) = \{f(x,y) = (4x; 5y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 9\}$

Do $f(x,y) \in R^2$ nên ta đặt $f(x,y) = (a,b)$ với $a, b \in R$

$$f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow (4x, 5y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{4} \\ y = \dfrac{b}{5} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{5}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow 25a^2 + 16b^2 = 3600$$

Vậy $f(A) = \{(a;b) \in R^2 | 25a^2 + 16b^2 = 3600\}$

Các ví dụ:

***Ví dụ 5:* (Đề giữa kỳ 20191)** Cho ánh xạ

$$f: R^2 \to R, f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3$$

và $A = [0;2] \times [-1;1]$.Tìm $f(A)$.

Giải:

$f(A) = \{f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 | (x,y) \in [0;2] \times [-1;1]\}$

Đặt $g(x) = x^2 - 2x - 3$ và $h(y) = y^2 - 4y$

$\Rightarrow f(x,y) = g(x) + h(y)$

Các ví dụ:

Ví dụ 5: **(Đề giữa kỳ 20191)** Cho ánh xạ

$$f:\ R^2 \to R, f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3$$

và $A = [0;2] \times [-1;1]$.Tìm $f(A)$.

Giải: **(Tiếp)** $g(x) = x^2 - 2x - 3$

x	$-\infty$		0	1	2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		0		$+$	
$g(x)$	$-\infty$		-3	-4	-3		$+\infty$

Các ví dụ:

***Ví dụ 5:* (Đề giữa kỳ 20191)** Cho ánh xạ

$$f:\ R^2 \to R, f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3$$

và $A = [0;2] \times [-1;1]$.Tìm $f(A)$.

<u>**Giải:**</u> **(Tiếp)** $h(y) = y^2 - 4y$

y	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$h'(y)$		$-$		0	$+$
$h(y)$	$-\infty$	5	-3	-4	$+\infty$

Các ví dụ:

***Ví dụ 5:* (Đề giữa kỳ 20191)** Cho ánh xạ

$$f: R^2 \to R, f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3$$

và $A = [0;2] \times [-1;1]$.Tìm $f(A)$.

<u>**Giải:**</u> **(Tiếp)**

$$\max_{[0;2]\times[-1;1]} f(x,y) = \max_{[0;2]} g(x) + \max_{[-1;1]} h(y) = -3 + 5 = 2$$

$$\min_{[0;2]\times[-1;1]} f(x,y) = \min_{[0;2]} g(x) + \min_{[-1;1]} h(y) = -4 - 3 = -7$$

Vậy $f(A) = [-7;2]$.

Một số đề thi gần đây:

1. **(Đề giữa kỳ 20191)** Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 - 3x$ và tập $A = \left\{x \in R \middle| \frac{x-1}{2-x} \geq 0\right\}$. Xác định $f(A)$
2. **(Đề giữa kỳ 20191)** Cho ánh xạ

$$f:\ R^2 \to R, f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3$$

và $A = [0;2] \times [-1;1]$.Tìm $f(A)$.

3. **(Đề giữa kỳ 20181)** Xét ánh xạ $f: R \to R^2$ xác định bởi $f(x,y) = (x + 2y, 2x - y)$ và $A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 4\}$. Xác định $f(A)$.
4. **(Đề giữa kỳ 20201 – Việt Nhật)** Cho ánh xạ

$$f: R^2 \to R, f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$$

và $A = [-1,1] \times [0,2]$. Tìm $f(A)$

Dạng bài tập 2: Tìm tập nghịch ảnh

- ***Bài toán:***

Cho ánh xạ $\begin{aligned} f: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$ và tập $B \subset F \ (B \neq \emptyset)$

Tìm tập nghịch ảnh $f^{-1}(B)$ của B qua ánh xạ f ?

- ***Phương pháp giải:***

Áp dụng

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}}$$

Vận dụng các kiến thức về giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình để tìm ra các phần tử của $f^{-1}(B)$.

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 + 1$ .Tìm tập $f^{-1}(\{1; 2\})$.

Giải:

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{1; 2\}) = \{x \in R | f(x) \in \{1; 2\}\}$
$+ f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \in R$
$+ f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in R$

Vậy $f^{-1}(\{1; 2\}) = \{-1; 0; 1\}$

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Cho ánh xạ $f: R\backslash\{1\} \to R, f(x) = \frac{x-3}{x-1}$ .Tìm $f^{-1}\big((-1;0)\big)$.

Giải:

Tập nghịch ảnh $f^{-1}\big((-1;0)\big) = \{x \in R\backslash\{1\}\,|\,f(x) \in (-1;0)\}$

$$f(x) \in (-1;0) \Leftrightarrow -1 < \frac{x-3}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-1} + 1 > 0 \\ \dfrac{x-3}{x-1} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right. \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

Vậy $f^{-1}((-1;0)) = (2;3)$

Các ví dụ:

Ví dụ 3: Cho ánh xạ $f: R \to R^2, f(x) = (2x+1; 2x^2+x)$.

Tìm $f^{-1}(A)$ với $A = [0;3) \times (-\infty;1]$

<u>Giải:</u>

Tập nghịch ảnh

$$f^{-1}(A) = \{x \in R \,|(2x+1; 2x^2+x) \in [0;3) \times (-\infty;1]\}$$

$$\begin{cases} 2x+1 \in [0;3) \\ 2x^2+x \in (-\infty;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 2x+1 < 3 \\ 2x^2+x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{2} \le x < 1 \\ -1 \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$$

Vậy $f^{-1}(A) = [-1/2; 1/2]$

Các ví dụ:

Ví dụ 4: Cho ánh xạ $f\colon R^2 \to R^2, f(x,y) = (2x+y, x+y)$.

Tìm $f^{-1}(1;1)$

Giải:

Tập nghịch ảnh

$$f^{-1}(1;1) = \{(x,y) \in R^2 | (2x+y, x+y) = (1,1)\}$$

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \in R \\ y=1 \in R \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(1;1) = \{(0,1)\}$$

Vậy $f^{-1}(1;1) = \{(0;1)\}$

Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: R \to R^2, f(x) = (x + 4, x - 2)$.

Tìm $f^{-1}(A)$ với $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 26\}$

<u>Giải:</u>

Tập nghịch ảnh
$f^{-1}(A) = \{ x \in R |\ f(x) \in A\} = \{x \in R | (x + 4)^2 + (x - 2)^2 \leq 26\}$

Ta có:
$(x + 4)^2 + (x - 2)^2 \leq 26 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 20 \leq 26 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$

Vậy $f^{-1}(A) = [-3; 1]$

Một số đề thi gần đây:

1. **(Đề giữa kỳ 20193)** Cho $f: C \to C$ xác định bởi $f(z) = z^6$. Tìm $f^{-1}\left(\left\{\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}\right\}\right)$?
2. **(Đề giữa kỳ 20193)** Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 - 3x + 4$ và $A = (1;2]$, tìm $f(A), f^{-1}(A)$?
3. **(Đề giữa kỳ 20181)** Cho ánh xạ $f: C \to C, f(z) = z^5 + \sqrt{3}$. Tìm $f^{-1}(\{i\})$.
4. **(Đề cuối kỳ 20183)** Cho ánh xạ $f: R\backslash\{2\} \to R, f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ và $A = [-1,1]$. Tìm $f^{-1}(A)$

III. Đơn ánh, song ánh, toàn ánh:

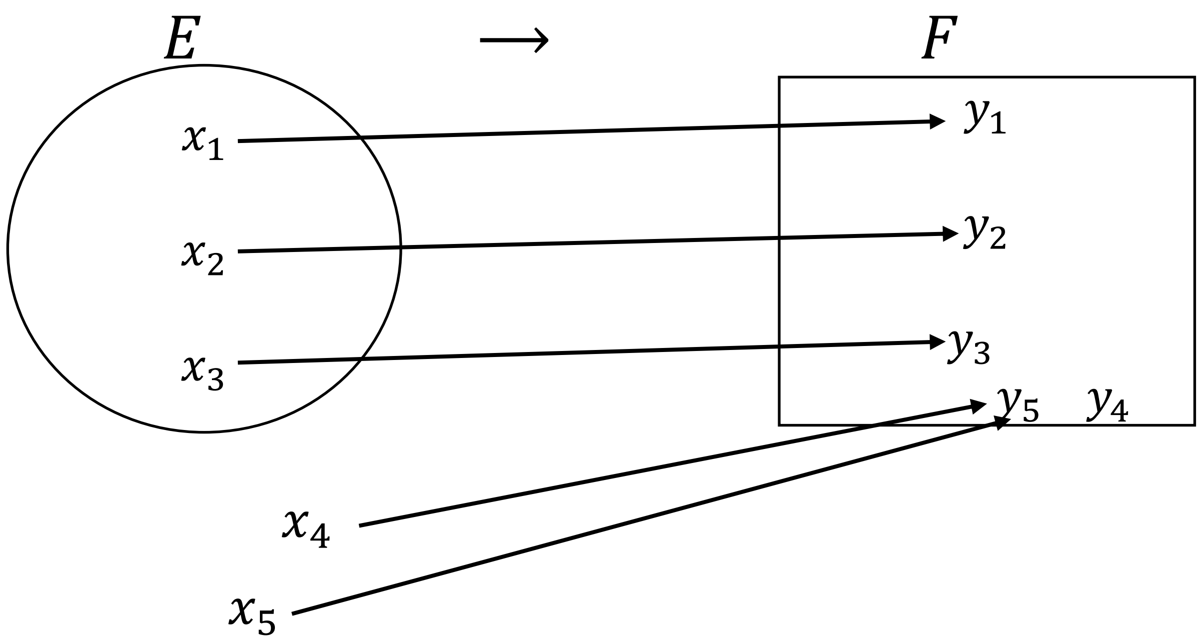
Cho ánh xạ $f: E \longrightarrow F$

1. Đơn ánh:

- Ánh xạ f được gọi là đơn ánh nếu $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Với $x_1 = x_2 \in E$

- Hay phương trình $f(x) = y$ có tối đa một nghiệm $x \in E$ với $\forall y \in F$



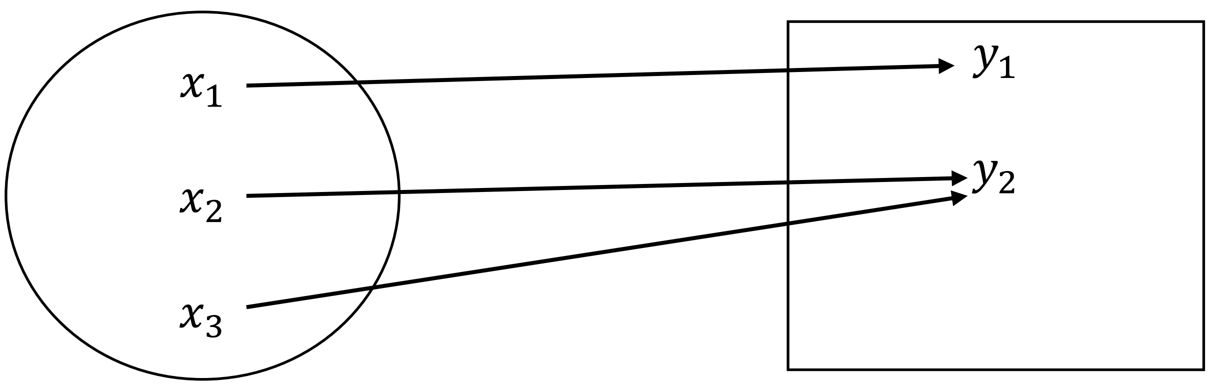
III. Đơn ánh, song ánh, toàn ánh:

Cho ánh xạ $f: E \longrightarrow F$

2. Toàn ánh:

- Ánh xạ f được gọi là toàn ánh nếu với mọi $y \in F$ luôn có tối thiểu một $x \in E$ thỏa mãn $f(x) = y$
- Hay phương trình $f(x) = y$ có tối thiểu 1 nghiệm $x \in E$ với $\forall y \in F$

$$E \qquad \longrightarrow \qquad F$$



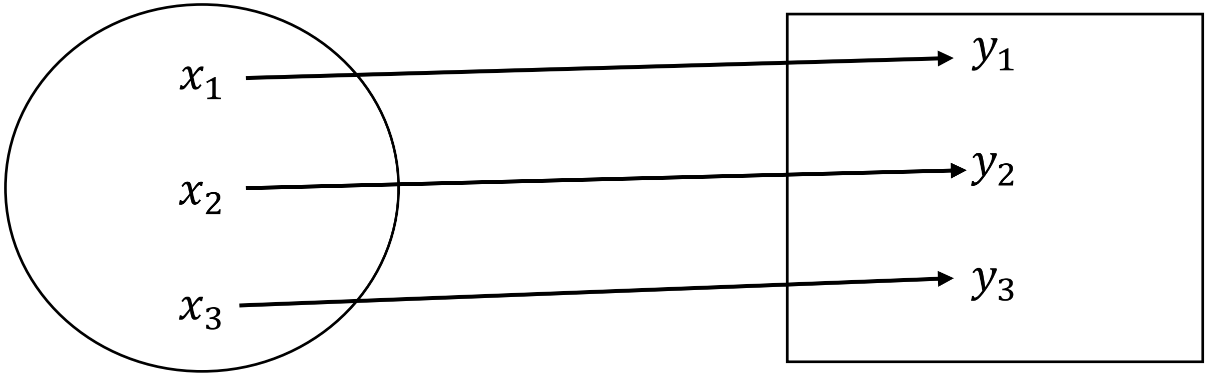
III. Đơn ánh, song ánh, toàn ánh:

Cho ánh xạ $f: E \longrightarrow F$

3. Song ánh:

- Ánh xạ f được gọi là song ánh nếu nó vừa là toàn ánh vừa là đơn ánh.
- Hay phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất $x \in E$ với $\forall y \in F$

$$E \qquad \longrightarrow \qquad F$$



Dạng bài tập 3: Phân loại ánh xạ

➢ ***Bài toán:***

Cho ánh xạ $f: E \longrightarrow F$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

Hỏi ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh hay song ánh không?

➢ ***Phương pháp giải:***

Giả sử với $\forall m \in F$, xét phương trình $f(x) = m$ $(*)$

- Nếu $(*)$ có nghiệm duy nhất $x \in E \Rightarrow f$ là song ánh.
- Nếu $(*)$ có tối đa một $x \in E \Rightarrow f$ là đơn ánh.
- Nếu $(*)$ luôn có nghiệm $x \in E$ (không quan tâm số nghiệm) $\Rightarrow f$ là toàn ánh.

*Ngoài ra với bài tập kiểm tra tính đơn ánh có thể sử dụng định nghĩa

Nếu f là đơn ánh thì $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ với $\forall x_1, x_2 \in E$

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: R\backslash\{1\} \to R, f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ có là đơn ánh không? Có là toàn ánh không? Có là song ánh không?

Giải:

Giả sử với $\forall m \in R$, xét $f(x) = m$

$$\frac{x+2}{x-1} = m \ (*)$$

Với $x \in R\backslash\{1\}$, $(*) \Leftrightarrow x + 2 = m.(x-1)$

$$\Leftrightarrow x(m-1) = 2 + m$$

TH1: $m = 1 \in R$, $(*)$ trở thành $0x = 2 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

TH2: $m \in R\backslash\{1\}, (*) \Leftrightarrow x = \frac{2+m}{m-1} \in R\backslash\{1\}$

$\Rightarrow f(x) = m$ có tối đa một nghiệm $\in R\backslash\{1\}$

Vậy $f(x)$ là đơn ánh, không là toàn ánh, không là song ánh.

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: R\backslash\{1\} \to R, f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ có là đơn ánh không? Có là toàn ánh không? Có là song ánh không?

<u>Giải:</u> ***Cách 2:***

1. Kiểm tra tính đơn ánh:

Giả sử với $x_1, x_2 \in R\backslash\{1\}$, xét $f(x_1) = f(x_2)$

Ta có:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1-1} = \frac{x_2+2}{x_2-1}$$
$$\Leftrightarrow (x_1+2)(x_2-1) = (x_2+2)(x_1-1)$$
$$\Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + 2x_x - 2 = x_1x_2 - x_2 + 2x_1 - 2$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Vậy f là đơn ánh.

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: R\backslash\{1\} \to R, f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ có là đơn ánh không? Có là toàn ánh không? Có là song ánh không?

<u>Giải:</u> ***Cách 2:***

2. Kiểm tra tính toàn ánh ánh:

Giả sử với $\forall m \in R$, xét $f(x) = m$

$$\frac{x+2}{x-1} = m\ (*)$$

Với $x \in R\backslash\{1\}$, $(*) \Leftrightarrow x + 2 = m.(x-1)$

$$\Leftrightarrow x(m-1) = 2 + m$$

Với $m = 1 \in R$, $(*)$ trở thành $0x = 2 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Vậy f không là toàn ánh.

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Cho ánh xạ $f: [1;+\infty) \to (-\infty;5], f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Hỏi f có là là toàn ánh không, có là đơn ánh không?

Giải:

Giả sử với $\forall m \in (-\infty;5]$, xét $f(x) = m$ với $x \in [1;+\infty)$

Khảo sát hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ trên $[1;+\infty)$
$f'(x) = -2x + 2. f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$+\infty$		$\boxed{1}$		$\boxed{+\infty}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

$y = m \in (4;5]$

$y = m \in (-\infty;4]$

Với $m \in (-\infty;4] \Rightarrow f(x) = m$ có một nghiệm $x \in [1;+\infty)$

$m \in (4;5] \Rightarrow f(x) = m$ không có nghiệm $x \in [1;+\infty)$

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Cho ánh xạ $f: [1; +\infty) \to (-\infty; 5], f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Hỏi f có là là toàn ánh không, có là đơn ánh không?

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Vậy $f(x) = m$ có tối đa một nghiệm $x \in [1; +\infty)$với $\forall m \in (-\infty; 5]$

$\Rightarrow f$ là đơn ánh.

Do $f(x) = m$ không có nghiệm $x \in [1; +\infty)$với $m \in (4; 5]$

$\Rightarrow f$ không là toàn ánh.

Các ví dụ:

Ví dụ 3: Cho ánh xạ: $f\colon R^2 \to C, f(x,y) = (x-y) + (x+y)i$. Hỏi f có là song ánh không?

Giải:

Giả sử $\forall m = (a+bi) \in C, a, b \in R$

Xét $f(x,y) = a + bi \Leftrightarrow (x-y) + (x+y)i = a + bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ 2x = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} \in R \\ y = \dfrac{-a}{2} + \dfrac{b}{2} \in R \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x,y) = a + bi$ có nghiệm duy nhất $(x,y) = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}; \frac{-a}{2} + \frac{b}{2}\right) \in R^2$

Vậy f là song ánh.

Các ví dụ:

Ví dụ 4: Xét sự đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ

$$f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\to[0;2]\times\left[\sqrt{2};2\right]$$

Với $f(x,y)=(2\sin x\,,2\cos y)$

Giải:

Giả sử $\forall(m,n)\in[0;2]\times\left[\sqrt{2};2\right]$

Xét $f(x,y)=(m,n)\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin x=m\\2\cos y=n\end{cases}$

Các ví dụ:

Ví dụ 4: Xét sự đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ

$$f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\rightarrow[0;2]\times\left[\sqrt{2};2\right]$$

Với $f(x,y)=(2\sin x\,,2\cos y)$

Giải: (Tiếp)

Xét $g(x)=2\sin x=m$ với $x\in[0;\pi/2]$ và $m\in[0;2]$

x	0		$\pi/2$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$ $m\in[0;2]$	2

Với $m\in[0;2]$ thì $g(x)=m$ có nghiệm duy nhất $x\in[0;\pi/2]$.

Các ví dụ:

Ví dụ 4: Xét sự đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ

$$f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\to[0;2]\times\left[\sqrt{2};2\right]$$

Với $f(x,y)=(2\sin x\,,2\cos y)$

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Xét $\mathrm{h}(y)=2\cos y=n$ với $\mathrm{y}\in[0;\pi/4]$ và $n\in\left[\sqrt{2};2\right]$

y	0		$\pi/4$
$h'(y)$		$-$	
$h(y)$	2	$\searrow$ $\quad n\in\left[\sqrt{2};2\right]$	$\sqrt{2}$

Với $n\in[0;2]$ thì $h(y)=n$ có nghiệm duy nhất $y\in[0;\pi/4]$.

Các ví dụ:

Ví dụ 4: Xét sự đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ

$$f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\rightarrow[0;2]\times\left[\sqrt{2};2\right]$$

Với $f(x,y)=(2\sin x\,,2\cos y)$

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Hệ $\begin{cases}2\sin x=m\\2\cos y=n\end{cases}$ luôn có nghiệm duy nhất $(x,y)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

với $m\in[0;2\,],n\in\left[\sqrt{2};2\right]$

Vậy f là song ánh.

Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f\colon [-1;5] \to [3;6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

Giải:

Giả sử $m \in [3;6]$, để f là song ánh

$\Leftrightarrow f(x) = m$ có nghiệm duy nhất $x \in [-1;5]$

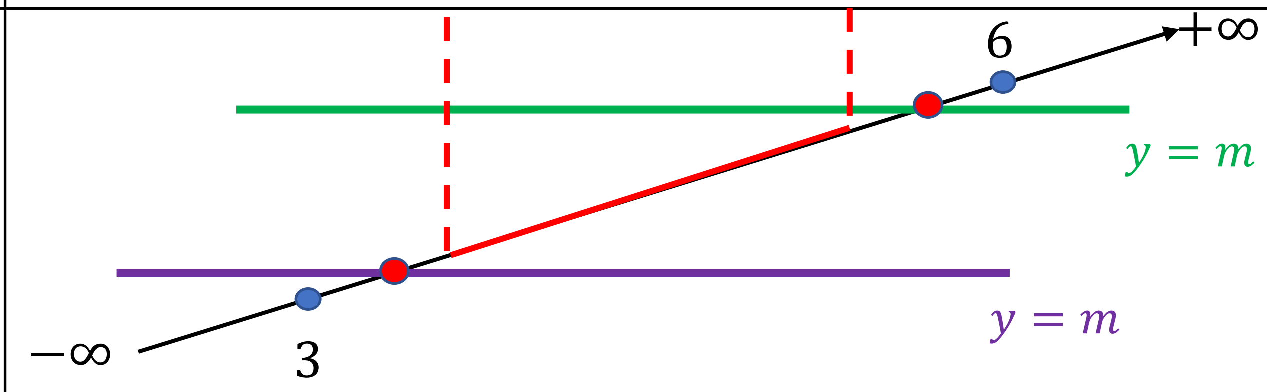
Hàm số $f(x) = ax + b$ là hàm bậc nhất nên chỉ có thể đồng biến hoặc nghịch biến trên toàn bộ tập R

Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: [-1; 5] \rightarrow [3; 6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

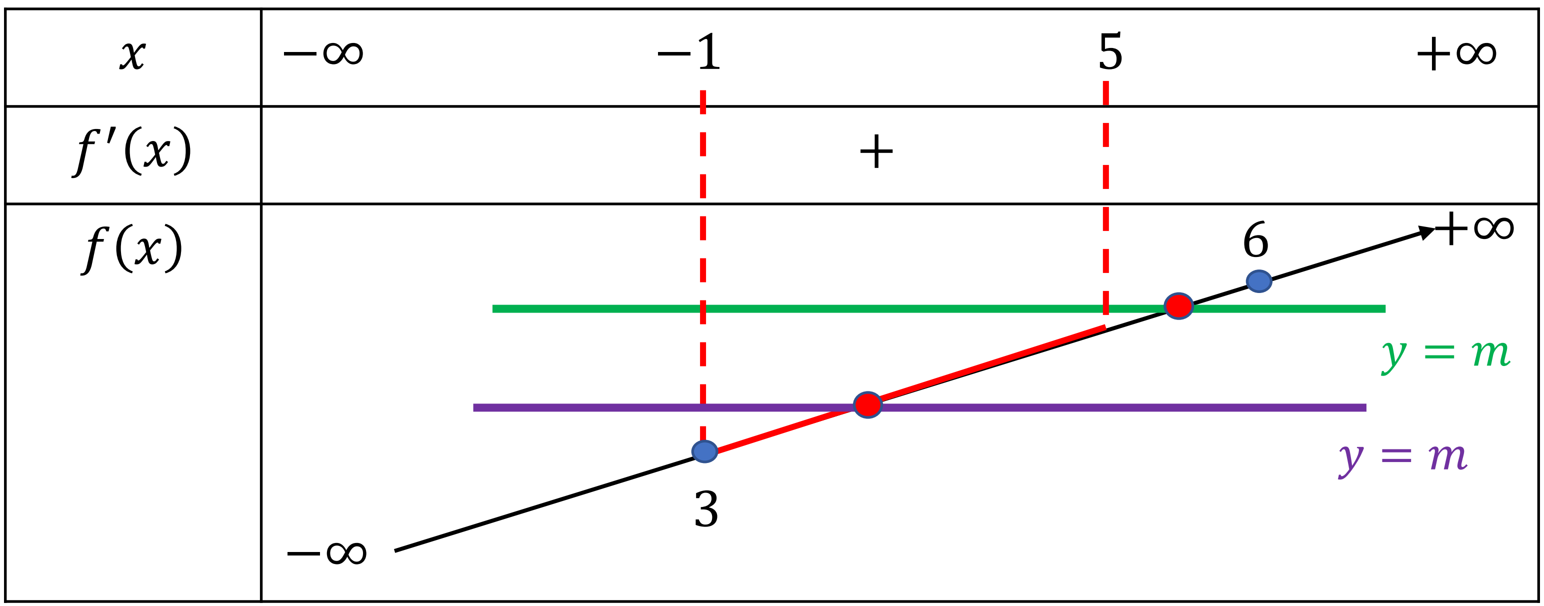
TH1: $f(x) = ax + b$ là hàm đồng biến

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 5 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	

Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: [-1; 5] \to [3; 6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

Giải: (Tiếp)

TH1: $f(x) = ax + b$ là hàm đồng biến

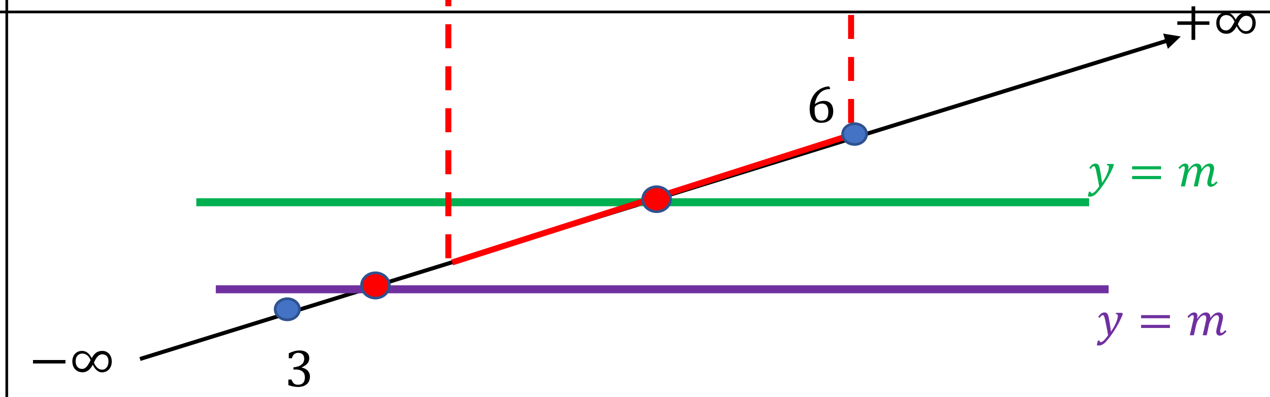


Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: [-1;5] \to [3;6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

TH1: $f(x) = ax + b$ là hàm đồng biến

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	3	6	$+\infty$

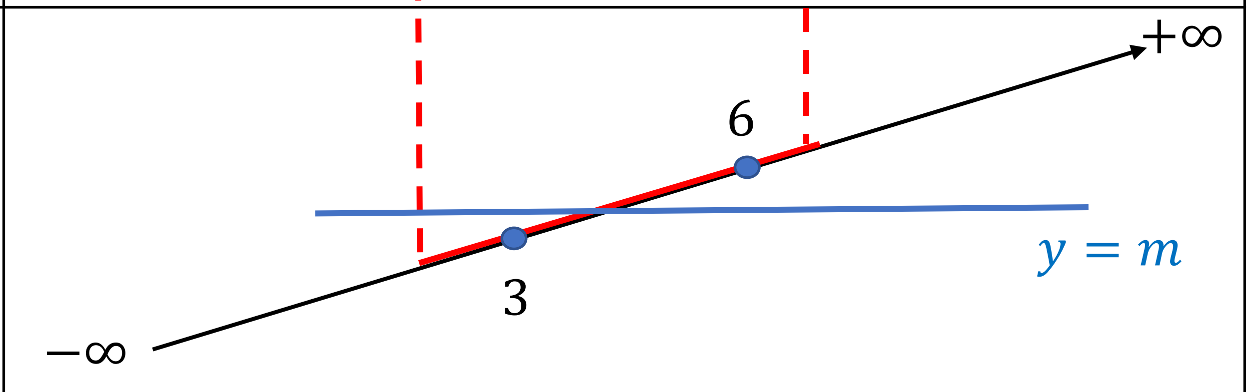


Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: [-1; 5] \to [3; 6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

TH1: $f(x) = ax + b$ là hàm đồng biến

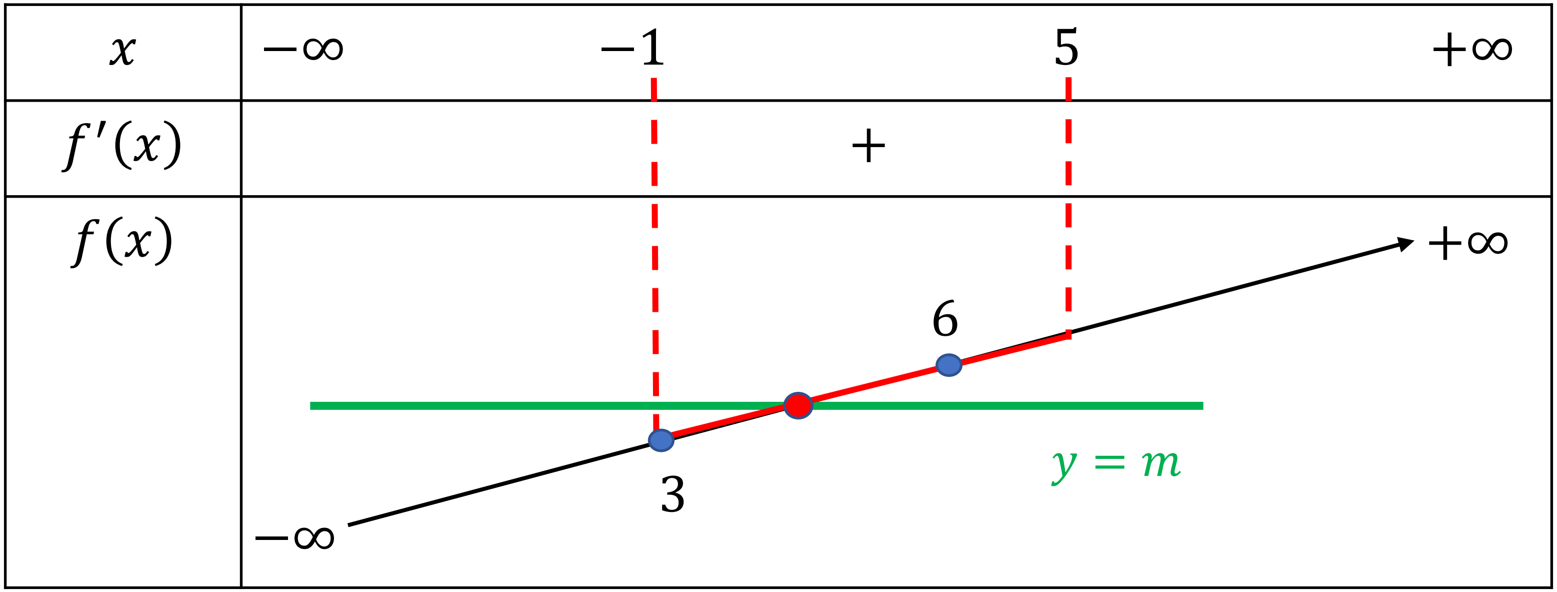
x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		
$f(x)$				

Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: [-1; 5] \to [3; 6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

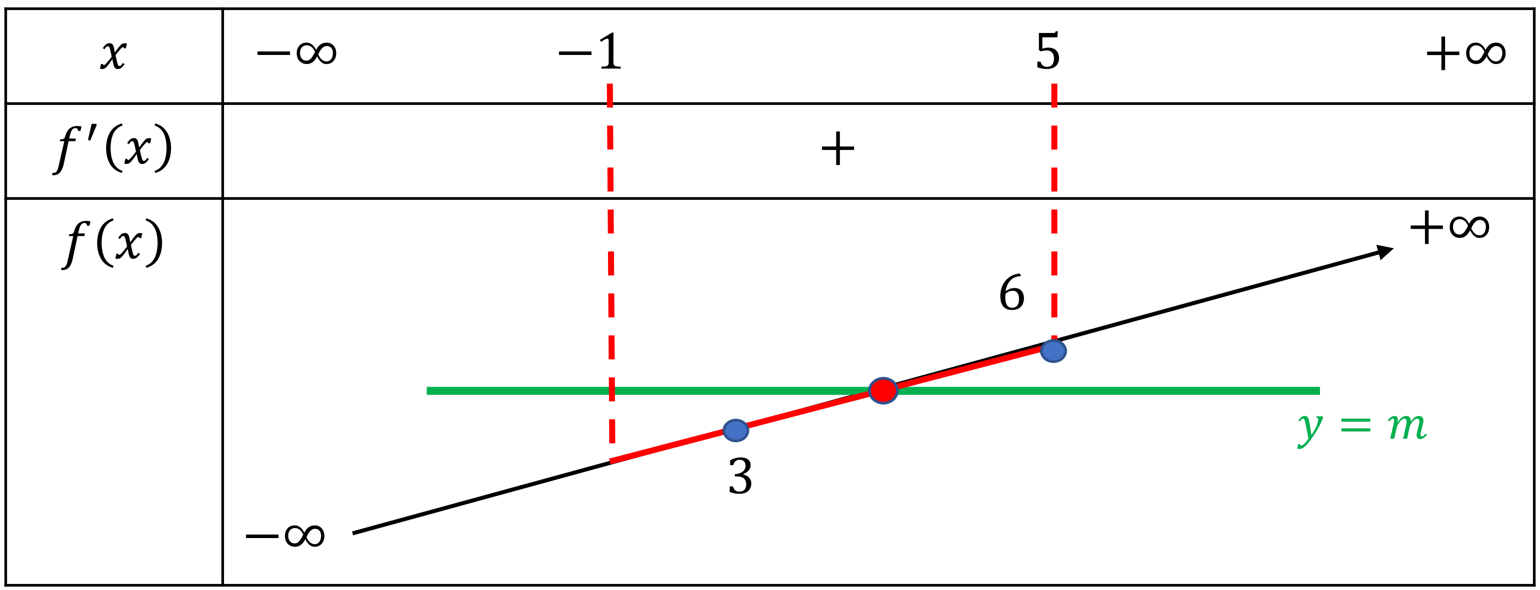
TH1: $f(x) = ax + b$ là hàm đồng biến



Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: [-1; 5] \to [3; 6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

TH1: $f(x) = ax + b$ là hàm đồng biến



Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: [-1;5] \to [3;6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

TH1: $f(x) = ax + b$ là hàm đồng biến

x	-1		5
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$			6
	3		

$m \in [3;6]$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(5) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ 5a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 7/2 \end{cases}$$

Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: [-1; 5] \to [3; 6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

<u>Giải: </u>(Tiếp)

TH2: $f(x) = ax + b$ là hàm nghịch biến

x	-1		5
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	6		3

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1) = 6 \\ f(5) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 6 \\ 5a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 11/2 \end{cases}$$

Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho ánh xạ $f: [-1; 5] \to [3; 6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Xác định a, b để f là 1 song ánh.

Giải: (Tiếp)

Vậy $(a, b) = (1/2; 7/2)$ hoặc $(a, b) = (-1/2; 11/2)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Các ví dụ:

Ví dụ 6: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x^2 - y, x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

Giải:

Cách 1:

Giả sử với $\forall m = (a,b) \in R^2$, xét $f(x,y) = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = a \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = a \ (1) \\ y = b - x \ (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được: $x^2 + x - (a + b) = 0 \ (*)$

$$\Delta = 1 - 4(-a - b) = 1 + 4a + 4b$$

Các ví dụ:

Ví dụ 6: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x^2 - y, x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

<u>Giải:</u> (Tiếp) $\boxed{\textbf{\textit{Cách 1:}}}$

TH1: $\begin{cases} a = \frac{-1-4b}{4} \\ b \in R \end{cases} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2} \in R, y = b + \frac{1}{2} \in R$

$\Rightarrow f(x,y) = m$ có nghiệm $(x,y) = \left(\frac{-1}{2}, b + \frac{1}{2}\right) \in R^2$

TH2: $\begin{cases} a > \frac{-1-4b}{4} \\ b \in R \end{cases} \Rightarrow \Delta > 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(a+b)}}{2} \in R$$

$$\Rightarrow y = b - \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(a+b)}}{2} \in R$$

TH3: $\begin{cases} a < \frac{-1-4b}{4} \\ b \in R \end{cases} \Rightarrow \Delta < 0$

$\Rightarrow (*)$ vô nghiệm

$\Rightarrow f(x,y) = m$ vô nghiệm

ĐẠI CƯƠNG MÔN PHÁI

Các ví dụ:

Ví dụ 6: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2$, $f(x,y) = (x^2 - y, x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Cách 1:

Với $\forall m = (a,b) \in R^2$ thì $f(x,y) = m$ có tối đa 2 nghiệm $(x,y) \in R^2$

$\Rightarrow f$ không là đơn ánh

Với $\begin{cases} a < \frac{-1-4b}{4} \\ b \in R \end{cases}$ thì $f(x,y) = m$ vô nghiệm

$\Rightarrow f$ không là toàn ánh

Các ví dụ:

Ví dụ 6: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x^2 - y, x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

<u>Giải:</u> (Tiếp) ***Cách 2:***

1. Kiểm tra tính đơn ánh: với $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$

Xét $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} {x_1}^2 - y_1 = {x_2}^2 - y_2 \\ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_1}^2 - {x_2}^2 = y_1 - y_2 \\ x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = y_1 - y_2 \\ x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \end{cases} \Rightarrow (y_2 - y_1)(x_1 + x_2) = -(y_2 - y_1)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = -1$

$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \end{cases} \Rightarrow f$ không là đơn ánh.

Ví dụ 6: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x^2 - y, x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

Giải: (Tiếp) ***Cách 2:***

2. Kiểm tra tính toàn ánh:

Giả sử với $\forall m = (a,b) \in R^2$, xét $f(x,y) = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = a \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = a\ (1) \\ y = b - x\ (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được: $x^2 + x - (a+b) = 0\ (*)$

$$\Delta = 1 - 4(-a-b) = 1 + 4a + 4b$$

$\begin{cases} a < \frac{-1-4b}{4} \\ b \in R \end{cases} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm $\Rightarrow f(x,y) = m$ vô nghiệm

$\Rightarrow f$ không là toàn ánh.

Các ví dụ:

Ví dụ 7: (Đề cuối kỳ 20201) Cho ánh xạ $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - mx + 1, m \in R$. Tìm điều kiện của m để f là đơn ánh

<u>Giải:</u>

Giả sử với $\forall a \in R$, xét $f(x) = a$

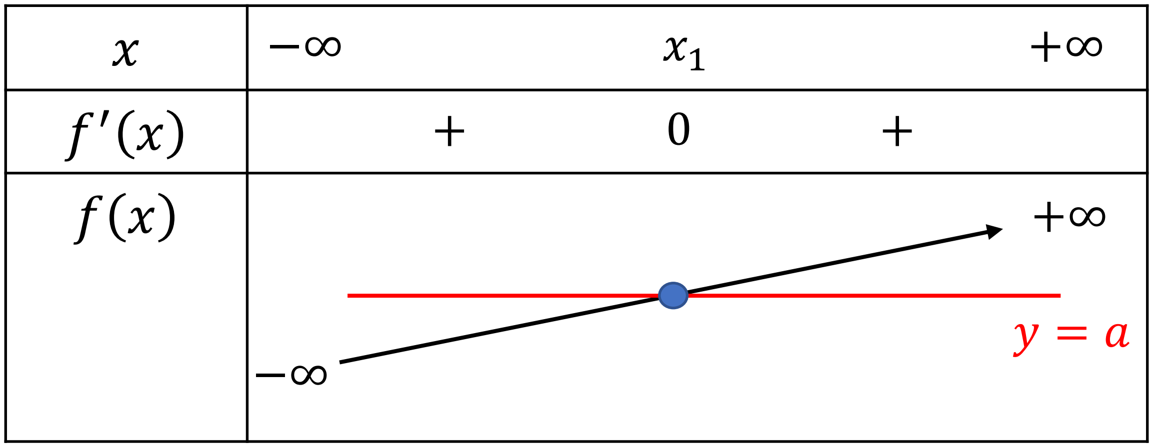
$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - mx + 1 = a\ (*)$

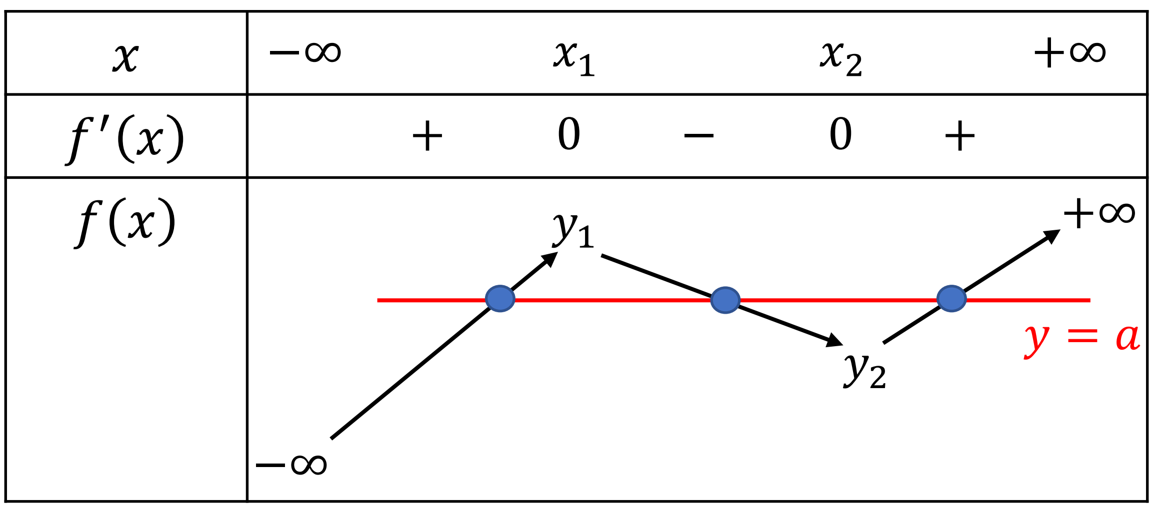
Để f là một đơn ánh $\Leftrightarrow (*)$ có tối đa một nghiệm $x \in R$ với $\forall a \in R$

Các ví dụ:

Ví dụ 7: (Đề cuối kỳ 20201) Cho ánh xạ $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - mx + 1, m \in R$. Tìm điều kiện của m để f là đơn ánh

<u>Giải:</u>





Các ví dụ:

Ví dụ 7: (Đề cuối kỳ 20201) Cho ánh xạ $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - mx + 1, m \in R$. Tìm điều kiện của m để f là đơn ánh

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Để f là một đơn ánh $\Leftrightarrow$ $(*)$ có tối đa một nghiệm $x \in R$ với $\forall a \in R$

$\Leftrightarrow f(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m > 0$

$\Leftrightarrow m < 3x^2 + 6x = g(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$
			-3		

$\boxed{m < -3}$

Các ví dụ:

Ví dụ 8: Cho ánh xạ $f: R^3 \to R^3, f(x, y, z) = (2x - y + z, x - z, x + my)$. Tìm m để f là toàn ánh.

Giải:

Giả sử $\forall (a, b, c) \in R^3$, xét $f(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = a \\ x - z = b \\ x + my = c \end{cases} \quad (*)$

Để f là toàn ánh $\Leftrightarrow f(x, y, z) = (a, b, c)$ có nghiệm với $\forall (a, b, c) \in R^3$

$\Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = a \ (1) \\ z = x - b \ (2) \\ x + my = c \ (3) \end{cases}$. Thế (2) vào (1) ta được $\begin{cases} 3x - y = a + b \\ x + my = c \end{cases}$

Các ví dụ:

Ví dụ 8: Cho ánh xạ $f: R^3 \to R^3, f(x,y,z) = (2x - y + z, x - z, x + my)$. Tìm m để f là toàn ánh.

<u>Giải:</u>

$$\xRightarrow{x=c-my} \begin{cases} (-1-3m)y = a + b - 3c \ (**) \\ x = \dfrac{a+b+y}{3} \end{cases}$$

TH1: $m = \frac{-1}{3} \Rightarrow 0y = a + b - 3c$

Với $\begin{cases} a + b - 3c \neq 0 \\ a, b, c \in R \end{cases} \Rightarrow (**)$ vô nghiệm

$\Rightarrow$ Hệ $(*)$ vô nghiệm $\Rightarrow$ Loại

Các ví dụ:

Ví dụ 8: Cho ánh xạ $f: R^3 \to R^3, f(x, y, z) = (2x - y + z, x - z, x + my)$. Tìm m để f là toàn ánh.

Giải:

TH2:

$$m \neq -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a+b-3c}{-1-3m} \\ x = \dfrac{1}{3}\left(a + b + \dfrac{a+b-3c}{-1-3m}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b-3c}{-1-3m} \in R \\ y = \dfrac{a+b-3c}{-1-3m} \in R \\ z = \dfrac{a+b-3c}{-1-3m} - b \in R \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm $(x, y, z) \in R^3$ với $\forall (a, b, c) \in R^3$

Một số đề thi gần đây

1. (Đề giữa kỳ 20193) Cho ánh xạ

$$f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x + y^6; -x + y^3)$$

Ánh xạ trên có phải đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

2. (Đề cuối kỳ 20191) Cho ánh xạ

$$f: R^2 \to C, f(x,y) = (x^3 + 2y^2) + (3x^3 + 7y)i$$

có toàn ánh không? Vì sao?

3. (Đề giữa kỳ 20201) Cho ánh xạ $f: R^3 \to R^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x + y - z; 2x - y; x - my + z), m \text{ là tham số}$$

Tìm m để f là song ánh.

4. (Đề cuối kỳ 20191) Với $a > 0$, ký hiệu $C_{[-a,a]} = \{f(x) | \, f(x)$ liên tục trên $[-a, a]\}$. Ánh xạ $\Phi: C_{[-a,a]} \to R, \Phi(f) = \int_{-a}^{a} f(x)dx$ có là đơn ánh không? Vì sao?

Dạng bài tập 4: Tìm tập nguồn/tập đích thỏa mãn yêu cầu

➢ ***Bài toán:***

Cho ánh xạ: $f: E \to F$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Đề bài cho biết cụ thể hàm số $y = f(x)$ và một trong hai tập E hoặc F

$\to$ Yêu cầu tìm tập còn lại để ánh xạ thỏa mãn điều kiện là song ánh, toàn ánh hoặc đơn ánh.

Dạng bài tập 4: Tìm tập nguồn/tập đích thỏa mãn yêu cầu

➢ ***Phương pháp giải:***

Chủ yếu khảo sát hàm số, lập bảng biến thiên để quan sát

→ Chọn miền phù hợp với yêu cầu

Giả sử $\forall m \in F$, xét $f(x) = m$ $(*)$

- f là song ánh ⇒ Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ để biện luận miền E hoặc F phù hợp để $(*)$ có nghiệm duy nhất $x \in E$
- f là toàn ánh ⇒ Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ để biện luận miền E hoặc F phù hợp để $(*)$ luôn có nghiệm $x \in E$
- f là đơn ánh ⇒ Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ để biện luận miền E hoặc F phù hợp để $(*)$ có tối đa một nghiệm $x \in E$

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ f: [m; 2] → $R, f(x) = \mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 - 9\mathrm{x} + 1$. Tìm m để f là đơn ánh.

<u>Giải:</u>

Giả sử: $\forall a \in R$, để f là đơn ánh $\Leftrightarrow f(x) = a$ có tối đa một nghiệm $x \in [m; 2]$

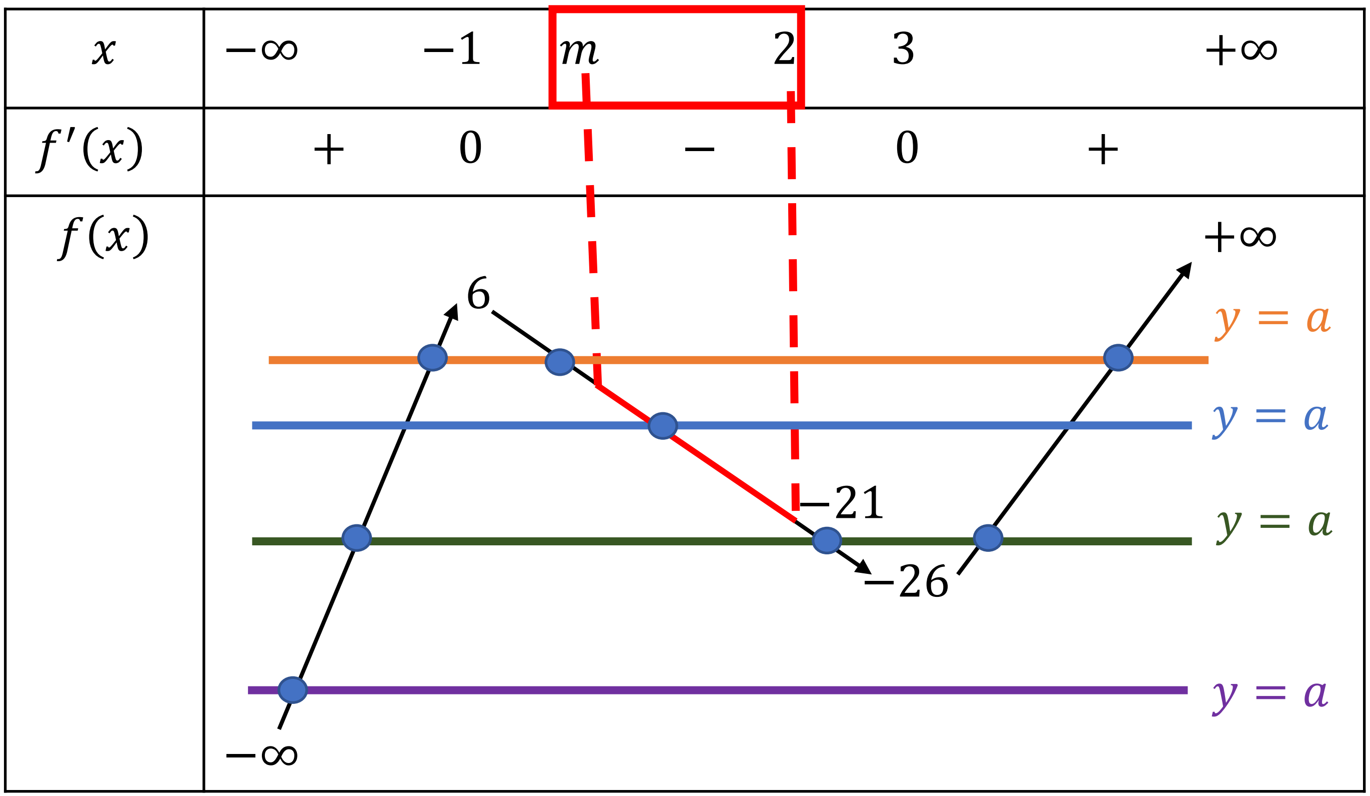
Khảo sát hàm $f(x) = \mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 - 9\mathrm{x} + 1$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: [\mathrm{m}; 2] \to R, f(x) = \mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 - 9\mathrm{x} + 1$. Tìm m để f là đơn ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

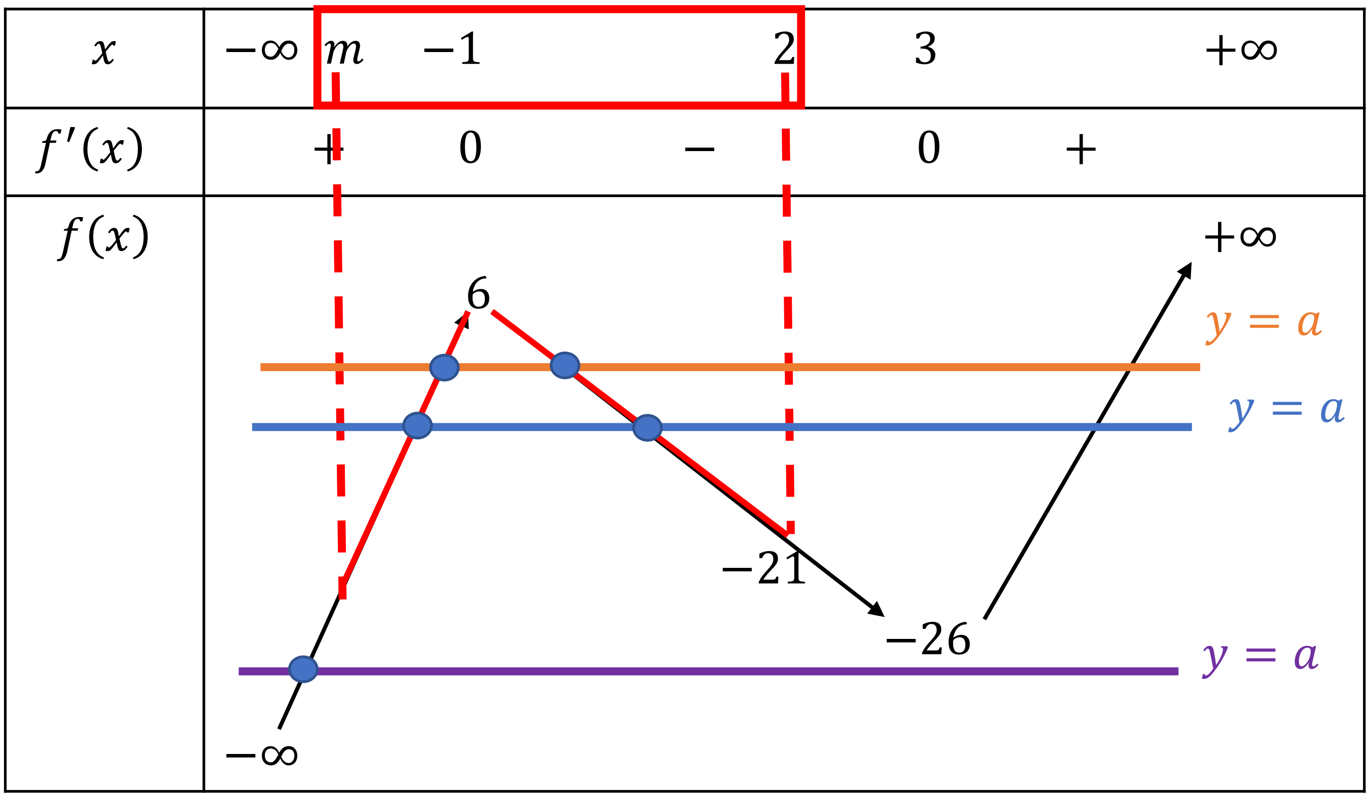


Với $m \in [-1; 2)$ thì $f(x) = a$ có tối đa 1 nghiệm $\mathrm{x} \in [m; 2]$

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: [\mathrm{m}; 2] \to R, f(x) = \mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 - 9\mathrm{x} + 1$. Tìm m để f là đơn ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)



Với $m < -1$ thì $f(x) = a$ có tối đa 2 nghiệm $\mathrm{x} \in [m; 2]$

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: [\mathrm{m}; 2] \to R, f(x) = \mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 - 9\mathrm{x} + 1$. Tìm m để f là đơn ánh.

Giải: (Tiếp)

Vậy $m \in [1; 2)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ

$f: A \to [-1;1] \times (0;+\infty);\ f(x,y) = (\sin x, e^y)$ là song ánh.

Giải:

Đặt $A = A_1 \times A_2\ (A_1, A_2 \subset R)$

Giả sử $(m,n) \in [-1;1] \times (0;+\infty)$, để f là song ánh

$\Leftrightarrow f(x,y) = (m,n) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = m \\ e^y = n \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x,y) \in A$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = m \text{ có nghiệm duy nhất } x \in A_1 \text{ với } m \in [-1;1] \\ e^y = n \text{ có nghiệm duy nhất } y \in A_2 \text{ với } n \in (0;+\infty) \end{cases}$$

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ

$f: A \to [-1;1] \times (0;+\infty);\ f(x,y) = (\sin x, e^y)$ là song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Xét $\sin x = \mathrm{m}$ với $m \in [-1;1]$

Đặt $\mathrm{g}(x) = \sin x \ \Rightarrow g'(x) = \cos x$

Khảo sát hàm $\mathrm{g}(x)$ trong khoảng $[0;2\pi]$

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ

$f: A \to [-1;1] \times (0;+\infty);\ f(x,y) = (\sin x\,, e^y)$ là song ánh.

<u>**Giải:**</u> **(Tiếp)**

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ

$f: A \rightarrow [-1;1] \times (0;+\infty);\ f(x,y) = (\sin x\,, e^y)$ là song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

$\boxed{A_1}$

x	0		$[\pi/2$		$3\pi/2]$		2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

$y = m$

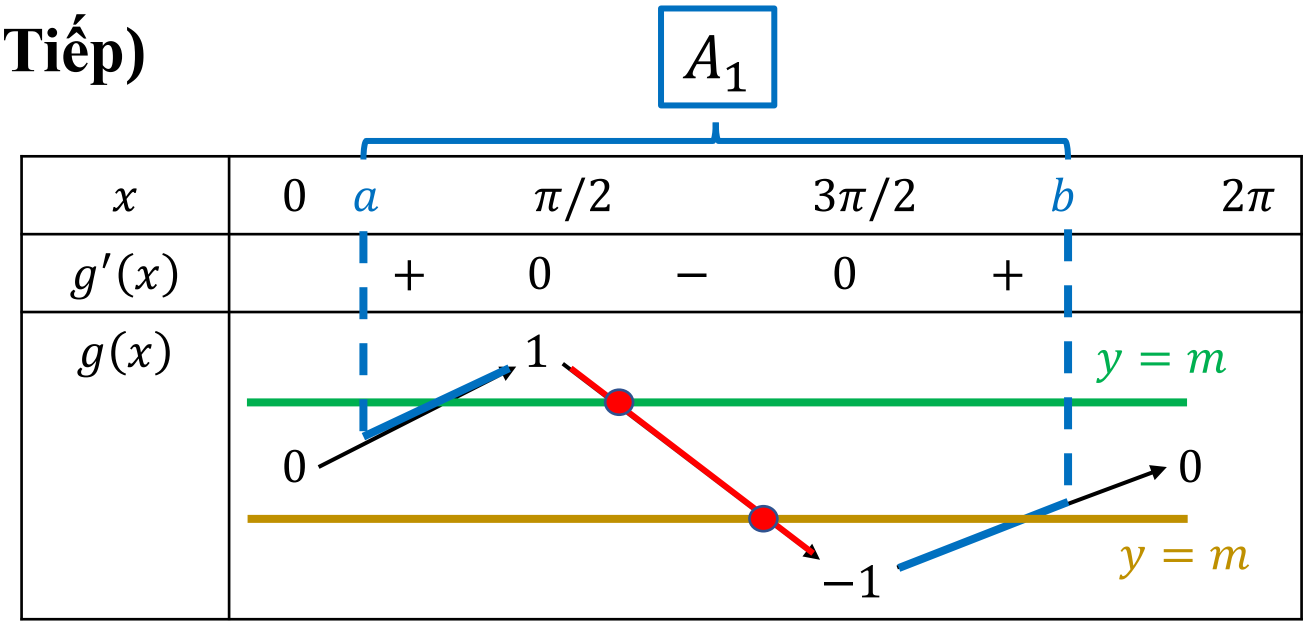
Với $m \in [-1;1]$, $g(x) = \sin x$ có nghiệm duy nhất $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$

Chọn $A_1 = [\pi/2; 3\pi/2]$

Ví dụ 2: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ

$f: A \to [-1;1] \times (0;+\infty);\ f(x,y) = (\sin x, e^y)$ là song ánh.

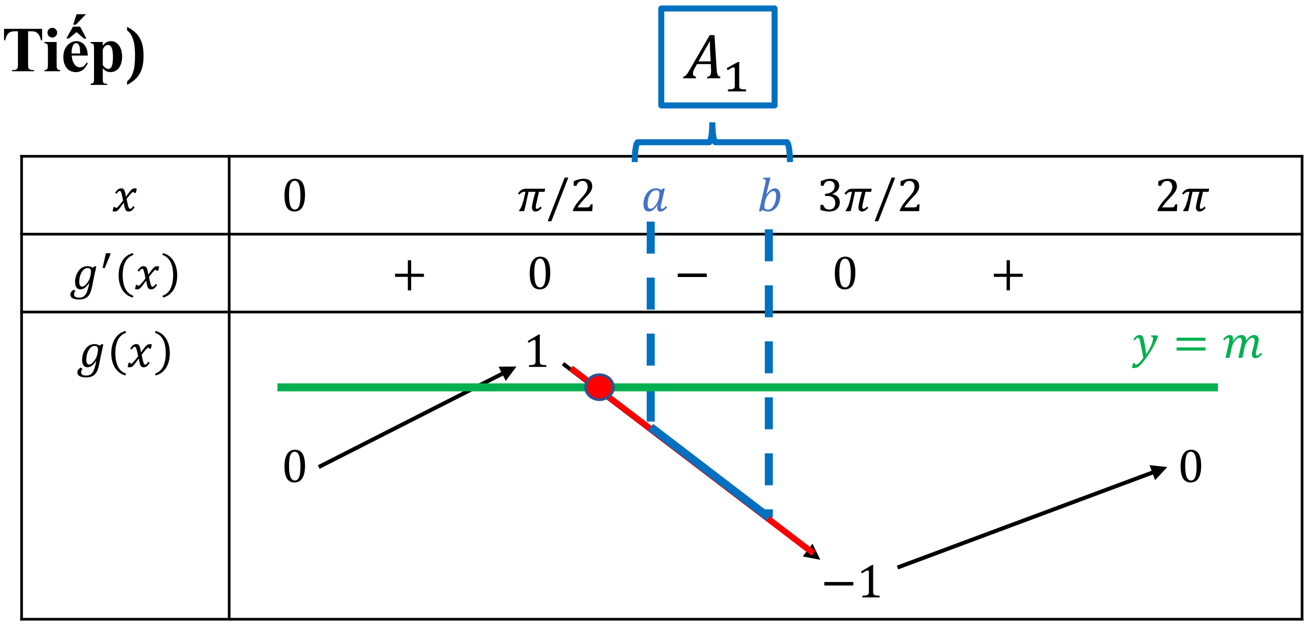
<u>**Giải:**</u> **(Tiếp)**



Ví dụ 2: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ

$f: A \to [-1;1] \times (0;+\infty);\ f(x,y) = (\sin x\,, e^y)$ là song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)



Các ví dụ:

Ví dụ 2: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ

$f: A \to [-1;1] \times (0;+\infty);\ f(x,y) = (\sin x, e^y)$ là song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

Xét $\sin x = \mathrm{m}$ với $m \in [-1;1]$

Đặt $\mathrm{h}(y) = \mathrm{e}^{\mathrm{y}} \Rightarrow h'(y) = \mathrm{e}^{\mathrm{y}}$

Khảo sát hàm $\mathrm{h}(y)$ trong khoảng trên tập R.

Các ví dụ:

Ví dụ 2: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ

$f: A \to [-1;1] \times (0;+\infty);\ f(x,y) = (\sin x, e^y)$ là song ánh.

<u>Giải:</u> (Tiếp)

y	$-\infty$	$+\infty$
$h'(y)$	$+$	
$h(y)$	0	$+\infty$
	$y = m$	

Với n $\in (0;+\infty)$, h$(y) = e^y$ có nghiệm duy nhất y $\in R$

Chọn $A_2 = R$

Vậy $A = [\pi/2; 3\pi/2] \times R$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Một số đề thi gần đây:

1. **(Đề giữa kỳ 20191)** Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho ánh xạ $f: [m, 2] \to [0,4], f(x) = x^2$ là một toàn ánh nhưng không phải đơn ánh.
2. **(Đề cuối kỳ 20191-CTTT)** Cho $f(x) = x^2 + x + 1$. Tìm a sao cho $f: R \to [a; +\infty)$ là toàn ánh.
3. **(Đề giữa kỳ 20151)** Tìm $A \subset R^2$ để ánh xạ:

$$f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, \pi] \to A, f(x, y) = (\sin x + \cos x, 2\cos y)$$

là một song ánh.

Dạng bài tập 5: Ánh xạ ngược

➢ ***Bài toán:***

Cho ánh xạ $f: E \to F$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Hỏi f có ánh xạ ngược không ? Tìm ánh xạ ngược đó (f^{-1})?

➢ ***Phương pháp giải:***

- f có ánh xạ ngược $\Leftrightarrow$ f là song ánh.
- Ánh xạ ngược : $f^{-1}: F \to E$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

- Vận dụng kiến thức chứng minh song ánh, tìm hàm số ngược.

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: (1; +\infty) \to (2; +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Hỏi f có ánh xạ ngược không? Nếu có, tìm ánh xạ ngược đó.

Giải:

Giả sử với $\forall m \in (2; +\infty)$, xét $f(x) = m \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = m\ (*)$

Khảo sát $f(x)$ với $x \in (1; +\infty)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$ $y = m$

Với $\forall m \in (2; +\infty)$, $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất $x \in (1; +\infty)$

$\Rightarrow f$ là song ánh $\Rightarrow$ Có tồn tại ánh xạ ngược.

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ánh xạ $f: (1; +\infty) \to (2; +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Hỏi f có ánh xạ ngược không? Nếu có, tìm ánh xạ ngược đó.

Giải: (Tiếp)

Với $x \in (1; +\infty), y \in (2; +\infty)$ xét:

$$y = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 - y = 0$$

$$\Delta' = 1 - (3 - y) = y - 2$$

Với $y \in (2; +\infty) \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{y-2} \\ x = 1 - \sqrt{y-2} \text{ (loại do } x > 1) \end{array}\right.$

Vậy $f^{-1}: (2; +\infty) \to (1; +\infty)$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y-2}$$

Một số đề thi gần đây:

(Đề giữa kỳ 20202) Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (x^3, x^2 + y)$. Chứng minh f là một song ánh và tìm ánh xạ ngược của f.

IV. Ánh xạ tích:

Cho ánh xạ : $f: E \to F$ và $g: F \to H$

$$x \mapsto y = f(x) \qquad\qquad x \mapsto y = g(x)$$

Khi đó ánh xạ tích $f \circ g$ được xác định như sau :

$$f \circ g: \ E \to H$$

$$x \mapsto y = f\big(g(x)\big)$$

Các ví dụ:

Ví dụ: Cho ánh xạ : $f: R \to R$ $\quad g: F \to H$

$$x \mapsto y = f(x) = x^2 + x$$

$$g: R \to R$$

$$x \mapsto y = g(x) = 2x$$

Tìm $f \circ g$?

Giải:

$$f \circ g: \ R \to R$$

$$x \mapsto y = f\left(g(x)\right) = 4x^2 + 2x$$

ĐẠI CƯƠNG MÔN PHÁI

IV. Ánh xạ tích

Các dạng bài tập của ánh xạ tích tương đồng với các dạng bài tập của ánh xạ thông thường, chỉ khác ở bước đầu tiên từ các ánh xạ đề bài cho chúng ta tìm ra ánh xạ tích, sau đó các bước làm bài tương tự các dạng bài đã trình bày trong những slide trước.

ĐẠI CƯƠNG MÔN PHÁI

Ví dụ: (Đề giữa kỳ 20201) Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 - 4x$. Xác định $(f \circ f)(x)$ và tính $(f \circ f)^{-1}(\{0\})$

Giải:

$$f \circ f: R \to R$$

$$x \to (f \circ f)(x) = (x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x)$$

$$(f \circ f)^{-1}(\{0\}) = \{x \in R | (f \circ f)(x) = 0\}$$

$$= \{x \in R | (x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x)\}$$

$$(x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = 4 \\ x^2 - 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 2 \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy $(f \circ f)^{-1}(\{0\}) = \{0; 4; 2 \pm 2\sqrt{2}\}$

Tổng kết:

Các dạng bài chính cần nắm vững:

- ***Dạng 1:*** Tìm tập ảnh.
- ***Dạng 2:*** Tìm tập nghịch ảnh.
- ***Dạng 3:*** Phân loại ánh xạ (Đơn ánh, song ánh, toàn ánh).
- ***Dạng 4:*** Tìm tập nguồn/Tập đích thỏa mãn ánh xạ là đơn ánh, song ánh hoặc toàn ánh.
- ***Dạng 5:*** Ánh xạ ngược.
- ***Dạng 6:*** Ánh xạ tích.

Have a good understanding!