BÀI TẬP ÁNH XẠ

Câu 1: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 + 3x - 4$ và $A = \{0; -6\}$. Xác định $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Câu 2: Cho ánh xạ $f: R\backslash\{1\} \to R,\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Xác định $f^{-1}((0; 2])$.

Câu 3: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = 3x^3 + 3.$ Tìm $f([0,2])$ và $f^{-1}([0,2])$.

Câu 4: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^3 - x$. Xác định a, b biết $f^{-1}(\{a\}) = \{0; -1; b\}$.

Câu 5: Cho ánh xạ $f: C \to C, f(z) = z^6 - i\sqrt{3}$. Tìm $f^{-1}(\{1\})$.

Câu 6: Cho ánh xạ $f: C \to C, f(z) = iz^2 + (2 - 5i)z - 3$. Tìm $f^{-1}(\{-9i\})$

Câu 7: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 + 2x + 6$. Tìm $f(R)$

Câu 8: Cho ánh xạ $f: R \to R^2; f(x) = (x + 4; x - 2)$ và $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 26\}$.

Tìm $f^{-1}(A), f(R)$

Câu 9: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^3 - 3x$. Tìm $f(A)$ và $f^{-1}(A)$ biết $A = (-2; 2]$.

Câu 10: Cho ánh xạ $f: R \to R$ xác định bởi $f(x) = 5x^3 + 1$. Xét xem f là đơn ánh, toàn ánh không?

Câu 11: Cho ánh xạ $f: R \to R^2, f(x) = (x^2 - 4; x^3 + 1)$. Hỏi f có là đơn ánh không?

Câu 12: Cho ánh xạ $f: R \to R^2, f(x) = (2x + 1; x - 3)$. Hỏi f có là toàn ánh không?

Câu 13: Cho ánh xạ $f: R\backslash\{1\} \to R,\ f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ có là đơn ánh không? Có là toàn ánh không?

Cho $A = [2; 5]$ xác định $f(A)$ và $f^{-1}(A)$

Câu 14: Cho ánh xạ $f: C \to C, f(z) = 2z^3 - 1$. Ánh xạ f có là đơn ánh hay không? Xác định tích các mô đun của các phần tử trong tập $f^{-1}(\{5 + 2i\})$

Câu 15: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (3x + 4y, y^3)$. Hỏi f có là song ánh không?

Câu 16: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = 3x^2 - x - 2$. Hỏi f có là song ánh không? Tìm $f([0; 3])$

Câu 17: Cho ánh xạ $f: N \to N, f(x) = 2x + 1$. Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?

Câu 18: Cho ánh xạ $f: Z\backslash\{-1\} \to Z\backslash\{0\},\ f(x) = \dfrac{2}{x+1}$. Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?

Câu 19: Cho ánh xạ $f: C \to R,\ f(x) = x^2 + 2$. Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?

Câu 20: Cho ánh xạ: $f: R^2 \to C, f(x, y) = (x + 2y) + (y - 2x)i$. Hỏi f có là song ánh không?

Câu 21: Cho $A = \{(x, y) \in R^2 | y \geq 0\}$ và ánh xạ $f: R^2 \to A$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, y^2)$. Ánh xạ f có phải là toàn ánh không? Vì sao?

Câu 22: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x_1, x_2) = (4x_1, 5x_2)$. Chứng minh f là một song ánh. Xác định $f(A)$ với $A = \{(x_1; x_2) \in R^2 | {x_1}^2 + {x_2}^2 = 9\}$

Câu 23: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$ và $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. Tìm a biết $f^{-1}(A) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 = a\}$

Câu 24: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (2x - 1, x + y)$ và $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. Phần tử (1,0) có thuộc $f(A)$ không? Vì sao?

Câu 25: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$ và $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 9\}$. Tìm $f^{-1}(A), f(A)$.

Câu 26: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (2x, 3y)$ và $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Tìm $f^{-1}(A), f(A)$.

Câu 27: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2; f(x, y) = (x^3 + 2y; 3x^3 + 7y)$

a) CMR: f là song ánh
b) Cho $A = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$. Tìm $f(A)$.

Câu 28: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (x^3, x^2 + y)$ có là một song ánh hay không?

Câu 29: Xét sự đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ

$$f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \to [0; 2] \times \left[\sqrt{2}; 2\right] \text{ với } f(x, y) = (2\sin x ; 2\cos y)$$

Câu 30: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (x - 2y; 2x + y)$; $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 45\}$

Chứng minh rằng f là song ánh. Tìm $f(A), f^{-1}(A)$

Câu 31: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (x + ay, x - y)$. Xác định tất cả giá trị của a để f là một song ánh.

Câu 32: Cho ánh xạ $f: [-1; 5] \to [3; 6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Tìm a, b để f là song ánh.

Câu 33: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ $f: \mathrm{A} \to [-1; 1] \times (0; +\infty), f(x, y) = (\cos x , e^y)$ là song ánh.

Câu 34: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ

$$f: \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \to A; f(x, y) = (2\sin x , \sin y + \cos y)$$

là một song ánh.

Câu 35: Cho ánh xạ $f: [a; b] \to [-2; 4], f(x) = -3x + 1$. Tìm a, b để f là song ánh.

Câu 36: Cho ánh xạ $f: R^3 \to R^3, f(x,y,z) = (2x - y + z, x - z, x + my)$. Tìm m để f là toàn ánh.

Câu 37: Cho ánh xạ $f: [m; 2] \to R; f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Tìm m để f là đơn ánh.

Câu 38: (Đề giữa kỳ 20201) Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x^3, x^2 + y)$. Chứng minh f là một song ánh và tìm ánh xạ ngược của f.

Câu 39: (Đề giữa kỳ 20191) Ký hiệu M_{1x2} là tập hợp các ma trận có kích thước 1×2. Tìm m để ánh xạ $f: M_{1x2} \to M_{1x2}$ với $f(X) = X\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & m \end{bmatrix}$ là đơn ánh.

Câu 40: (Đề giữa kỳ 20191) Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho ánh xạ $f: [m, 2] \to [0,4]$, $f(x) = x^2$ là một toàn ánh nhưng không phải đơn ánh.

Câu 41: (Đề giữa kỳ 20193) Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x + y^6; -x + y^3)$. Ánh xạ trên có phải đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

Câu 42: (Đề cuối kỳ 20191) Cho ánh xạ $f: R^2 \to C, f(x,y) = (x^3 + 2y^2) + (3x^3 + 7y)i$ có toàn ánh không? Vì sao?

Câu 43: (Đề cuối kỳ 20191) Với $a > 0$, ký hiệu $C_{[-a,a]} = \{f(x) |\ f(x) \text{ liên tục trên } [-a,a]\}$

Ánh xạ $\Phi: C_{[-a,a]} \to R, \Phi(f) = \int_{-a}^{a} f(x)dx$ có là đơn ánh không? Vì sao?

Câu 44: (Đề cuối kỳ 20191-CTTT) Cho $f(x) = x^2 + x + 1$. Tìm a sao cho $f: R \to [a; +\infty)$ là toàn ánh.

Câu 45: (Đề giữa kỳ 20201 – Việt Nhật) Cho ánh xạ $f: R^2 \to R, f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$ và $A = [-1,1] \times [0,2]$. Tìm $f(A)$

LỜI GIẢI BÀI TẬP ÁNH XẠ

Câu 1: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 + 3x - 4$ và $A = \{0; -6\}$ Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Giải:

Tập ảnh $f(A) = \{y = f(x) \in R \mid x \in A\} \Leftrightarrow f(A) = \{y = x^2 + 3x - 4 | x \in \{0; -6\}\}$

Với $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -4 \in R$

Với $x = -6 \Rightarrow y = f(-6) = 14 \in R$

Vậy $f(A) = \{-4; 14\}$.

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(A) = \{x \in R | f(x) \in A\} \Leftrightarrow f^{-1}(A) = \left\{x \in R | (x^2 + 3x - 4) \in \{0; -6\}\right\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -4$

$f(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = -6 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -2$

Vậy $f^{-1}(A) = \{-4; -2; \pm 1\}$.

Câu 2: Cho ánh xạ $f: R \backslash \{1\} \to R,\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Xác định $f^{-1}((0; 2])$.

Giải:

$$f^{-1}\big((0; 2]\big) = \left\{x \in R \backslash \{1\} \middle| f(x) = \frac{x+1}{x-1} \in (0; 2]\right\}$$

$$0 < \frac{x+1}{x-1} \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} > 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} - 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x < 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x < -1 \end{array}\right.$$

Vậy $f^{-1}\big((0; 2]\big) = (-\infty, -1) \cup [3; +\infty)$

Câu 3: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = 3x^3 + 3.$ Tìm $f([0,2])$ và $f^{-1}([0,2])$

Giải:

Tập ảnh $f([0; 2]) = \{f(x) \in R | x \in [0; 2]\} = \{f(x) = 3x^3 + 3 | 0 \le x \le 2\}$

Khảo sát hàm số $f(x) = 3x^3 + 3$ với $0 \le x \le 2$

BBT:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$		3	$\nearrow$	27	

Vậy $f([0,2]) = [3:27]$

Tập nghịch ảnh $f^{-1}([0;2]) = \{x \in R | f(x) \in [0;2]\}$

$\begin{cases} 3x^3 + 3 \geq 0 \\ 3x^3 + 3 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq \dfrac{-1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}([0;2]) = \left[-1; \dfrac{-1}{\sqrt[3]{3}}\right]$

Câu 4: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^3 - x$. Xác định a, b biết $f^{-1}(\{a\}) = \{0; -1; b\}$

Giải:

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{a\}) = \{x \in R | f(x) = x^3 - x = a\} = \{-1; 0; b\}$

$\Rightarrow$ Phương trình $x^3 - x = a$ có tập nghiệm là $\{-1; 0; b\}$.

Thay $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$ vào $x^3 - x = a$ ta thu được $a = 0$

Với $a = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0$ có tập nghiệm là $\{-1; 0; 1\}$.

Vậy $a = 0, b = 1$.

Câu 5: Cho ánh xạ $f: C \to C, f(z) = z^6 - i\sqrt{3}$. Tìm $f^{-1}(\{1\})$.

Giải:

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{1\}) = \{z \in C | f(z) = z^6 - i\sqrt{3} = 1\}$

Ta có: $z^6 - i\sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{1 + i\sqrt{3}}$

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sqrt[6]{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{6}\right) \left(k = \overline{0,5}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \left\{\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{6}\right) \middle| k = \overline{0,5}\right\}$$

Câu 6: Cho ánh xạ $f: C \to C, f(z) = iz^2 + (2 - 5i)z - 3$. Tìm $f^{-1}(\{-9i\})$

Giải:

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{-9i\}) = \{z \in C | f(z) = -9i\} = \{z \in C | iz^2 + (2 - 5i)z - 3 = -9i\}$

Xét $iz^2 + (2 - 5i)z - 3 + 9i = 0$ có $\Delta = 15 - 8i = (4 - i)^2$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{-2 + 5i + 4 - i}{2i} = 2 - i\,;\ z_2 = \frac{-2 + 5i - 4 + i}{2i} = 3 + 3i$$

Vậy $f^{-1}(\{-9i\}) = \{2 - i; 3 + 3i\}$.

Câu 7: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^2 + 2x + 6$. Tìm $f(R)$

Giải:

Tập ảnh $f(R) = \{f(x) \in R \mid x \in R\}$

Khảo sát hàm $f(x) = x^2 + 2x + 6$ với $x \in R$

BBT:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $f(R) = [5; +\infty)$

Câu 8: Cho ánh xạ $f: R \to R^2; f(x) = (x + 4; x - 2)$. Giả sử $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 26\}$. Tìm $f^{-1}(A), f(R)$

Giải:

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(A) = \{x \in R | f(x) \in A\} = \{x \in R | (x + 4)^2 + (x - 2)^2 \leq 26\}$

Ta có: $(x + 4)^2 + (x - 2)^2 \leq 26 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 20 \leq 26 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$

Vậy $f^{-1}(A) = [-3; 1]$

Tập ảnh $f(R) = \{f(x) = (x + 4; x - 2) \in R^2 |\ x \in R\}$

Đặt $\begin{cases} a = x + 4 \\ b = x - 2 \end{cases} \Rightarrow a - b = 6$ với $a \in R, b \in R$

Vậy $f(R) = \{(a, b) \in R^2 | a - b = 6\}$

Câu 9: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = x^3 - 3x$. Tìm $f(A)$ và $f^{-1}(A)$ biết $A = (-2; 2]$

Giải:

Tập ảnh $f(A) = \{f(x) = x^3 - 3x | x \in A\}$

Khảo sát hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ với $-2 < x \leq 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

BBT:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||		0	$-$	0		||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $f(A) = [-2; 2]$

Tập nghịch ảnh $f^{-1} = \{x \in R | -2 < x^3 - 3x \le 2\}$

Xét $\begin{cases} x^3 - 3x > -2 \\ x^3 - 3x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2; x \neq 1 \\ x \le 2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(A) = (-2; 2] \setminus \{1\}$

Câu 10: Cho ánh xạ $f: R \to R$ xác định bởi $f(x) = 5x^3 + 1$. Xét xem f có là đơn ánh, toàn ánh hay không?

Giải:

Giả sử $\forall m \in R$, xét $f(x) = m \Leftrightarrow 5x^3 + 1 = m \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{m-1}{5}} \in R$

$\Rightarrow f(x) = m$ có duy nhất một nghiệm $x \in R$ với $\forall m \in R$.

$\Rightarrow f$ là song ánh $\Leftrightarrow f$ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Câu 11: Cho ánh xạ $f: R \to R^2, f(x) = (x^2 - 4; x^3 + 1)$. Hỏi f có là đơn ánh không?

Giải:

Giả sử: $f(x_1) = f(x_2)$ $(*)$ với $x_1, x_2 \in R$.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} {x_1}^2 - 4 = {x_2}^2 - 4 \\ {x_1}^3 + 1 = {x_2}^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_1}^2 = {x_2}^2 \\ {x_1}^3 = {x_2}^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{array} \right. \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Vậy $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ là đơn ánh.

Câu 12: Cho ánh xạ $f: R \to R^2, f(x) = (2x + 1; x - 3)$. Hỏi f có là toàn ánh không?

Giải:

Giả sử $\forall (a, b) \in R^2$, xét $f(x) = (2x + 1; x - 3) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = a \\ x - 3 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (a-1)/2 \\ x = b + 3 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (a - 1)/2 = b + 3 \Leftrightarrow a = 2b + 7$

Với $a = 2b + 7$ $(a, b \in R)$ thì hệ $(*)$ có nghiệm.

Với $a \neq 2b + 7$ $(a, b \in R)$ thì hệ $(*)$ vô nghiệm.

Vậy f không phải toàn ánh.

Câu 13: Cho ánh xạ $f: R\backslash\{1\} \to R,\ f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ có là đơn ánh không? Có là toàn ánh không? Cho $A = [2; 5]$ xác định $f(A)$ và $f^{-1}(A)$

<u>Giải:</u>

Giả sử $\forall m \in$ R, xét $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} = m\ \ (x \neq 1)$

$f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} = m\ \ (x \neq 1) \Leftrightarrow m(x-1) = x + 2 \Leftrightarrow x(m-1) = 2 + m\ (1)$

TH1: $m = 1$ thì (1) trở thành $0 = 2\ \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

TH2: $m \neq 1$ thì (1) có nghiệm $x = \dfrac{m+2}{m-1} \in R\backslash\{1\}$

Vậy với $\forall m \in R$ thì $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} = m$ có tối đa một nghiệm $x \in R\backslash\{1\} \Rightarrow f$ là đơn ánh.

Với $m = 1$ thì $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} = m$ vô nghiệm $\Rightarrow f$ không là toàn ánh.

Tập nghịch ảnh $f^{-1}([2;5]) = \left\{x \in R\setminus\{1\}, f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \in [2;5]\right\}$

$$2 \leq \frac{x+2}{x-1} \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} - 2 \geq 0 \\ \dfrac{x+2}{x-1} - 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{7}{4} \\ x < 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{4} \leq x \leq 4$$

Vậy $f^{-1}([2;5]) = \left[\dfrac{7}{4}; 4\right]$

Tập ảnh $f(A) = \left\{f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \in R, x \in [2;5]\right\}$

Khảo sát hàm $f(x) =\ f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ với $2 \leq x \leq 5$

BBT:

x	$-\infty$		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||			$-$			
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	$1,75$	$\searrow$	1

Vậy $f(A) = \left[\frac{7}{4}; 4\right]$

Câu 14: Cho ánh xạ $f: C \to C, f(z) = 2z^3 - 1$. Ánh xạ f có là đơn ánh hay không? Xác định tích các mô đun của các phần tử trong tập $f^{-1}(\{5 + 2i\})$

<u>**Giải:**</u>

Với $1 \in C$, xét $f(z) = 1 \Leftrightarrow 2z^3 - 1 = 1$

$$\Leftrightarrow z^3 = 1 = \cos 0 + i \sin 0 \Leftrightarrow z = \cos\frac{k2\pi}{3} + \sin\frac{k2\pi}{3}$$

Với $k = \overline{0,2} \Rightarrow f(z) = 1$ có 3 nghiệm $z \in C$

Vậy f không là đơn ánh.

Tập $f^{-1}(\{5 + 2i\}) = \{z \in C | f(z) = 5 + 2i\}$

Xét $2z^3 - 1 = 5 + 2i \Leftrightarrow z^3 = 3 + i\ (*)$

Gọi z_1, z_2, z_3 là 3 nghiệm của $(*) \Rightarrow f^{-1}(\{5 + 2i\}) = \{z_1, z_2, z_3\}$

Ta có $\begin{cases} |z_1|^3 = |z_1{}^3| = |3 + i| = \sqrt{10} \\ |z_2|^3 = |z_2{}^3| = |3 + i| = \sqrt{10} \\ |z_3|^3 = |z_3{}^3| = |3 + i| = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow (|z_1||z_2||z_3|)^3 = |z_1 z_2 z_3|^3 = 10\sqrt{10}$

$\Rightarrow |z_1 z_2 z_3| = \sqrt{10}$

Câu 15: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (3x + 4y, y^3)$. Hỏi f có là song ánh không?

<u>**Giải:**</u>

Giả sử $\forall (a, b) \in R^2$, xét $f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = a \\ y^3 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{a - 4\sqrt[3]{b}}{2}; \sqrt[3]{b}\right) \\ y = \sqrt[3]{b} \end{cases}$

Với $\forall (a, b) \in R^2, f(x, y) = (a, b)$ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{a - 4\sqrt[3]{b}}{2}; \sqrt[3]{b}\right) \in R^2$

$\Rightarrow f$ là song ánh

Câu 16: Cho ánh xạ $f: R \to R, f(x) = 3x^2 - x - 2$. Hỏi f có là song ánh không? Tìm $f([0; 3])$

Giải:

Giả sử $\forall m \in R$, xét $f(x) = m \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = m\ (*)$

Khảo sát hàm số $f(x) = 3x^2 - x - 2$ trên R

BBT:

x	$-\infty$		$1/6$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-25/12$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có: với $m < \frac{-25}{2}$ thì $(*)$ vô nghiệm $\Rightarrow f$ không là song ánh

Câu 17: Cho ánh xạ $f: N \to N, f(x) = 2x + 1$. Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?

Giải:

Giả sử $\forall x_1, x_2 \in N$, xét $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Với $\forall x_1, x_2 \in N$ thì $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Vậy f là đơn ánh

Giả sử $\forall m \in N$, xét $f(x) = m \Leftrightarrow 2x + 1 = m \Leftrightarrow x = \frac{m-1}{2}$

TH1: $m = 2k + 1\ (k \in N)$ (m là số lẻ)

$\Rightarrow x = \dfrac{m-1}{2} = \dfrac{2k+1-1}{2} = k \in N$

TH2: $m = 2k\ (k \in N)$ (m là số chẵn)

$\Rightarrow x = \dfrac{m-1}{2} = \dfrac{2k-1}{2} = k - \dfrac{1}{2} \notin N$

Vậy f không là toàn ánh (Do với $m = 2k\ (k \in N)$ thì $f(x) = m$ không có nghiệm $x \in N$)

- ***Mẹo:*** Nếu nhận ra có một trường hợp của m là phương trình $f(x) = m$ vô nghiệm hoặc có nghiệm không thuộc tập nguồn → có thể nêu ra ngay trường hợp đó ra ⇒ không là toàn ánh, không là song ánh.

Cách 2:

Với $m = 2 \in N$ ta có: $f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1/2 \notin N$

$\Rightarrow f$ không là toàn ánh

Câu 18: Cho ánh xạ $f: Z\backslash\{-1\} \to Z\backslash\{0\}, f(x) = \dfrac{2}{x+1}$. Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?

Giải:

Giả sử $\forall x_1, x_2 \in Z\backslash\{-1\}$, xét $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{2}{x_1+1} = \dfrac{2}{x_2+1} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Với $\forall x_1, x_2 \in Z\backslash\{-1\}$ thì $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Vậy f là đơn ánh

Giả sử $\forall m \in Z\backslash\{0\}$, xét $f(x) = m \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+1} = m \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{m} - 1$ (với $x \in Z\backslash\{-1\}$)

TH1: $m \in$ Ư$(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$\Rightarrow x = \dfrac{2}{m} - 1 \in Z\backslash\{-1\}$

TH2: $m \in Z\backslash\{\pm 1; \pm 2\}$

$\Rightarrow x = \dfrac{2}{m} - 1 \notin Z\backslash\{-1\}$

Vậy f không là toàn ánh (do với $m \in Z\backslash\{\pm 1; \pm 2\}$ thì $f(x) = m$ không có nghiệm $x \in Z\backslash\{-1\}$)

Câu 19: Cho ánh xạ $f: C \to R,\ f(x) = x^2 + 2$. Hỏi f có là đơn ánh, toàn ánh không?

Giải:

Giả sử $\forall x_1, x_2 \in C$, xét $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow {x_1}^2 + 2 = {x_2}^2 + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{array}\right.$

Với $\forall x_1, x_2 \in N$ thì $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{array}\right.$

Vậy f không là đơn ánh.

Với $\forall m \in R$, xét $f(x) = m \Leftrightarrow x^2 + 2 = m \Leftrightarrow x^2 = m - 2\ (*)$

TH1: $m > 2$

$(*)$ có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{m-2} \in C \\ x = -\sqrt{m-2} \in C \end{array}\right.$

TH2: $m = 2$

$(*)$ có nghiệm $x = 0 \in C$

TH3: $m < 2$

$(*) \Leftrightarrow x^2 = (2-m)i^2$ (i là đơn vị ảo) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2-m}.i \in C \\ x = -\sqrt{2-m}.i \in C \end{array}\right.$

Với $\forall m \in R, f(x) = m$ luông có nghiệm $x \in C$

Vậy f là toàn ánh.

Câu 20: Cho ánh xạ: $f: R^2 \to C, f(x,y) = (x+2y) + (y-2x)i$. Hỏi f có là song ánh không?

Giải:

Giả sử $\forall (a+bi) \in C$. Xét $f(x,y) = (x+2y) + (-2x+y)i = a+bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = a \\ -2x+y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 2a+b \\ x+2y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a-2b}{5} \\ y = \dfrac{2a+b}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x,y) = a+bi$ luôn có nghiệm duy nhất $(x,y) = \left(\dfrac{a-2b}{5}, \dfrac{2a+b}{5}\right) \in R^2 \Rightarrow f$ là song ánh.

Câu 21: Cho A $= \{(x,y) \in R^2 | y \geq 0\}$ và ánh xạ $f: R^2 \to A$ xác định bởi $f(x,y) = (x+y, y^2)$. Ánh xạ f có phải là toàn ánh không? Vì sao?

Giải:

Giả sử $\forall (a,b) \in A$ $(a,b \in R, b \geq 0)$, xét $f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow (I) \begin{cases} x+y = a \\ y^2 = b \end{cases} (b \geq 0)$

TH1: $b > 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = a \\ y^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a-y \\ y = \pm\sqrt{b} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = a-\sqrt{b} \\ y = \sqrt{b} \end{cases} \\ \begin{cases} x = a+\sqrt{b} \\ y = -\sqrt{b} \end{cases} \end{array}\right.$$

Hệ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} (x,y) = (a-\sqrt{b}; \sqrt{b}) \\ (x,y) = (a+\sqrt{b}; -\sqrt{b}) \end{array}\right. \in R^2$ với $b > 0$

TH2: $b = 0$ thì $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $(x,y) = (a,0) \in R^2$ với $b = 0$

Vậy với $\forall (a,b) \in A$ thì $f(x,y) = (a,b)$ luôn có nghiệm $(x,y) \in R^2$

$\Rightarrow f$ là toàn ánh.

Câu 22: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x_1, x_2) = (4x_1, 5x_2)$. Chứng minh f là một song ánh. Xác định $f(A)$ với $A = \{(x_1; x_2) \in R^2 | {x_1}^2 + {x_2}^2 = 9\}$

Giải:

$f(A) = \{f(x_1, x_2) = (4x_1, 5x_2) \in R^2 | (x_1, x_2) \in A\} = \{(4x_1, 5x_2) \in R^2 | {x_1}^2 + {x_2}^2 = 9\}$

Đặt $\begin{cases} a = 4x_1 \\ b = 5x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a/4 \\ x_2 = b/4 \end{cases}$

Mà ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 9 \Rightarrow \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{25} = 9 \Leftrightarrow 25a^2 + 16b^2 = 3600$

Vậy $f(A) = \{(a, b) \in R^2 | 25a^2 + 16b^2 = 3600\}$

Câu 23: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$ và $A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. Tìm a biết $f^{-1}(A) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 = a\}$

Giải:

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(A) = \{(x, y) \in R^2 | f(x, y) \in A\} = \{(x, y) \in R^2 | (x + y)^2 + (x - y)^2 = 1\}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(A) = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Câu 24: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x, y) = (2x - 1, x + y)$ và
$A = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. Phần tử (1,0) có thuộc $f(A)$ không? Vì sao?

Giải:

Tập ảnh $f(A) = \{f(x, y) = (2x - 1; x + y) \in R^2 | (x, y) \in A\}$

Đặt $\begin{cases} u = 2x - 1 \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+1}{2} \\ y = v - \frac{u+1}{2} = \frac{2v - u - 1}{2} \end{cases}$

Mà $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2v-u-1}{2}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow f(A) = \left\{(u, v) \in R^2 \middle| \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2v - u - 1}{2}\right)^2 = 1\right\}$

Xét (1,0) ta có $\left(\frac{1+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2.0-1-1}{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow (1,0) \notin f(A)$

Câu 25: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x+y, x-y)$ và $A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 9\}$. Tìm $f^{-1}(A), f(A)$.

Giải:

Tập ảnh $f(A) = \{f(x,y) = (x+y, x-y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 9\}$

Đặt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

Mà $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 18$

$\Rightarrow f(A) = \{(u,v) \in R^2 | u^2 + v^2 = 18\}$

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(A) = \{(x,y) \in R^2 | f(x,y) \in A\}$

Xét $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{9}{2}$

$\Rightarrow f^{-1}(A) = \left\{(x,y) \in R^2 \middle| x^2 + y^2 = \dfrac{9}{2}\right\}$

Câu 26: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (2x, 3y)$ và $A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \le 1\}$. Tìm $f^{-1}(A), f(A)$.

Giải:

Tập ảnh $f(A) = \{f(x,y) = (2x, 3y) | x^2 + y^2 \le 1\}$

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ v = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{2} \\ y = \dfrac{v}{3} \end{cases}$. Mà $x^2 + y^2 \le 1 \Rightarrow \left(\dfrac{u}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{v}{3}\right)^2 \le 1$

$\Rightarrow f(A) = \left\{(u,v) \in R^2 \middle| \left(\dfrac{u}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{v}{3}\right)^2 \le 1\right\}$

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(A) = \{(x,y) \in R^2 | f(x,y) \in A\}$

Xét $(2x)^2 + (3y)^2 \le 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 \le 1$

$\Rightarrow f^{-1}(A) = \{(x,y) \in R^2 | 4x^2 + 9y^2 \le 1\}$

Câu 27: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2; f(x,y) = (x^3 + 2y; 3x^3 + 7y)$

c) CMR: f là song ánh

d) Cho $A = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$. Tìm $f(A)$

Giải:

Giả sử $\forall(a,b) \in R^2$, xét $f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2y = a\ (1) \\ 3x^3 + 7y = b\ (2) \end{cases}$

Lấy $(2) - 3(1)$ ta được $y = b - 3a \Rightarrow x = \sqrt[3]{3a - 2b}$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \sqrt[3]{3a - 2b} \\ y = b - 3a \end{cases}$

Vậy với $\forall(a,b) \in R^2$, $f(x,y) = (a,b)$ có nghiệm duy nhất $(x,y) = \left(\sqrt[3]{3a - 2b}; b - 3a\right) \in R^2$

$\Rightarrow f$ là song ánh.

Tập ảnh: $f(A) = \{(x^3 + 2y; 3x^3 + 7y) \in R^2|0 \leq x \leq 1{,}0 \leq y \leq 2\}$

Xét $a = x^3 + 2y$ với điều kiện A: $0 \leq x \leq 1{,}0 \leq y \leq 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{(A)} a = \max\limits_{(A)}(x^3) + \max\limits_{(A)}(2y) = 1^3 + 2.2 = 5 \\ \min\limits_{(A)} a = \min\limits_{(A)}(x^3) + \min\limits_{(A)}(2y) = 0^3 + 2.0 = 0 \end{cases}$$

Xét $b = 3x^3 + 7y$ với điều kiện A: $0 \leq x \leq 1{,}0 \leq y \leq 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{(A)} b = \max\limits_{(A)}(3x^3) + \max\limits_{(A)}(7y) = 17 \\ \min\limits_{(A)} b = \min\limits_{(A)}(3x^3) + \min\limits_{(A)}(7y) = 0 \end{cases}$$

Vậy $f(A) = \{(a,b) \in R^2|0 \leq a \leq 5;\ 0 \leq b \leq 17\}$.

Câu 28: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x^3, x^2 + y)$ có là một song ánh hay không?

Giải:

Tương tự câu 15, là song ánh

Câu 29: Xét sự đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ

$$f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \to [0; 2] \times \left[\sqrt{2}; 2\right] \text{ với } f(x,y) = (2\sin x\,; 2\cos y)$$

Giải:

Ở bài này sẽ khảo sát số nghiệm của từng thành phần $2\sin x$ và $2\cos x$ trong khoảng tập nguồn và tập đích mà đề bài đã cho.

Giả sử $\forall(a,b) \in [0; 2] \times \left[\sqrt{2}; 2\right]$, xét $f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sin x \\ b = 2\cos y \end{cases}$

Xét $2\sin x = a$ với $\forall a \in [0; 2]$.

Đặt $g(x) = 2\sin x$. Khảo sát hàm $g(x)$ trên miền $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Lập BBT:

x	0		$\pi/2$
$g'(x)$		$+$	0
$g(x)$	0	$\nearrow$	2

Từ BBT ⇒ $g(x) = a$ có một nghiệm duy nhất $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ với $\forall a \in [0;2]$

Xét $2\cos y = b$ với $\forall b \in \left[\sqrt{2};2\right]$.

Đặt $h(y) = 2\cos y$. Khảo sát hàm $h(y)$ trên miền $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

Lập BBT:

y	0		$\pi/4$
$h'(y)$		$-$	
$h(y)$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Từ BBT ⇒ $g(y) = b$ có một nghiệm duy nhất $y \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ với $b \in \left[\sqrt{2};2\right]$

$f(x,y) = (a,b)$ có nghiệm duy nhất $(x,y) \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \times \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ với $\forall(a,b) \in [0;2] \times \left[\sqrt{2};2\right]$

Vậy f là song ánh.

Câu 30: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x-2y; 2x+y)$ và $A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 45\}$ Chứng minh rằng f là song ánh. Tìm $f(A), f^{-1}(A)$

Giải:

Tập ảnh $f(A) = \{f(x,y) = (x-2y, 2x+y) \in R^2 | x^2+y^2 = 45\}$

Đặt $\begin{cases} u = x-2y \\ v = 2x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+2v}{5} \\ y = \dfrac{v-2u}{5} \end{cases}$

Mà $x^2 + y^2 = 45 \Rightarrow \left(\frac{u+2v}{5}\right)^2 + \left(\frac{v-2u}{5}\right)^2 = 45 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 225$

$\Rightarrow f(A) = \{(u,v) \in R^2 | u^2 + v^2 = 225\}$

Tập nghịch ảnh $f^{-1}(A) = \{(x,y) \in R^2 | f(x,y) \in A\}$

Xét $(x-2y)^2 + (2x+y)^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$

$\Rightarrow f^{-1}(A) = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 9\}$

Câu 31: Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (x+ay, x-y)$. Xác định tất cả giá trị của a để f là một song ánh.

<u>Giải:</u>

Giả sử $(u,v) \in R^2$, để f là một song ánh $\Leftrightarrow f(x,y) = (u,v)$ có nghiệm duy nhất $\in R^2$

Xét $f(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow$ Hệ phương trình $(I) \begin{cases} x + ay = u \ (1) \\ x - y = v \ (2) \end{cases}$ $(u, v \in R)$

Lấy $(1) - (2)$ ta được $(a+1)y = u - v \ (*)$

Với $a = -1 \Rightarrow 0y = u - v \Rightarrow (*)$ sẽ có vô số nghiệm nếu $u = v \Rightarrow$ Hệ (I) có vô số nghiệm

$(*)$ sẽ vô nghiệm nếu $u \neq v \Rightarrow$ Hệ (I) vô nghiệm

$\Rightarrow$ Loại $a = -1$.

Với $a \in R\backslash\{-1\} \Rightarrow y = \frac{u-v}{a+1} \Rightarrow x = u - ay = u - \frac{a(u-v)}{a+1}$

$\Rightarrow$ Với $a \in R\backslash\{-1\}$ thì hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x,y) = \left(u - \frac{a(u-v)}{a+1}, \frac{u-v}{a+1}\right) \in R^2$

Vậy f là song ánh khi $a \in R\backslash\{-1\}$

Câu 32: Cho ánh xạ $f: [-1;5] \to [3;6]$ xác định bởi $f(x) = ax + b$. Tìm a, b để f là 1 song ánh.

<u>Giải:</u>

Giải sử $m \in [3;6]$, để f là song ánh $\Leftrightarrow f(x) = m$ có nghiệm duy nhất $\in [-1;5]$

Xét $f(x) = m \Leftrightarrow ax + b = m$ với $x \in [-1;5]$

Hàm số $f(x) = ax + b$ là hàm bậc nhất nên chỉ có thể đồng biến hoặc nghịch biến trên toàn bộ tập R. Để f là song ánh thì $f(x) = m$ phải có nghiệm duy nhất $x \in [-1;5]$ với $m \in [3;6]$

Như vậy bảng biến thiên của $f(x) = m$ sẽ có 2 TH:

TH1: $f(x) = ax = b$ đồng biến với x $\in [-1;5]$

x	-1		5
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	6

Do tính chất của hàm đồng biến

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[-1;5]} f(x) = f(5) = \max\limits_{[3;6]} m \\ \min\limits_{[-1;5]} f(x) = f(-1) = \min\limits_{[3;6]} m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 6 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

TH2: $f(x) = ax + b$ nghịch biến với x $\in [-1; 5]$

x	-1		5
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	6	$\searrow$	3

Do tính chất của hàm nghịch biến

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[-1;5]} f(x) = f(-1) = \max\limits_{[3;6]} m = 6 \\ \min\limits_{[-1;5]} f(x) = f(5) = \min\limits_{[3;6]} m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 3 \\ -a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-1}{2} \\ b = \dfrac{11}{2} \end{cases}$$

Vậy $(a, b) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ hoặc $(a, b) = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

Câu 33: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ $f: A \to [-1; 1] \times (0; +\infty), f(x, y) = (\cos x\,, e^y)$ là song ánh.

<u>Giải:</u>

Giả sử $(a, b) \in [-1; 1] \times (0; +\infty)$

Để f là song ánh $\Leftrightarrow f(x, y) = (a, b)$ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in A$

Xét $f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a \\ e^y = b \end{cases}$

Xét $\cos x = a$ với $a \in [-1; 1]$, đặt $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$.

Khảo sát hàm $f(x)$ trong khoảng $[0; 2\pi]$

Lập BBT:

x	0		π		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	-1	↗	1

Từ BBT ⇒ Với $a \in [-1; 1]$ thì $f(x) = a$ có nghiệm duy nhất $x \in [0; \pi]$

Xét $e^y = b$ với $b \in (0; +\infty)$. Đặt $g(y) = e^y \Rightarrow g'(y) = e^y > 0$. Khảo sát hàm $g(y)$

BBT:

y	$-\infty$		$+\infty$
$g'(y)$		$+$	
$g(y)$	0^+	↗	$+\infty$

Từ BBT ⇒ $g(y) = b$ có nghiệm duy nhất $y \in R$ với $b \in (0; +\infty)$

Vậy tập cần tìm là $A = [0, \pi] \times R$

Câu 34: Xác định tập $A \subset R^2$ để ánh xạ f: $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to A$, $f(x, y) = (2\sin x, \sin y + \cos y)$ là một song ánh.

Giải:

Giả sử $\forall (a, b) \in A$, để f là song ánh

$\Leftrightarrow f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x = a \\ \sin y + \cos y = b \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và $y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Xét $2\sin x = a$. Khảo sát hàm $f(x) = 2\sin x$ với $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Lập BBT:

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$			2
	-2	$\nearrow$	

Từ BBT: Với $a \in [-2; 2]$ thì $f(x) = a$ có nghiệm duy nhất $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Xét $\sin y + \cos y = b$.

Khảo sát hàm $g(y) = \sin y + \cos y = \sqrt{2}\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$ với $y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Lập BBT:

y	0		$\pi/4$
$g'(y)$		$+$	0
$g(y)$			$\sqrt{2}$
	1	$\nearrow$	

Từ BBT: Với $b = \left[1; \sqrt{2}\right]$ thì $g(y) = b$ có nghiệm duy nhất $y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Vậy tập cần tìm là $A = [-2; 2] \times \left[1; \sqrt{2}\right]$

Câu 35: Cho ánh xạ $f: [a; b] \to [-2; 4], f(x) = -3x + 1$. Tìm a, b để f là song ánh.

Giải:

Giả sử $\forall m \in [-2; 4]$. Để f là song ánh $\Leftrightarrow f(x) = m$ có duy nhất một nghiệm $x \in [a; b]$

Khảo sát hàm $f(x) = -3x + 1$

BBT:

x	-1		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	4		
		$\searrow$	-2

Từ BBT ta có: $f(x) = m$ luôn có duy nhất một nghiệm $x \in [-1; 1]$ với $m \in [-2; 4]$

Vậy $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 36: Cho ánh xạ $f: [m; 2] \to R; f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Tìm m để f là đơn ánh.

Giải:

Giả sử: $\forall a \in R$, để f là đơn ánh $\Leftrightarrow f(x) = a$ có tối đa một nghiệm $x \in [m; 2]$

Khảo sát hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Lập BBT:

x		-1		2		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	6	$\searrow$	-21	$\searrow$	-26	$\nearrow +\infty$

Từ BBT, ta có:

Với $m \in [-1; 2) \Rightarrow f(x) = a$ có một nghiệm tối đa một nghiệm $x \in [m, 2]$ khi $a \in R$

Với $m \leq -1 \Rightarrow f(x) = a$ có tối đa hai nghiệm $x \in [m, 2]$ khi $a \in R$

Vậy $-1 \leq m < 2$

Câu 37: Cho ánh xạ $f: R^3 \to R^3, f(x, y, z) = (2x - y + z, x - z, x + my)$. Tìm m để f là toàn ánh

Giải:

Giả sử $\forall (a, b, c) \in R^3$, xét $f(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = a \\ x - z = b \\ x + my = c \end{cases} \quad (*)$

Để f là toàn ánh $\Leftrightarrow f(x, y, z) = (a, b, c)$ có nghiệm với $\forall (a, b, c) \in R^3 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = a \ (1) \\ z = x - b \ (2) \\ x + my = c \ (3) \end{cases}$. Thế (2) vào (1) ta được $\begin{cases} 3x - y = a + b \\ x + my = c \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - y = a + b \\ x + my = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1-3m)y = a + b - 3c \\ x = \dfrac{a+b+y}{3} \end{cases}$$

TH1: $m = \dfrac{-1}{3} \Rightarrow (-1-3m)y = a + b - 3c$ trở thành $0y = a + b - 3c\ (**)$

Với $a + b - 3c \neq 0 \Rightarrow (**)$ vô nghiệm $\Rightarrow$ Hệ $(*)$ vô nghiệm $\Rightarrow$ Loại $m = \dfrac{-1}{3}$

TH2: $m \neq \dfrac{-1}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a+b-3c}{-1-3m} \\ x = \dfrac{1}{3}\left(a + b + \dfrac{a+b-3c}{-1-3m}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b-3c}{-1-3m} \\ y = \dfrac{a+b-3c}{-1-3m} \\ z = \dfrac{a+b-3c}{-1-3m} - b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm $(x, y, z) \in R^3$ với $\forall (a, b, c) \in R^3$

Vậy $m \neq \dfrac{-1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

- Bài giảng Đại số tuyến tính thầy Bùi Xuân Diệu.
- "Toán cao cấp: Đại số tuyến tính" - Tống Đình Quỳ,Nguyễn Cảnh Lương.
- "Bài tập Toán cao cấp" tập một - GS.TS Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), PGS.TS Trần Việt Dũng, PGS.TS Nguyễn Xuân Thảo, PGS.TS Trần Xuân Hiển.
- "Toán cao cấp" tập một - GS.TS Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), PGS.TS Trần Việt Dũng, PGS.TS Nguyễn Xuân Thảo, PGS.TS Trần Xuân Hiển.
- Bộ đề thi môn Đại số tuyến tính các năm Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội.
- Đề cương môn Đại số tuyến tính Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội.

Tài liệu được biên soạn dựa trên kinh nghiệm cá nhân, dù đã rất cố gắng nhưng chắc chắn vẫn sẽ tồn tại các lỗi sai tính toán, lỗi đánh máy, …mọi ý kiến góp ý bạn đọc vui lòng gửi qua link fb "fb.com/tungg810" để mình có thể kiểm tra, hoàn thiện bộ tài liệu. Xin chân thành cảm ơn!