BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1) Giải phương trình: $2xy'y" = y'^2 - 1$

HD giải: *Đặt* $y' = p:\quad 2xpp' = p^2 - 1$

Với $x(p^2-1) \neq 0$ *ta có:* $\dfrac{2pdp}{p^2-1} = \dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow p^2 - 1 = C_1 \Leftrightarrow p = \pm\sqrt{C_1x+1}$

$p = \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{C_1+1} \Rightarrow y = \dfrac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$

2) Giải phương trình: $\sqrt{y}.y" = y'$

HD giải: *Đặt* $y' = p \Rightarrow y" = p\dfrac{dp}{dy}$ *(hàm theo y). Phương trình trở thành:* $\sqrt{y}p\dfrac{dp}{dy} = p$

Với $p \neq 0$ *ta được phương trình:* $dp = \dfrac{dy}{\sqrt{y}} \Rightarrow p = 2\sqrt{y} + C_1 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} + C_1 \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{2\sqrt{y}+C_1}$

Từ đó nghiệm tổng quát: $x = \sqrt{y} - \dfrac{C_1}{2}\ln|2\sqrt{y}+C_1| + C_2$

Ngoài ra $y = c$*: hằng cũng là nghiệm.*

3) Giải phương trình: $a(xy'+2y) = xyy'$

HD giải: $a(xy'+2y) = xyy' \Rightarrow x(a-y)y' = -2ay$

Nếu $y \neq 0$*, ta có phương trình tương đương với* $\dfrac{a-y}{y}dy = -\dfrac{2a}{x}dx \Leftrightarrow x^{2a}y^ae^{-y} = C$

Ngoài ra $y = 0$ *cũng là nghiệm.*

4) Giải phương trình: $y" = y'e^y$

HD giải: *Đặt* $y' = p \Rightarrow y" = p\dfrac{dp}{dy}$ *thay vào phương trình:* $p\dfrac{dp}{dy} = pe^y$

Vớip $\neq 0 : \dfrac{dp}{dy} = e^y \Leftrightarrow p = e^y + C_1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^y + C_1 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{e^y+C_1} = dx$

Với $C_1 \neq 0$ *ta có:* $\int\dfrac{dy}{e^y+C_1} = \dfrac{1}{C_1}\int\dfrac{e^y+C_1-e^y}{e^y+1}dy = \dfrac{1}{C_1}(y - \int\dfrac{e^ydy}{e^y+C_1}) = \dfrac{y}{C_1} - \dfrac{1}{C_1}\ln(e^y+C_1)$

như vậy: $\int\dfrac{dx}{e^y+C_1} = \begin{cases} -e^{-y} & \text{nếu } C_1 = 0 \\ \dfrac{1}{C_1}(y - \ln|e^y+C_1|) & \text{nếu } C_1 \neq 0. \end{cases}$

Ngoài ra $y = C$ *: hằng là một nghiệm*

5) Giải phương trình: $xy' = y(1+\ln y - \ln x)$ *với* $y(1) = e$

HD giải: *Đưa phương trình về:* $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln\frac{y}{x})$, *đặt* $y = zx$ *được:* $xz' = z\ln z$

• $z\ln z \neq 0 \Rightarrow \frac{dz}{z\ln z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = Cx$ *hay* $\ln\frac{y}{x} = Cx \Leftrightarrow y = xe^{Cx}$

$y(1) = e \ \rightarrow C = 1$. *Vậy* $y = xe^x$

6) Giải phương trình: $y"(1 + y) = y'^2 + y'$

HD giải: *Đặt* $y' = z(y) \Rightarrow z' = z\frac{dz}{dy}$ *thay vào phương trình:* $\frac{dz}{z+1} = \frac{dy}{y+1}$

$\Rightarrow z + 1 = C_1(y+1) \Rightarrow z = C_1y + C_1 - 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{C_1y + C_1 - 1} = dx \ (*)$

• $C_1 = 0 \Rightarrow (*)$ *cho* $y = C - x$

• $C_1 \neq 0 \Rightarrow (*)$ *cho* $\frac{1}{C_1}\ln|C_1y + C_1 - 1| = x + C_2$

Ngoài ra $y = C$ *là nghiệm.*

Tóm lại nghiệm tổng quát: $y = C, y = C - x; \frac{1}{C_1}\ln|C_1y + C_1 - 1| = x + C_2$

7) Giải phương trình: $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$

HD giải: *Biến đổi (3) về dạng:* $x^2y' = (xy)^2 - 2 \ (*)$

Đặt $z = xy \Rightarrow z' = y + xy'$ *thay vào* $(*)$ *suy ra:*

$$xz' = z^2 + z - 2 \Leftrightarrow \frac{dz}{z^2 + z - 2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{z-1}{z+x}} = Cx$$

Vậy TPTQ: $\frac{xy - 1}{xy + 2} = Cx^3$.

8) Giải phương trình: $yy" + y'^2 = 1$

HD giải: *Đặt* $y' = z(y) \Rightarrow y" = z.\frac{dz}{dy}$

Biến đổi phương trình về: $\frac{z}{1 - z^2}dz = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow z^2 = 1 + \frac{C_1}{y^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1 + \frac{C_1}{y^2}} \Leftrightarrow \pm\int\frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{C_1}{y^2}}} = dx \Rightarrow y^2 + C_1 = (x + C_2)^2$

Nghiệm tổng quát: $y^2 + C_1 = (x + C_2)^2$

9) Giải phương trình: $2x(1+x)y' - (3x+4)y + 2x\sqrt{1+x} = 0$

HD giải: $y' - \frac{3x+4}{2x(x+1)}.y = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}; \ x \neq 0, \ x \neq -1$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{3x+4}{2x(x+1)}dx = \int(\frac{2}{x} - \frac{1}{2(x+1)})dx \Leftrightarrow y = \frac{Cx^2}{\sqrt{x+1}}$

Biến thiên hằng số: $C' = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow C = -\dfrac{1}{x} + \varepsilon.$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}(\dfrac{1}{x} + \varepsilon)$

10) Giải phương trình: $y" = e^{2y}$ *thoả* $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

HD giải: *Đặt* $z = y' \to y" = z.\dfrac{dz}{dy}$ *phương trình trở thành* $z.\dfrac{dz}{dy} = e^{2y} \Leftrightarrow \dfrac{z^2}{2} = \dfrac{e^{2y}}{2} + \varepsilon$

$y'(0) = y(0) = 0 \Rightarrow \varepsilon = -\dfrac{1}{2}$. *Vậy* $z^2 = e^{2y} - 1$. *Từ đó:*

$$z = \frac{dy}{dx} = \sqrt{e^{2y} - 1} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = x + \varepsilon. \text{ đổi biến } t = \sqrt{e^{2y} - 1}$$

$$arctg\sqrt{e^{2y} - 1} = x + \varepsilon$$

$y(0) = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$. *Vậy nghiệm riêng thoả điều kiện đề bài:* $y = \dfrac{1}{2}\ln(tg^2 x + 1)$.

11) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $xy' + 2y = xyy'$ thoả mãn điều kiện đầu $y(-1) = 1$.

HD giải: *Viết phương trình lại:* $x(1-y)y' = -2y$; *do* $y(-1) = 1$ *nên* $y \not\equiv 0$. *Đưa về phương trình tách biến:* $\dfrac{1-y}{y}dy = -2\dfrac{dx}{x}$

tích phân tổng quát: $x^2ye^{-y} = C$. *Thay điều kiện vào ta được* $C = \dfrac{1}{e}$. *Vậy tích phân riêng cần tìm là:* $x^2ye^{1-y} = 1$.

12) Bằng cách đặt $y = ux$, hãy giải phương trình: $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}dx = 0$. $(x > 0)$

HD giải: *Đặt* $y = ux; du = udx + xdu$ *thay vào phương trình và giản ước x:* $xdu - \sqrt{1-u^2}dx = 0$. *Rõ ràng* $u - \pm 1$ *là nghiệm. khi* $u \not\equiv \pm 1$ *đưa phương trình về tách biến:* $\dfrac{du}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$. *TPTQ:* $\arcsin u - \ln x = C$ *(do* $x > 0$*).*

Vậy NTQ của phương trình: $y = \pm x; \arcsin\dfrac{y}{x} = \ln x + C$.

13) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$.

HD giải:

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \iff y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$$

đặt $u = \dfrac{y}{x}$ *hay* $y = ux$ *suy ra* $y' = xu' + u$

phương trình thành: $xu' = \sqrt{1-u^2} \iff \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{dx}{x}$

$\Longleftrightarrow \quad \arcsin u = \ln Cx$
thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$ *khi* $C = 1$. *Vậy nghiệm* $y = \pm x$.

14) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $y' \sin x = y \ln y$
thoả mãn điều kiện đầu $y(\frac{\pi}{2}) = e$.

HD giải:

$$y' \sin x = y \ln y \iff \frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

$$\iff \ln y = C \tan \frac{x}{2} \iff y = e^{C \tan \frac{x}{2}}$$

thoả mãn điều kiện đầu $y(\frac{\pi}{2}) = e$ *khi* $C = 1$. *Vậy* $y = e^{\tan \frac{x}{2}}$.

15) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$
thoả mãn điều kiện đầu $y(0) = 1$.

HD giải: *Đặt* $x + y = z \implies dy = dz - dx$
phương trình thành: $(2 - z)dx + (2z - 1)dz = 0$; *giải ra* $x - 2z - 3\ln|z - 2| = C$. *Vậy* $x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C$
thoả mãn điều kiện đầu $y(0) = 1$ *khi* $C = 2$.

16) Bằng cách đặt $y = \frac{1}{z}$ rồi đặt $z = ux$,hãy giải
phương trình: $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$

HD giải: *Đặt* $y = \frac{1}{z}$ *được:* $(z^2 - x^2)dz + 2zxdx = 0$; *rồi đặt* $z = ux$, *được* $(u^2 - 1)(udx + xdu) + 2udx = 0$

$$\iff \frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 1}{u^3 + u}du = 0$$

$$\iff \ln|x| + \ln\frac{u^2 + 1}{|u|} = \ln C \iff \frac{x(u^2 + 1)}{u} = C$$

thay $u = \frac{1}{xy}$ *được nghiệm* $1 + x^2y^2 = Cy$.

17) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sau: $y' - xy = x + x^3$

HD giải:
Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}.\frac{x^2}{2} + 1$$

.

18) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - y = y^2$.

HD giải: *Đây là phương trình tách biến và có nghiệm tổng quát là*

$$\ln|\frac{y}{y+1}| = x + C.$$

19) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' + \frac{y}{x} = e^x$

HD giải:
Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là $y = \frac{C}{x} + e^x - \frac{e^x}{x}$.

20) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' - y = y^3$.

HD giải: *Đây là phương trình tách biến và có nghiệm tổng quát là*

$$C + x = \ln|y| - \text{arctg} y.$$

21) Giải phương trình: $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$, *với* $y(1) = \frac{\pi}{2}$

HD giải: $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$, *phương trình trở thành:*

$$z'x = \sin x \Leftrightarrow \frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|tg\frac{z}{2}| = \ln|x| + \ln C \Leftrightarrow tg\frac{z}{2} = Cx$$

Vậy nghiệm tổng quát: $tg\frac{y}{2x} = Cx$; $y(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 1$.
Vậy: $tg\frac{y}{2x} = x$.

22) Giải phương trình: $(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

HD giải: *Đặt* $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y' = z'x + z$ *phương trình được đưa về dạng:*

$$x\cos z.z' + 1 = 0 \Leftrightarrow \int \cos z dz = -\frac{dx}{x} + C \Leftrightarrow \sin z = -\ln|x| + C$$

Vậy TPTQ: $\sin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C$

23) Giải phương trình: $(y'^2 - 1)x^2y^2 + y'(x^4 - y^4) = 0$

HD giải: *Là phương trình đẳng cấp nhưng giải khá phức tạp.*

Xem phương trình bậc hai đối với y': $\triangle = (x^4 + y^4)^2 \Rightarrow y_1' = \dfrac{y^2}{x^2};\ y_2' = -\dfrac{x^2}{y^2}$.

Từ đó có hai họ nghiệm tổng quát: $y = \dfrac{x}{C_1 x + 1};\ x^3 + y^3 = C_2$

24) Giải phương trình: $y^2 + x^2 y' = xyy'$

HD giải: *Viết phương trình lại* $y' = \dfrac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x} - 1}$ *đây là phương trình thuần nhất, giải ra được nghiệm tổng quát:* $y^2 = Cxe^{\frac{y}{x}}$

25) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$ thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$.

HD giải: *Đặt* $\begin{cases} x & = u - 1 \\ y & = v + 3. \end{cases}$ *thay vào phương trình được:*

$(u + v)du + (u - v)dv = 0$, *đây là phương trình thuần nhất có tích phân tổng quát là:* $u^2 + 2uv - v^2 = C$.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình ban đầu là: $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$

26) Giải phương trình $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$.

HD giải: *Đặt* $\begin{cases} x & = X - 1 \\ y & = Y + 3 \end{cases}$, *phương trình thành:*

$$(X + Y)dX + (X - Y)dY = 0$$

đặt $Y = uX$ *đưa phương trình về* $\dfrac{dX}{X} + \dfrac{1 - u}{1 + 2u - u^2}du = 0$.

Giải ra $X^2(1 + 2u - u^2) = C$ *hay* $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.

27) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $b)$ $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

HD giải: *Đây là phương trình đẳng cấp, ta đặt* $z = \dfrac{y}{z}$. *Khi đó phương trình trên trở thành* $xz' = \dfrac{z(1 + z^2)}{1 - z^2}$. *Hay* $(\dfrac{1}{z} - \dfrac{2z}{1 + z^2})dz = \dfrac{dx}{x}$. *Suy ra nghiệm của phương trình này là* $\dfrac{z}{1 + z^2} = Cx,\quad C \neq 0$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x^2 + y^2 = C_1 y,\quad C_1 \neq 0$.

28) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.

HD giải: *Đặt* $u = 2x + y$ *phương trình đưa về dạng*

$$\frac{du}{dx} = \frac{5u + 9}{2u + 5}.$$

Giải phương trình này ta được nghiệm $10u + 7\ln|5u+9| = 25x + C$.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $10y + 7\ln|10x + 5y = 9| - 5x = C$.

29) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:
$(x - y + 4)dy + (y + x - 2)dx = 0$

HD giải: *Đây là phương trình đưa về dạng đẳng cấp được bằng cách đặt* $x = u + 1,\ y = v - 3$, *ta được* $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{u+v}{-u+v}$. *Giải phương trình ta có nghiệm của phương trình là* $v^2 - 2uv - v^2 = C$.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $y^2 - x^2 - 2xy - 8y + 4x = C_1$.

30) a) Tìm miền mà trong đó nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình sau đây tồn tại và duy nhất $y' = \sqrt{x-y}$.
b) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau: $(x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$.

HD giải:
a) Bài toán Cauchy có duy nhất nghiệm trong miền
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x - y \geq \delta\}$ *với* $\delta > 0$ *tùy ý.*
b) Đưa phương trình về dạng $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$. *Đây là phương trình đẳng cấp, ta đặt* $z = \dfrac{y}{x}$. *Khi đó phương trình trên trở thành*

$$xz' = \frac{z(1+z^2)}{1-z^2}.$$

Hay $(\dfrac{1}{z} - \dfrac{2z}{1+z^2})dz = \dfrac{dx}{x}$.
Suy ra nghiệm của phương trình này là $\dfrac{z}{1+z^2} = Cx,\ C \neq 0$.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x^2 + y^2 = C_1 y,\ C_1 \neq 0$.

31) a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x - y)dy - (x + y)dx = 0;$

HD giải:
a) Dùng định nghĩa kiểm tra hệ độc lập tuyến tính .
b) Đưa phương trình về dạng $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$. *Đây là phương trình đẳng cấp, ta đặt* $z = \dfrac{y}{x}$. *Khi đó phương trình trên trở thành*

$$xz' = \frac{1+z^2}{1-z}.$$

Giải phương trình này ta được

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

32) a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{\cos^2 2x, \sin^2 2x, 2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Tính định thức Wronski của chúng.
b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x - 2y + 1)dy - (x + y)dx = 0$.

HD giải:
a) Hệ này phụ thuộc tuyến tính vì $2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x - 2 = 0$.
b) Phương trình này có thể đưa về dạng đẳng cấp, ta được

$$y' = \frac{x+y}{x-2y+1}.$$

Đặt $u = x - \frac{1}{3},\ v = y + \frac{1}{3}$, *khi đó phương trình trên trở thành*

$$v' = \frac{u+v}{u-2v}.$$

Giải phương trình này ta được $\sqrt{u^2+2v^2} = Ce^{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\frac{u}{v})}$.
Hay $\sqrt{(3x-1)^2+2(3y+1)^2} = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\frac{3x-1}{3y+1})}$.

33) Giải phương trình: $y^2 + x^2y' = xyy'$

HD giải: *Phương trình thuần nhất: đặt* $y = zx \ \rightarrow y' = z'x + z$
Phương trình trở thành $\frac{z-1}{z}dz = \frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad z - \ln|z| = \ln|x| + C$

$$\frac{y}{x} - \ln|\frac{y}{x}| = \ln|x| + C$$

34) Giải phương trình $y^2 + x^2y' = xyy'$.

HD giải: *Viết phương trình lại* $y' = \dfrac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}-1}$ *đây là phương trình thuần nhất, giải ra được nghiệm tổng quát:* $y^2 = Cxe^{\frac{y}{x}}$

35) Giải phương trình: $y\text{''}\cos y + (y')^2\sin y = y'$

HD giải: $y = C$: *hằng là một nghiệm.*
$y \neq C$ *(hằng). Đặt* $y' = p \Rightarrow y\text{''} = p\frac{dp}{dy}$ *(hàm theo y)*
thay vào (2): $\frac{dp}{dy}\cos y + p\sin y = 1$*: phương trình tuyến tính.*
Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát: $p = C\cos y$.
biến thiên hằng số được $C = tgy + C_1$.
từ đó $p = \frac{dy}{dx} = \sin y + C_1\cos y \Leftrightarrow \frac{dy}{\sin y + C_1\cos y} = dx$
tích phân đi đến: $\frac{1}{\sqrt{C_1^2+1}}\ln\left|\dfrac{tg\frac{y}{2} + \sqrt{1+\frac{1}{C_1^2}} - \frac{1}{C_1}}{-tg\frac{y}{2} + \sqrt{1+\frac{1}{C_1^2}} + \frac{1}{C_1}}\right| = x + C_2$

36) Giải phương trình: $y' + \frac{1}{2x-y^2} = 0$

HD giải: *Coi* $x = x(y)$ *là hàm của y ta có:* $y' = \frac{1}{x'}$ *thay vào phương trình:*

$\frac{1}{x'} + \frac{1}{2x - y^2} = 0 \Leftrightarrow x' + 2x = y^2$: *phương trình tuyến tính.*
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $x = Ce^{-2y}$
Biến thiên hằng số: $C'(y) = y^2e^{2y} \Rightarrow C(y) = \frac{1}{2}y^2e^{2y} - \frac{1}{2}ye^{2y} + \frac{1}{4}e^{2y} + C$
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình: $x = Ce^{-2y} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$

37) Giải phương trình: $xy" = y' + x^2$

HD giải: *Đặt* $y' = p$, *(1) trở thành:* $xp' - p = x^2$ *tuyến tính*
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $p = Cx$
Biến thiên hằng số $\rightarrow \quad C(x) = x + C_1$
Suy ra: $\frac{dy}{dx} = x(x + C_1) \quad \rightarrow y = \frac{x^3}{3} + C_1.\frac{x^2}{2} + C_2$

38) Giải phương trình: $y'^2 + yy" = yy'$

HD giải: *Đặt* $p = y'(p \neq 0)$, *phương trình tương đương với:* $p^2 + yp\frac{dp}{dy} = yp$
$\Leftrightarrow p + y\frac{dp}{dy} = y$, *xét* $y \neq 0$ *đưa phương trình về:* $\frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} = 1$ *(tuyến tính)*
NTQ của phương trình thuần nhất: $p = \frac{C}{y}$, *biến thiên hằng số*

$$\Rightarrow C(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$$

Như vậy: $p = \frac{y^2 + 2C_1}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2C_1}{2y} \Rightarrow \frac{2ydy}{y^2 + 2C_1} = dx$
$\Rightarrow y^2 = A_1e^x + A_2$.
Chú ý: Vế trái $(yy')' = yy' \Leftrightarrow yy' = C_1e^x \Leftrightarrow ydy = C_1e^xdx \Leftrightarrow y^2 = 2C_1e^x + C_2$

39) Giải phương trình: $ye^y = y'(y^3 + 2xe^y)$ *với* $y(0) = -1$

HD giải: $y'_x = \frac{1}{x'y}$ *biến đổi phương trình về:* $x' - \frac{2}{y}x = y^2e^{-y}$
Nghiệm tổng quát: $x = y^2(C - e^{-y})$
$y(0) = -1 \Rightarrow C = e$.
Vậy $x = y^2(e - e^{-y})$

40) Giải phương trình: $xy" = y' + x$

HD giải: *Đặt* $y' = p$; *phương trình trở thành:* $p' - \frac{1}{x}p = 1$
Nghiệm tổng quát: $p = Cx$ *biến thiên hằng số:* $C = \ln|x| + C_1$

$$\Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = (\ln|x| + C_1)x \Rightarrow y = \int (\ln|x| + C_1)x dx + C_2$$
$$= C_1 x^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$$

41) Giải phương trình: $y' + xy = x^3$

HD giải: *Nghiện tổng quát của phương trình thuần nhất* $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$
biến thiên hằng số: $C(x) = (x^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}} + \varepsilon$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = \varepsilon e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2.$

42) Giải phương trình: $(x^2 - y)dx + xdy = 0$

HD giải: *Phương trình viết lại:* $xy' - y = -x^2$, *phương trình thuần nhất:* $xy' - y = 0$ *có nghiệm tổng quát:* $y = Cx$ *biến thiên hằng số suy ra* $C = -x + \varepsilon$
Vậy nghiệm tổng quát : $y = -x^2 + \varepsilon x$

43) Giải phương trình: $y' - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$ *với* $y(1) = 1$

HD giải: *Phương trình tuyến tính:* $y = Cx^2$; $C' = \frac{3}{x^4} \Rightarrow C = -\frac{1}{x^3} + \varepsilon$
$y = \varepsilon x^2 - \frac{1}{x}$; $\quad y(1) = 1 \Rightarrow \varepsilon = 2$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = 2x^2 - \frac{1}{x}$

44) Giải phương trình: $(x+1)(y' + y^2) = -y$

HD giải: *Xét* $y \neq 0$, *biến đổi phương trình về dạng* $y' + \frac{1}{x+1}.y = -y^2$
Đặt $\frac{1}{y} = z \Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2} = -y^2 z'$ *đưa phương trình về* $z' - \frac{1}{x+1}.z = 1.$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $z = C_1(x+1)$ *biến thiên hằng số* $C_1 = \ln|x+1| + \varepsilon.$
Vậy nghiệm: $z = (x+1)(\ln|x+1| + \varepsilon)$
ngoài ra $y = 0$ *cũng là nghiệm.*
Vậy nghiệm tổng quát: $y = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + \varepsilon)}$ *và* $y = 0$ *nghiệm kì dị.*

45) Giải phương trình: $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$

HD giải: *Đưa phương trình về dạng* $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1-x)}$ *phương trình tuyến tính cấp 1*

Nghiệm tổng quát: $y = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$, *biến thiên hằng số:*

$$C'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x(1-x)} \Rightarrow C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right| + \varepsilon$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big(\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right| + \varepsilon\Big)$

46) Giải phương trình: $xy' - y = x^2 \sin x$

HD giải: $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$, *phương trình tuyến tính. NTQ:* $y = Cx$ *biến thiên hằng số:*
Nghiệm tổng quát: $y = (C - \cos x)x$

47) Giải phương trình: $y'\cos^2 x + y = tgx$ thoả $y(0) = 0$

HD giải: *Phương trình tuyến tính* $\rightarrow$ *NTQ* $y = Ce^{-tgx}$; $\overline{y} = tgx - 1$ *(một nghiệm riêng)*
$\Rightarrow$ *NTQ:* $y = Ce^{-tgx} + tgx - 1$
$y(0) = 0 \Rightarrow C = 1$. *Vậy nghiệm riêng cần tìm:* $y = tgx - 1 + e^{-tgx}$.

48) Giải phương trình: $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$ thoả $y(0) = 0$

HD giải: *Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất:* $y = Ce^{-arcsinx}$
Dễ thấy nghiệm riêng: $\overline{y} = arcsinx - 1$
$\Rightarrow$ *NTQ:* $y = Ce^{-arcsinx} + arcsinx - 1$
$y(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$ *nghiệm riêng cần tìm:* $y = e^{-arcsinx} + arcsinx - 1$

49) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$
thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$.

HD giải: *Xem* x *là ẩn hàm, thay* $y' = \dfrac{1}{x'}$, *phương trình thành*

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{2x - y^2} \iff x' - 2x = -y^2$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một, nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng là $x = Ce^{-2y}$. *Biến thiên hằng số được NTQ:*

$$x = Ce^{-2y} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$$

thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$ *khi* $C = \dfrac{3}{4}$.
Vậy nghiệm thỏa mãn điều kiện đầu: $x = \dfrac{3}{4}e^{-2y} + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4}$.

50) Giải phương trình sau đây, biết rằng sau khi đặt $y = \dfrac{z}{x^2}$, ta nhận được một phương trình vi phân cấp hai có một nghiệm riêng $y^* = \dfrac{1}{2}e^x$:
$$x^2y'' + 4xy' + (x^2+2)y = e^x.$$

HD giải: *Đặt* $y = zx^2 \implies y' = \dfrac{z'x - 2z}{x^3}; y'' = \dfrac{z''x^2 - 4z'x + 6z}{x^4}$. *Phương trình thành :* $z'' + z = e^x$, *có một nghiệm riêng là* $y^* = \dfrac{e^x}{2}$, *NTQ của phương trình thuần nhất:* $z = C_1\cos x + C_2\sin x$. *Vậy NTQ của phương trình ban đầu là:*
$$y = C_1\frac{\cos x}{x^2} + C_2\frac{\sin x}{x^2} + \frac{e^x}{2x^2}$$

51) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $ye^y = y'(y^3 + 2xe^y)$ thoả mãn điều kiện đầu $y(0) = -1$.

HD giải: *Xem* x *là ẩn hàm, thay* $y' = \dfrac{1}{x'}$, *phương trình thành* $x' - \dfrac{2}{y}x = y^2e^{-y}$. *NTQ của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng là* $x = \dfrac{C}{y}$; *biến thiên hằng số được* $C(y) = -e^{-y} + \mathcal{C}$. *Như vậy NTQ là* $x = \dfrac{\mathcal{C}}{y} - \dfrac{1}{ye^y}$. *Thay điều kiện đầu xác định được* $\mathcal{C} = \dfrac{1}{e}$. *Từ đó KL.*

52) Tìm nghiệm của phương trình $y' - y = \cos x - \sin x$. thỏa điều kiện y bị chặn khi $x \to \infty$

HD giải: *Giải phương trình tuyến tính ra* $y = Ce^x + \sin x$
thỏa điều kiện y *bị chặn khi* $x \to \infty$ *khi* $C = 0$

53) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$ thoả mãn điều kiện đầu $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

HD giải:
$$y' + \sin y + x\cos y + x = 0 \iff y' + 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} + x.2\cos^2\frac{y}{2} = 0$$
$$\iff \frac{y'}{2\cos^2\frac{y}{2}} + \tan\frac{y}{2} + x = 0$$
đặt $z = \tan\dfrac{y}{2} \implies z' = \dfrac{y'}{2\cos^2\frac{y}{2}}$, *phương trình thành phương trình tuyến tính* $z' + z = -x$. *Giải ra:* $z = 1 - x + Ce^{-x}$
thoả mãn điều kiện đầu $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$ *khi* $C = 0$. *Vậy nghiệm riêng* $y = 2\arctan(1-x)$.

54) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - x\tan y = \dfrac{x}{\cos y}$

HD giải: *Đặt* $z = \sin y$, *khi đó phương trình đã cho trở thành* $z' - xz = x$. *Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là* $z = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $\sin y = z = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$

55) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - xy = x$

HD giải:
Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1$.

56) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' + \dfrac{y}{x} = x\sqrt{y}$.

HD giải: *Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm tổng quát là*

$$\sqrt{y} = \frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{1}{5}x^2.$$

57) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' - \dfrac{y}{x} = x^3$

HD giải:
Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là

$$y = Cx + \frac{1}{3}x^4.$$

58) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' - y = y^2$.

HD giải:
Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm tổng quát là

$$y^2 = \frac{1}{Ce^{-2x} - 1}.$$

59) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$

HD giải:
Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là

$$y = \frac{C}{x} + \frac{\sin x}{x} - \cos x.$$

60) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' - y = x\sqrt{y}$.

HD giải:
Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm tổng quát là

$$\sqrt{y} = Ce^{\frac{1}{2}x} - x - 2.$$

61) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

HD giải:
Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.
Nghiệm tổng quát là $y = (C + \frac{x^2}{2})e^{-x^2}$.

62) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y}$.

HD giải: *Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm là*

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\ln x + Cx^2.$$

63) a) Tìm miền mà trong đó nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình sau đây tồn tại và duy nhất $y' = y + 3x$.

b) Tìm nghiệm của bài toán Cauchy sau đây $\begin{cases} y" - \frac{1}{x}y' & = x \\ y(x=1) & = 1 \quad \text{và } y'(x=1) = 2. \end{cases}$

HD giải:
a) Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 thỏa định lý điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm trên $\mathbb{R}^2$.
b) Giải phương trình $y" - \frac{y'}{x} = x$, *ta được nghiệm tổng quát*

$$y = C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}.$$

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy là

$$y = -\frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}.$$

64) Tìm nghiệm của phương trình sau: $y' + y\text{tg}x = \cos x$

HD giải:
Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.
Nghiệm tổng quát là:

$$y = (C + x)\cos x.$$

65) Tìm nghiệm của phương trình sau: $y' + \dfrac{y}{x} = x(\dfrac{e^x}{e^x+1})y^2$.

HD giải:
Đây là phương trình vi phân Bernoulli và có nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{1}{Cx - x\ln(e^x+1)}.$$

66) Giải phương trình: $(x+1)y" + x(y')^2 = y'$

HD giải: *Đặt $y' = p$, phương trình trở thành phương trình Bernouili (với $x \neq -1$)*

$$p' - \frac{1}{x+1}p = -\frac{x}{x+1}p^2 \qquad (*)$$

Đặt $z = p^{-1} \neq 0$, đưa $(*)$ về phương trình tuyến tình cấp một:

$$z' + \frac{1}{1+x}z = \frac{x}{x+1}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $z = \dfrac{C}{x+1}$

Biến thiên hằng số cuối cùng được: $z = \dfrac{x^2+C_1}{2(x+1)} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{z} = \dfrac{2(x+1)}{x^2+C_1}$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình:

$$\begin{cases} \ln|x^2+C_1| + \dfrac{2}{\sqrt{C_1}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2 & \text{nếu } C_1 > 0 \\ \ln|x^2+C_1| + \dfrac{1}{\sqrt{-C_1}}\ln|\dfrac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}| + C_2 & \text{nếu } C_1 < 0 \end{cases}$$

Chú ý $y = C$ là NKD

67) Giải phương trình: $x^2y' = y(x+y)$

HD giải: $x^2y' = y(x+y) \Leftrightarrow y' - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x^2}y^2$: *phương trình Bernouilli*

Đặt $z = y^{-1}$ $(y \neq 0)$: $-z' - \dfrac{1}{x}z = \dfrac{1}{x^2}$.

NTQ của phương trình thuần nhất: $\qquad z = Cx$

biến thiên hằng số C: $C(x) = \varepsilon - \dfrac{1}{2x^2}$. *Vậy* $z = x(\varepsilon - \dfrac{1}{2x^2})$

Vậy nghiệm tổng quát là: $y = \dfrac{2x}{\varepsilon x^2 - 1}$

68) Giải phương trình: $yy" - (y')^2 = y^3$

thoả $\begin{cases} y(0) = -\dfrac{1}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

HD giải: *Đặt* $y' = p(y)$; $\quad y'' = p.p'_y$ *thay vào phương trình*

$$py\frac{dp}{dy} - p^2 = y^3,$$

đặt tiếp: $p(y) = y.z(y)$ *đưa phương trình về*

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 = 2(y + C_1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y\sqrt{|2y + C|}$$

Do điều kiện $y(0) = -\frac{1}{2}$; $\quad y'(0) = 0 \Rightarrow C = 1$. *Từ đó suy ra:*
$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{|2y+1|} \Rightarrow \ln\left|\frac{\sqrt{|2y+1|} - 1}{\sqrt{|2y+1|} + 1}\right| = x + C_2.$
do $y(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = 0.$
Vậy nghiệm riêng cần tìm thoả : $\ln\left|\frac{\sqrt{|2y+1|} - 1}{\sqrt{|2y+1|} + 1}\right| = x.$

69) Giải phương trình: $ydx + 2xdy = \frac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}dy$ *thoả điều kiện* $y(0) = \pi$

HD giải: *Đưa phương trình về dạng* $x' + \frac{2}{y}x = \frac{2}{\cos^2 y}.x^{\frac{1}{2}}$ *(Bernoulli)* $(*)$
Đặt $z = x^{\frac{1}{2}}$ *ta có* $z' = x' + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x'$ *thay vào* $(*)$

$$z' + \frac{1}{y}z = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Nghiệm tổng quát: $z = \frac{c}{y}$ *biến thiên hằng số:*

$$C' = \frac{y}{\cos^2 y} \Rightarrow C(y) = ytgy + \ln|\cos y| + \varepsilon$$

Vậy $Z = tgy + \frac{1}{y}\ln|\cos y| + \frac{\varepsilon}{y}$
Và TPTQ của phương trình: $tgy + \frac{1}{y}\ln|\cos y| + \frac{\varepsilon}{y} = \sqrt{x}$
$y(0) = \pi \quad \Rightarrow \varepsilon = 0$ *vậy TPR :* $tgy + \frac{1}{y}\ln|\cos y| = \sqrt{x}$

70) Giải phương trình: $xydy = (y^2 + x)dx$

HD giải: *Do* $y = 0$ *không phải là nghiệm, chia hai vế cho* xy *biến đổi phương trình về dạng:* $y' - \frac{1}{x}y = y^{-1}$ *Bernouilli; Đặt* $z = y^2$ *đưa phương trình về dạng:*

$$z' - \frac{2}{x}z = 2 \rightarrow z = -2x + Cx^2$$

Vậy TPTQ: $y^2 = -2x + Cx^2$

71) Giải phương trình: $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

HD giải: *Đưa phương trình về dạng* $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{x}}.y^{\frac{1}{2}};\ x \neq 0$

Đặt $z = y^{\frac{1}{2}}$: $z' - \frac{1}{2x}z = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *phương trình tuyến tính giải ra* $z = \sqrt{x}(\ln x + C)$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = x(\ln x + C)^2$

72) Giải phương trình: $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

HD giải: *Phương trình Bernouilli, đặt* $z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y} \Rightarrow z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

phương trình trở thành: $z' - \frac{4}{x}z = 2x \rightarrow$ *NTQ* $z = Cx^4 - x^2$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = (Cx^2 - 1)^2x^4$.

73) Giải phương trình: $2x^2y' = y^2(2xy' - y)$

HD giải: *Xem* x *là hàm theo biến* y : $x'y^3 - 2xy^2 = -2x^2$ *Bernouilli*

Đặt $z = \frac{1}{x}$, *phương trình trở thành:* $z' + \frac{2z}{y} = \frac{2}{y^3} \rightarrow$ *TPTQ:* $y^2 = x\ln Cy^2$, *nghiệm kỳ dị* $y = 0$.

74) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $x^2y' = y(x+y)$ thoả mãn điều kiện đầu $y(-2) = -4$.

HD giải: *Do* $y(-2) = -4$ *nên* $y \not\equiv 0$. *Đưa phương trình về phương trình Bernouilli:* $y' - 1y = \frac{y^2}{x^2}$. *Tiếp tục đặt* $z = y^{-1}$ *đưa phương trình về PT tuyến tính* $z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2}$. *NTQ của phương trình thuần nhất tương ứng:* $z = Cx$, *biến thiên hằng số được* $C(x) = \mathcal{C}x - \frac{1}{2x}$. *Như vậy nghiệm của phương trình ban đầu là:* $y = \frac{2x}{\mathcal{C}x^2 - 1}$. *Điều kiện đầu cho* $\mathcal{C} = \frac{1}{2}$. *Vậy nghiệm riêng cần tìm là* $y = \frac{4x}{x^2 - 1}$

75) Giải phương trình: $y' - xy = -xy^3$

HD giải: *Phương trình:* $y' - xy = -xy^3$ *là phương trình Bernouilli, giải ra được* $y^2(1 + Ce^{-x}) = 1$

76) Giải phương trình: $xy' + y = y^2\ln x$.

HD giải: *Phương trình* $xy' + y = y^2\ln x$ *là phương trình Bernouilli, giải ra được* $y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}$.

77) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y}$

HD giải: *Đây là phương trình Bernoulli, bằng cách đặt* $z = \sqrt{y}$ *ta đưa phương trình về dạng* $z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$ *và có nghiệm tổng quát là*

$$z = x^2(\frac{1}{2}\ln|x| + C).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = x^4(\frac{1}{2}\ln|x| + C)^2.$$

78) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' + \frac{y}{x} = y^2 x\,\mathrm{tg}x.$

HD giải: *Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm tổng quát là*
$y = \dfrac{1}{Cx + x\ln|\cos x|}.$

79) Giải phương trình: $y^2dx + (2xy + 3)dy = 0$

HD giải: $P(x,y) = y^2,\ Q(x,y) = 2xy + 3;\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y$
$(1) \Leftrightarrow d(xy^2 + 3y) = 0.$ *Vậy* $xy^2 + 3y = C$

80) Giải phương trình: $e^x(2 + 2x - y^2)dx - ye^x dy = 0$

HD giải: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2ye^x$ *suy ra phương trình tương đương với:* $d\big(e^x(2x - y^2)\big) = 0.$
Vậy $e^x(2x - y^2) = C.$

81) Giải phương trình: $(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}dx + (y^2 + 3xy\sqrt{1 + y^2})dy = 0$

HD giải: $p = (y^2 + 1)^{\frac{3}{2}};\ Q = y^2 + 3xy\sqrt{1 + y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3y\sqrt{1 + y^2}$ $(*)$
Suy ra nghiệm tổng quát của $(*)$ *là:*

$$\int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3}{3} + x(1 + y^2)^{\frac{3}{2}} = C$$

82) Giải phương trình: $(y\cos^2 x - \sin x)dy = y\cos x(y\sin x + 1)dx$

HD giải: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y\sin 2x + \cos x$

NTQ:

$$\int\limits_{x_0=0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0=0}^{y} Q(x, y)dy = C \Leftrightarrow y\sin x - \frac{y^2}{2}\cos^2 x = C$$

83) Giải phương trình: $(2x + 3x^2y)dx = (3y^2 - x^3)dy$

HD giải: *Phương trình vi phân toàn phần:* $x^2 + x^3y - y^3 = C$

84) Giải phương trình: $(\frac{x}{\sin y} + 2)dx - \frac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}dy = 0$

HD giải: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x\cos y}{\sin^2 y}$

TPTQ:

$$\int\limits_{0}^{x} P(x, \frac{\pi}{2})dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{y} Q(x, y)dy = C \quad \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{(x^2+1)}{2}(\frac{1}{\sin y} - 1) = C$$

85) Giải phương trình: $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0$

HD giải: *Phương trình vi phân toàn phần, nghiệm tổng quát:* $xy + e^x \sin y = C$.

86) Giải phương trình: $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$

HD giải: *Phương trình vi phân toàn phần: NTQ* $x^2 + 2(x\sin y - \cos y) = C$.

87) Giải phương trình: $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$

HD giải: *Phương trình vi phân toàn phần: Nghiệm tổng quát:* $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$

88) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$

HD giải: *Đây là phương trình vi phân toàn phần có tích phân tổng quát là:*

$$x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$$

89) Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$

HD giải: *PTVPTP có tích phân tổng quát:* $x^2 + 2(x\sin y - \cos y) = C$

90) Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình:
$$\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

HD giải: *PTVPTP có tích phân tổng quát:* $\ln\frac{x}{y}+\frac{xy}{x-y}=C$

91) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:
$$(\sin xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xydy=0$$

HD giải: *Phương trình vi phân toàn phần có nghiệm tổng quát là* $x\sin(xy)=C$.

92) Hãy tìm thừa số tích phân của phương trình: $(x+y^2)dx-2xydy=0$ suy ra nghiệm tổng quát của phương trình.

HD giải: *Thừa số tích phân của phương trình là* $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$. *Nhân hai vế của phương trình cho thừa số tích phân rồi giải ra* $x=Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

93) Giải phương trình: $2xy\ln ydx+(x^2+y^2\sqrt{y^2+1})dy=0$

HD giải: *Đây là phương trình vi phân toàn phần, thừa số tích phân:* $\mu(y)=\frac{1}{y}$ *nhân thừa số tích phân vào hai vế của phương trình rồi giải ra được:* $x^2\ln y+\frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}}=0$

94) Tìm nghiệm của phương trình $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0.$ thỏa điều kiện $y(0)=1$.

HD giải: *Đây là phương trình vi phân toàn phần NTQ là:*

$$x^4+2x^2y^2+y^4=C$$

.

thỏa điều kiện $y(0)=1$ *khi* $C=1$.

95) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau: $a)\quad -2xydy+(y^2+x^2)dx=0$

HD giải: *Ta tìm được thừa số tích phân* $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$. *Đưa phương trình đã cho về dạng vi phân toàn phần. Khi đó nghiệm tổng quát là* $x^2-y^2=Cx$.

96) a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{e^{2x}, e^{-x}, \cos x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
Tính định thức Wronski của chúng.
b) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:
$\sqrt{x^2-y}dy - 2x(1+\sqrt{x^2-y})dx = 0.$

HD giải:
a) Dùng định nghĩa kiểm tra hệ độc lập tuyến tính.
Định thức Wronski $W[y_1, y_2, y_3](x) = 3e^x(3\cos x - \sin x)$.
b) Đây là phương trình vi phân toàn phần. Tích phân tổng quát của phương trình là

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} = C$$

97) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau: $(\frac{x^2}{y} - y^2)dy - 2xdx = 0.$

HD giải: *Ta tìm được thừa số tích phân* $\mu(x) = \frac{1}{y}$. *Đưa phương trình đã cho về dạng vi phân toàn phần. Khi đó nghiệm tổng quát là* $2x^2 + y^3 = Cy$.

98) a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{e^x, e^{2x}, x^2\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x-y)dy + (x+y)dx = 0.$

HD giải:
a) Kiểm tra hệ phương trình là độc lập tuyến tính .
b) Đây là phương trình vi phân toàn phần nên ta có $d(xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}) = 0.$
Vậy tích phân tổng quát là $x^2 - y^2 + 2xy = C$.

99) a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{1, x, e^x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x^2-y)dx + xdy = 0$

HD giải:
a) Dùng định nghĩa kiểm tra hệ độc lập tuyến tính .
b) Tìm thừa số tích phân, ta được $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. *Phương trình đã cho đưa được về dạng phương trình vi phân toàn phần*

$$(1 - \frac{y}{x^2})dx + \frac{1}{x}dy = 0.$$

Giải phương trình này ta được $y = Cx - x^2$.

100) a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{e^{2x}, e^x, x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x-y)dx - (x+y)dy = 0.$

HD giải:

a) Kiểm tra hệ phương trình là độc lập tuyến tính.
b) Đây là phương trình vi phân toàn phần. Suy ra tích phân tổng quát có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2xy = C.$$

BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (tiếp theo)

101) Giải phương trình: $y" + y' = x + e^{-x}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1 + C_2e^{-x}$
Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\overline{y} = y_1 + y_2$*, trong đó* y_1, y_2 *là các nghiệm tương ứng của các phương trình:* $y" + y' = x$ *và* $y" + y' = e^{-x}$
• *Vì* $\lambda_1 = 0$ *là nghiệm của phương trình đặc trưng nên* $y_1 = x(Ax + B)$
Bằng phương pháp hệ số bất định được: $y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x$
• $\lambda_2 = -1$ *là nghiệm của phương trình đặc trưng nên:* $y_2 = Axe^{-x}$
Thay vào và dùng hệ số bất định suy ra: $y_2 = -xe^{-x}$
Cuối cùng NTQ: $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x - xe^{-x}$

102) Giải phương trình: $2y" + 5y' = 29x\sin x$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $2\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{5}{2}$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = C_1 + C_2e^{-\frac{5x}{2}}$
Vì $\pm i$ *không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên tìm nghiệm riêng dạng:*
$\overline{y} = (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x$
Thay vào phương trình được: $A = -2;\ B = \frac{185}{29};\ C = -5;\ D = -\frac{16}{29}$

103) Giải phương trình: $y" - 2y' + 5y = x\sin 3x$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - 2i; \lambda_2 = 1 + 2i$
NTQ của phương trình thuần nhất: $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$
Do $\pm 3i$ *không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của (2) được tìm dưới dạng:* $\overline{y} = (Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x$
Thay vào (2) ta được: $A = \frac{3}{26};\ B = \frac{57}{26};\ C = -\frac{1}{13};\ D = \frac{41}{13}$

104) Giải phương trình: $y" - 2y' - 3y = xe^{4x} + x^2$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 3.$
NTQ của phương trình thuần nhất: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$
Tìm nghiệm riêng dạng $\overline{y} = y_1 + y_2$ *với* y_1 *là nghiệm của* $y" - 2y' - 3y = xe^{4x}$

$$y_1 = e^{4x}(Ax + B) = e^{4x}\left(\frac{x}{5} - \frac{6}{25}\right)$$

còn y_2 *là nghiệm riêng của* $y" - 2y' - 3y = x^2$ *có dạng:*

$$y_2 = A_1x^2 + B_1x + C_1 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}.$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{e^{4x}}{5}(x - \frac{6}{5}) - \frac{1}{3}(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{14}{9})$

105) Giải phương trình: $x^2y" - 2y = x^3\cos x$
biết một nghiệm của phương trình thuần nhất là $y_1 = x^2$

HD giải: *Chia 2 vế cho x^2 $(x \neq 0)$:* $y" - \dfrac{2}{x^2}y = x\cos x.$
Tìm nghiệm riêng thứ hai của phương trình thuần nhất dạng:
$p(x) = 0;\ q(x) = -\dfrac{2}{x^2}.$

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx = x^2\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $y = C_1x^2 - C_2.\dfrac{1}{3x}$
Coi $C_1,\ C_2$ là hàm của x, áp dụng phương pháp hằng số biến thiên:

$$\begin{cases} C_1'x^2 + C_2'(-\dfrac{1}{3x}) = 0 \\ C_1'2x + C_2'(\dfrac{1}{3x^2}) = x\cos x \end{cases}$$

Giải ra: $\begin{cases} C_1' = \dfrac{\cos x}{3} \Rightarrow C_1 = \dfrac{\sin x}{3} + K_1 \\ C_2' = x^3\cos x \Rightarrow C_2 = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x + 6\cos x + K_2 \end{cases}$
Vậy NTQ: $y = \dfrac{x^2\sin x}{3} - \dfrac{1}{3x}(x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x + 6\cos x) + K_1x^2 - \dfrac{K_2}{3x}.$

106) Giải phương trình: $y" + \dfrac{2}{x}y' + y = \dfrac{cotgx}{x}$
biết một nghiệm của phương trình thuần nhất là $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$

HD giải: $p(x) = \dfrac{x}{2},\ q(x) = 1,\ f(x) = \dfrac{cotgx}{x}.$ *Tìm nghiệm riêng thứ hai:*
$y_2 = y_1\int \dfrac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx = \dfrac{\sin x}{x}\int \dfrac{x^2}{\sin^2 x}e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx = \dfrac{\sin x}{x}\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos x}{x}$
NTQ của phương trình thuần nhất: $y = C_1\dfrac{\sin x}{x} - C_2\dfrac{\cos x}{x}$
Biến thiên hằng số: $\begin{cases} C_1'\dfrac{\sin x}{x} + C_2'(\dfrac{\cos x}{x}) = 0 \\ C_1'\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} + C_2'\dfrac{x\sin x + \cos x}{x^2} = \dfrac{cotgx}{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow C_1' = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \Rightarrow C_1(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx + K_1 = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}dx + K_1$$
$$= \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x dx + K_1 = \ln|tg\frac{x}{2}| + \cos x + K_1$$

$C_2' = \cos x \to\ C_2 = \sin x + K_2$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = \cdots$

107) Giải phương trình: $y" - 2y' + y = 1 + \dfrac{e^x}{x}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$
NTQ của phương trình thuần nhất: $y = e^x(C_1x + C_2)$
Dùng phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm riêng dạng:
$\overline{y} = \alpha_1(x).xe^x + \alpha_2(x).e^x$.

$$\begin{cases} \alpha_1'(x).xe^x + \alpha_2'(x).e^x = 0 \\ \alpha_1'(x)(e^x + xe^x) + \alpha_2'(x).e^x = 1 + \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1' = e^{-x} + \dfrac{1}{x} \\ \alpha_2' = -(xe^x + 1) \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{cases} \alpha_1 = -e^{-x} + \ln|x| \\ \alpha_2 = xe^{-x} + e^{-x} - x \end{cases}$$

Như vậy nghiệm riêng: $\overline{y} = (\ln|x| - e^{-x})xe^x + (xe^{-x} + e^{-x} - x)e^x$
Và nghiệm tổng quát: $y = e^x(C_1x + C_2) + xe^x\ln|x| - xe^x + 1$

108) Giải phương trình: $y" + y' = xe^{-x}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = -1$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $\overline{y} = C_1 + C_2e^{-x}$
Tìm nghiệm riêng dạng: $y = xe^{-x}(Ax + B)$
Kết quả: $y = C_1 + C_2e^{-x} - (\dfrac{x^2}{2} + x)e^{-x}$

109) Giải phương trình: $y" - 4y' + 5y = e^{2x} + \cos x$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 - i; \lambda_2 = 2 + i$
Nghiệm tổng quát: $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$
Tìm nghiệm riêng dạng: $\overline{y} = y_1 + y_2$ *với* $y_1 = Ae^{2x};\ y_2 = A\cos x + B\sin y \Rightarrow y_1 = e^{2x};\ y_2 = \dfrac{1}{8}\cos x - \dfrac{1}{8}\sin x$
Nghiệm tổng quát: $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{2x} + \dfrac{1}{8}(\cos x - \sin x)$

110) Giải phương trình: $y" + 4y' + 4y = 1 + e^{-2x}\ln x$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$
NTQ : $y = e^{-2x}(C_1x + C_2)$
Tìm nghiệm riêng dạng: $\overline{y} = \alpha_1(x).xe^{-2x} + \alpha_2e^{-2x}$.

$$\begin{cases} \alpha_1'(x).xe^{-2x} + \alpha_2'e^{-2x} = 0 \\ \alpha_1'(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) + \alpha_2'(-2e^{-2x}) = 1 + e^{-2x}\ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1' = e^{-2x} + \ln x \to \alpha_1 = \dfrac{1}{2}e^{-2x} + x\ln|x| - x \\ \alpha_2' = -x(e^{-2x} + \ln x) \to \alpha_2 = \dfrac{1}{4}e^{2x} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{x^2}{2}\ln x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *nghiệm riêng* $\Rightarrow$ *nghiệm tổng quát:*
$y = e^{-2x}(C_1x + C_2) + e^{-2x}(\dfrac{1}{4}e^{2x} - \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{x^2}{2}\ln x)$

111) Giải phương trình: $y" + y' = e^{-x}(\sin x - \cos x)$

HD giải: *Đặt* $y = e^{-x}z$ *thay vào phương trình được:* $z" - z' = \sin x - \cos x$.
Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1$
Nghiệm tổng quát: $z = C_1 + C_2e^x$.
Tìm nghiệm riêng dạng: $z = A\cos x + B\sin x \Rightarrow A = 1,\ B = 0$.
Vậy nghiệm tổng quát là: $y = e^{-x}(C_1 + C_2e^x + \cos x)$

112) Giải phương trình: $y" - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 - 2i;\ \lambda_2 = 2 + 2i$
Nghiệm của phương trình thuần nhất: $y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$
Nghiệm riêng dạng $\overline{y} = y_1 + y_2$ *với* y_1 *là nghiệm riêng của* $y" - 4y' + 8y = e^{2x}$
dạng $y_1 = Ae^{2x} \to A = \dfrac{1}{4}$; y_2 *là nghiệm riêng của* $y" - 4y' + 8y = \sin 2x$
dạng $y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x \to A = \dfrac{1}{10},\ B = \dfrac{1}{20}$.
Vậy nghiệm tổng quát:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{20}(2\cos 2x + \sin 2x)$$

.

113) Giải phương trình: $y" + y = \dfrac{1}{\sin x}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$
NTQ : $y = C_1\cos x + C_2\sin x$
Tìm nghiệm riêng dạng: $\overline{y} = \alpha_1(x)\cos x + \alpha_2(x)\sin x$
Bằng cách biến thiên hằng số

$$\begin{cases} \alpha_1'\cos x + \alpha_2'\sin x = 0 \\ \alpha_1'(-\sin x) + \alpha_2'\cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1' = -1 \\ \alpha_2' = \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -x \\ \alpha_2 = \ln\sin x \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln\sin x$

114) Giải phương trình: $y" - 3y' + 2y = 2x^2 - 5 + 2e^x\cos\dfrac{x}{2}$

HD giải: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 2$
NTQ: $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$
Tìm nghiệm riêng dạng: $\overline{y} = \alpha_1(x)e^x + \alpha_2(x)e^{2x}$ *bằng cách biến thiên hằng số:*

$$\begin{cases} \alpha_1'e^x + \alpha_2'e^{2x} = 0 \\ \alpha_1'e^x + \alpha_2'(2e^{2x}) = 2x^2 - 5 + 2e^x\cos\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1' = -e^{-x}(2x^2 - 5) - 2\cos\dfrac{x}{2} \\ \alpha_2' = e^{-2x}(2x^2 - 5) + 2e^{-x}\cos\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = e^{-x}(2x^2 - 4x - 1) - 4\sin\dfrac{x}{2} \\ \alpha_2 = -\dfrac{1}{2}[e^{-2x}(2x^2 - 5) + 2(xe^{-2x} + \dfrac{1}{2}e^{-2x})] + \dfrac{8}{3}(-e^{-2x}\cos\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-x}\sin\dfrac{x}{2}) \end{cases}$$

Từ đó có nghiệm tổng quát của phương trình.

115) Giải phương trình: $y" - 4y = (2-4x)e^{2x}$

HD giải: *Nghiệm tổng quát:* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$
Nghiệm riêng dạng: $y = xe^{2x}(Ax+B);\ A = -\frac{2}{3},\ B = \frac{2}{3}$
$\rightarrow$ *Nghiệm tổng quát:* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{2}{3}xe^{2x}(1-x)$

116) Giải phương trình: $y" - 2y' + y = \frac{e^x}{x} + \cos x$

HD giải: *Nghiệm tổng quát:* $y = e^x(C_1x + C_2)$
nghiệm riêng dạng: $y^* = \alpha_1xe^x + \alpha_2e^x$ *biến thiên hằng số:*

$$\begin{cases} \alpha_1' = \frac{1}{x}e^{-x}\cos x \\ \alpha_2' = -(1 + xe^{-x}\cos x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \ln|x| + \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) \\ \alpha_2 = -x - \frac{1}{2}(xe^{-x}(\sin x - \cos x) + e^{-x}\sin x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *Nghiệm tổng quát*

117) Giải phương trình: $y" - 2y' + 2y = x(e^x + 1)$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - i\ \lambda_2 = 1 + i$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

Nghiệm riêng dạng $\overline{y} = y_1 + y_2$ *với* y_1 *là nghiệm riêng của* $y" - 2y' + 2y = xe^x$
có dạng $y_1 = e^x(Ax+B) \rightarrow A = 1,\ B = 0$; *Và* y_2 *là nghiệm riêng của* $y" - 2y' + 2y = x$
$y_2 = Ax + B \rightarrow A = B = \frac{1}{2}$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + xe^x + \frac{1}{2}(x+1)$$

.

118) Giải phương trình: $y" + 2y' + y = \sin x + \frac{e^{-x}}{x}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ *(bội 2)*
Nghiệm tổng quát: $y = e^{-x}(C_1x + C_2)$.
Tìm nghiệm riêng dạng: $\overline{y} = \alpha_1(x)xe^{-x} + \alpha_2(x)xe^{-x}$
Biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} \alpha_1' = e^x\sin x + \frac{1}{x} \\ \alpha_2' = -xe^x\sin x - \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + \ln|x| \\ \alpha_2 = -[\frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2}\cos x] - \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

Suy ra nghiệm tổng quát: $y = e^{-x}(C_1x + C_2) + xe^{-x}\ln|x| - \frac{\cos x}{2} - \frac{x^2e^{-x}}{4}$.

119) Giải phương trình: $y" + y = \dfrac{1}{\sin x}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$
Nghiệm tổng quát: $y = A_1 \cos x + A_2 \sin x$.
Biến thiên hằng số: $\begin{cases} A_1' = -1 \\ A_2' = cotgx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -x \\ A_2 = \ln|\sin x|. \end{cases}$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x$.

120) Giải phương trình: $y" + y = xe^x + 2e^{-x}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$
Nghiệm tổng quát: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
Tìm nghiệm riêng dạng:
$$\overline{y} = (Ax + B)e^x + Ce^{-x} \rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ A + B = 0 \\ 2C = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \\ C = 1 \end{cases}$$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$

121) Giải phương trình: $y" - y' - 2y = \cos x - 3\sin x$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2; \lambda_2 = 1$
Nghiệm tổng quát: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$
Tìm nghiệm riêng dạng:
$$\overline{y} = A\cos x + B\sin x \rightarrow \begin{cases} B - 3A = 1 \\ -A - 3B = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x$

122) Giải phương trình: $y" - 2y' = 2\cos^2 x$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 2$
Nghiệm tổng quát: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.
Tìm nghiệm riêng dạng:
$\overline{y} = Ax + B\cos 2x + C\sin 2x$
Thay vào được: $\begin{cases} -2A = 1 \\ -4(B + C) = 1 \\ 4(B - C) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{8} \\ C = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)$

123) Giải phương trình: $y" + y = \sin x + \cos 2x$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
Tìm nghiệm riêng dạng:
$\overline{y} = x(A\cos x + B\sin x) + C\cos 2x + D\sin 2x$
Thay vào phương trình và đồng nhất được: $A = -\frac{1}{2};\ B = 0;\ C = -\frac{1}{3};\ D = 0$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1\cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x$.

124) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' - 2y' = 2\cos^2 x$

HD giải:
Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2$. *Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng:* $y = C_1 + C_2e^{2x}$. *Tìm nghiệm riêng dạng:*

$$y^* = Ax + B\cos 2x + C\sin 2x$$

Được $A = -\frac{1}{2}; B = -\frac{1}{8}; C = -\frac{1}{8}$. *Vậy NTQ:*

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)$$

125) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:
$$(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0.$$

HD giải: *Phương trình vi phân toàn phần có tích phân tổng quát;* $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

126) Giải phương trình: $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$.

HD giải: *NTQ của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng* $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$. *Tìm nghiệm riêng dạng:* $y^* = e^x(A\cos x + B\sin x)$*; được* $A = 4; B = 3$. *Vậy NTQ:*

$$y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + e^x(3\cos x + 4\sin x)$$

127) Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' - 2y' + 2y = x(e^x + 1)$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda_1 = 1 \pm i$. *Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng:* $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$. *Tìm nghiệm riêng dạng:* $y^* = y_1 + y_2$*; với* y_1 *là nghiệm riêng của* $y'' - 2y' + 2y = xe^x$*, có dạng* $y_1 = e^x(Ax + B) \Longrightarrow A = 1; B = 0$ *và* y_2 *là nghiệm riêng của* $y'' - 2y' + 2y = x$*, có dạng* $y_2 = A'x + B' \Longrightarrow A' = B' = \frac{1}{2}$. *vậy nghiệm tổng quát:*

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + xe^x + \frac{1}{2}(x + 1)$$

128) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $x^2y'' - 2y = x^3\cos x$ biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất là $y_1 = x^2$.

HD giải: *Tìm NR dạng* $y_2 = uy_1 = ux^2$ *được* $y_2 = -\dfrac{1}{3x}$. *Như vậy NTQ:* $y = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x}$. *Biến thiên hằng số được* $C'_1 = -\dfrac{1}{3}\cos x; C'_2 = x^3\cos x$ ...

129) Giải phương trình vi phân sau đây nếu biết một nghiệm riêng của nó có dạng đa thức: $(x^2+1)y'' - 2y = 0$

HD giải: *Dễ thấy* $y_1 = x^2+1$ *là một nghiệm riêng của phương trình, nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với* y_1 *là:*

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{{y_1}^2}e^{-\int 0.dx}dx = (x^2+1)\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}(x^2+1)(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x)$$

Vậy NTQ: $y = C_1(x^2+1) + C_2(x^2+1)(\dfrac{x}{x^2+1} + \arctan x)$

130) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' + y = \sin x + \cos 2x$.

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \pm i$. *Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng:* $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. *Tìm nghiệm riêng dạng:* $y^* = y_1 + y_2$; *với* y_1 *là nghiệm riêng của* $y'' + y = \sin x$, *được* $y_1 = -\dfrac{1}{2}x\cos x$ *và* y_2 *là nghiệm riêng của* $y'' + y = \cos 2x$, *được* $y_2 = -\dfrac{1}{3}\cos 2x$. *Vậy nghiệm tổng quát:*

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x$$

131) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $r^2 + 10r + 25 = 0$ *giải ra* $r_1 = r_2 = 5$
NTQ của phương trình thuần nhất: $y = (C_1 + C_2x)e^{-5x}$ *và NR của phương trình không thuần nhất:* $y^* = 2x^2e^{-5x}$. *Vậy*
NTQ: $y = (C_1 + C_2x)e^{-5x} + 2x^2e^{-5x}$

132) Biết rằng phương trình $xy'' + 2y' + xy = 0$ có nghiệm riêng dạng $y = \dfrac{\sin x}{x}$. Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

HD giải: *Nghiệm riêng độc lập tuyến tính với* $y = \dfrac{\sin x}{x}$ *là* $y = \dfrac{\cos x}{x}$. *Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là*

$$y = C_1.\frac{\sin x}{x} + C_2.\frac{\cos x}{x}$$

133) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' + y' = 4x^2e^x$

HD giải: *Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:* $y = C_1 + C_2e^{-x}$ *Tìm nghiệm riêng dạng:* $y^* = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{-x}$, *giải ra* $A_1 = 2; A_2 = -6; A_3 = 7$.

134) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$

HD giải: *Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:* $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. *Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất được tìm dưới dạng:* $y = (A_1x + A_2)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x$ *và tìm được* $A_1 = -\dfrac{3}{10}; A_2 = \dfrac{17}{50}; B_1 = \dfrac{1}{10}; B_2 = \dfrac{3}{25}$.

135) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" - 2y' + 2y = xe^x$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}(x+1) + e^x$$

136) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" + y = \cos 2x$.

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x.$$

137) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $(1-x^2)y" - 2xy' + 2y = 0$ khi biết một nghiệm riêng $y_1 = x$.

HD giải: *Chuyển về dạng* $y" + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$. *Với* $p_1(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$ *nên nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là*

$$y = x\{\int C_1\frac{e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx + C_2\} = x\{C_1\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2\}$$
$$= x\{(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}) + C_2\} = C_2x + C_1(\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1).$$

138) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" - 3y' + 2y = 2 + e^x$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - 2xe^x.$

139) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" - y' = \sin^2 x.$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$y = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\ln x.$

140) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" - 2y' + 10y = xe^x$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1e^x \cos 3x + C_2e^x \sin 3x - \frac{1}{9}xe^x.$$

141) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" + y = \cos 2x + \sin x.$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x - \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

142) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
$y" - 2y' + y = xe^x$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^3}{6}e^x.$$

143) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
$y" + y = \cos 2x.$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x.$$

144) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y" + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0,$
khi biết một nghiệm riêng có dạng $y_1 = \frac{1}{x}.$

HD giải: *Phương trình đã cho tương đương với phương trình* $x^2y" + 3xy' + y = 0$. *Đây là phương trình Euler nên ta có thể đưa về phương trình tuyến tính với hệ số hằng bằng cách đặt* $x = e^t$. *Khi đó phương trình đã cho trở thành* $y_t" + 2y_t' + y = 0$.

Phương trình này có nghiệm là $y = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$. *Vậy nghiệm của phương trình đã cho là* $y = \frac{C_1}{x} + C_2\frac{\ln|x|}{x}$.

145) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
$a)\ \ y" - 3y' + 2y = 2e^{2x}$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 2e^{2x}.$$

146) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
$a)\ \ y" + y = \frac{1}{\cos^2 x}$

HD giải: *Nghiệm của phương trình thuần nhất* $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. *Dùng phương pháp biến thiên hằng số ta được* $C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ *và* $C_2'(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Vậy nghiệm của phương trình là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - 1 + \frac{\sin x}{2}\ln|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}|.$$

147) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
$y" - 2y' + 2y = x + e^x$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}(x+1) + e^x$.

148) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
$y" + y = \cos^2 x$.

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:* $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$.

149) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $xy" + y' - \frac{1}{x}y = 0$,
khi biết một nghiệm riêng có dạng $y_1 = \frac{a}{x}$.

HD giải: $y_1 = \dfrac{1}{x}$ *là một nghiệm của phương trình. Ta tìm nghiệm riêng* $y_2 = u(x)\dfrac{1}{x}$. *Thay vào phương trình ta tìm được* $y_2 = x$. *Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là*

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 x.$$

150) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
$a)\quad y" - 3y' + 2y = 2e^x$

HD giải:
Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x.$$

151) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
$y" - y = \sin x.$

HD giải:
Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

152) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $x^2 y" - 2xy' - 4y = 0$, khi biết một nghiệm riêng có dạng $y_1 = \dfrac{1}{x}$.

HD giải: $y_1 = \dfrac{1}{x}$ *là một nghiệm của phương trình. Ta tìm nghiệm riêng* $y_2 = u(x)\dfrac{1}{x}$. *Thay vào phương trình ta tìm được* $y_2 = x^4$. *Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là*

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^4.$$

153) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" + y = x + 2e^x$

HD giải:
Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x.$$

154) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" - y' + y = x.$

HD giải:
Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = e^{\frac{x}{2}}(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + 1 + x.$$

155) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" - 2y' + y = x + e^x$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + 2 + \frac{1}{2}x^2e^x.$$

156) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y" + y = \sin^2 x.$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2x.$$

157) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 sau: $xy" - y' - \frac{1}{x}y = 0.$

HD giải: *Đây là phương trình Euler nên ta có thể đưa về phương trình tuyến tính với hệ số hằng bằng cách đặt $x = e^t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $y_t" - 2y'_t - y = 0$.*
Phương trình này có nghiệm là

$$y = C_1e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2e^{(1-\sqrt{2})t}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$y = C_1x^{1+\sqrt{2}} + C_2x^{1-\sqrt{2}}.$$

158) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng sau: $y" - 3y' + 2y = 2\cos x$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x.$$

159) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng sau: $y" - y = \sin x + e^x.$

HD giải: *Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:*

$$y = C_1 + C_2e^x + xe^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

160) Dùng phép đổi hàm $y = \dfrac{z}{x^2}$ để giải phương trình vi phân:
$$x^2y" + 4xy' + (x^2+2)y = e^x$$

HD giải: $y = \dfrac{z}{x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{z'x - 2z}{x^3};\ y" = \dfrac{z"x^2 - 4z'x + 6z}{x^4}$
Phương trình trở thành: $z" + z = e^x$ *có một nghiệm riêng* $\overline{y} = \dfrac{e^x}{2}$
Phương trình thuần nhất có phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$
Vậy nghiệm tổng quát: $z = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{e^x}{2}$
Vậy $y = C_1\dfrac{\cos x}{x^2} + C_2\dfrac{\sin x}{x^2} + \dfrac{e^x}{2x^2}$

161) Giải phương trình $y"\cos x + y'\sin x - y\cos^3 x = 0$ bằng phép biến đổi $t = \sin x$

HD giải: $t = \sin x:\ y'_x = y'_t.t'_x = y'_t\cos x$
$y"_{xx} = y"_{tt}\cos^2 x - y'_t\sin x$
Thay vào phương trình: $y"_{tt} - y = 0\ \rightarrow y = C_1e^t + C_2e^{-t} = C_1e^{\sin x} + C_2e^{-\sin x}$

162) Tìm nghiệm riêng của phương trình $(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \dfrac{x}{y}) = 0$
thoả điều kiện y(0) = 2

HD giải: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}},\ y \neq 0$ *TPTQ:* $\dfrac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C$
$y(0) = 2\ \Rightarrow C = 2.$

163) Giải phương trình vi phân $y" + y'tgx - y\cos^2 x = 0$ bằng phép biến đổi $t = \sin x$

HD giải: *Tương tự bài 2*

164) Cho biểu thức: $h(x)\Big((\dfrac{1}{x+y} - \ln(x+y))dx + \dfrac{1}{x+y}dy\Big).$
Hãy tìm hàm số $h(x)$ sao cho biểu thức trên trở thành vi phân toàn phần của một hàm $F(x,y)$ và tìm hàm số đó.

HD giải: *Đặt* $P = h(x)\Big(\dfrac{1}{x+y}\ln(x+y)\Big)$
$Q = h(x).\dfrac{1}{x+y}$
(Điều kiện x+y ¿ 0) để $Pdx + Qdy$ *là vi phân toàn phần:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{-h(x)(x+y+1)}{(x+y)^2} = \frac{h'(x)(x+y) - h(x)}{(x+y)^2}$$

$\Leftrightarrow h'(x+y) + h(x+y) = 0 \Leftrightarrow h' + h = 0 \Leftrightarrow h(x) = e^{-x}$
Và $F(x,y) = e^{-x}\ln(x+y)$

165) Giải phương trình vi phân : $xy" + 2(1-x)y' + (x-2)y = e^{-x}$ bằng phép đổi ẩn hàm $z = yx$

HD giải: $z = yx \Leftrightarrow y = \dfrac{z}{x}$; $y' = \dfrac{z'x - z}{x^2} = ...$; $y" = ...$ *tương tự bài 1*

166) Cho $P(x,y) = e^x \sin y + 2m^2 x \cos y$; $Q(x,y) = e^x \cos y + mx^2 \sin y$. Tìm m để $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm số $F(x,y)$ nào đó và tìm hàm ấy.

HD giải: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow 2x\sin y(m^2 + m) = 0$ *Chọn* $m = 0 V m = -1.$

167) Giải phương trình $x^2 y" + 2xy' + \dfrac{y}{x^2} = 0$ bằng phép biến đổi $x = \dfrac{1}{t}$

HD giải:

168) Tìm hàm $\mu(x^2+y^2)$ sao cho $\mu(x^2+y^2)\Big((x-y)dx + (x+y)dy\Big)$ là vi phân toàn phần của một hàm $F(x,y)$ nào đó. Tìm hàm $F(x,y)$ nếu biết $\mu(1,1) = 0; \mu(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \ln 2$

HD giải: $P(x,y) = h(x^2+y^2)(x-y)$; $Q(x,y) = h(x^2+y^2)(x+y)$
Để $h(x-y)dx + h(x+y)dy$ *là vi phân toàn phần ta phải có:* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$
Đặt $t = x^2 + y^2 \Rightarrow h'_t.2y(x-y) - h = h'_t.2y(x+y) + h$
$\Leftrightarrow -h'_t(x^2+y^2) = h \Leftrightarrow h'_t t = h \Rightarrow h = \dfrac{C_1}{t} \Rightarrow h = \dfrac{C_1}{x^2+y^2}.$
$\Rightarrow F(x,y) = C_1 \int\limits_1^x \dfrac{x-0}{x^2+0^2}dx + C_1 \int\limits_0^y \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy = C_1 arctg\dfrac{y}{2} + \dfrac{C_1}{2}\ln(x^2+y^2) + C_2$
$F(1,1) = 0; F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \ln 2$ *Cho:* $C_1 = 2; C_2 = -(\dfrac{\pi}{2} + \ln 2)$

169) Giải phương trình $x^2 y" + xy' + y = x$ bằng phép đổi biến $x = e^t$

HD giải: $x = e^t$ *ta có:* $y'_x = y'_t.\dfrac{1}{x}$; $y"_{xx} = (y"_{tt} - y'_t)\dfrac{1}{x^2}$
Thay vào phương trình: $y"_{tt} + y = e^t$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$
Tìm nghiệm riêng dạng: $\overline{y} + Ae^t$; $A = \dfrac{1}{2}$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + \dfrac{x}{2}$

170) Giải phương trình vi phân: $xy" - (x+1)y' - 2(x-1)y + x^2 = 0$ biết rằng phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm riêng $y_1 = e^{\alpha x}$ với α là hằng số cần xác định.

HD giải: *Thay nghiệm* $y_1 = e^{\alpha x}$ *vào phương trình rồi đồng nhất được* $\alpha = 2$
Đưa phương trình về dạng: $y" - \dfrac{x+1}{x}y' - \dfrac{2(x-1)}{x}y = -x;\ x \neq 0$
$p(x) = -\dfrac{x+1}{x};\ q(x) = -\dfrac{2(x-1)}{x};\ f(x) = -x$
Tìm nghiệm riêng: $y_2 = e^{2x}\int e^{-4x}e^{\int \frac{x+1}{x}dx}dx = -\dfrac{1}{9}(3x+1)e^{-x}$.
Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$y = C_1e^{2x} + C_2(3x+1)e^{-x}$$

Biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} C_1' = -\dfrac{1}{9}(3x+1)e^{-2x} \\ C_2' = \dfrac{1}{9}e^{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{36}(6x+5)e^{-2x} \\ C_2 = \dfrac{1}{9}e^{x} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *NTQ.*

171) Giải phương trình vi phân $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ bằng phép đổi biến $x = e^t$.

HD giải: $x = e^t$, *ta có:* $y_x' = y_t'.\dfrac{1}{x},\ y"_{xx} = (y"_{tt} - y_t')\dfrac{1}{x^2}$
Phương trình trở thành: $y"_{tt} - 5y_t' + 6y = 0 \Rightarrow$ *NTQ:* $y = C_1x^2 + C_2x^3$

172) Giải phương trình vi phân: $y" - (2e^x+1)y' + e^{2x}y = e^{3x}$ bằng phép đổi biến $t = e^x$.

HD giải: *Đổi biến* $t = e^x \Rightarrow y_x' = y_t'.e^x,\ y"_{xx} = y"_{tt}.e^{2x} + y_t'.e^x$
Thay vào phương trình: $y"_{tt} - 2y_t' + y = t^3$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = e^t(C_1t + C_2)$
Tìm nghiệm riêng dạng $y = At^3 + Bt^2 + Ct + D \rightarrow y = t^3 + 6t^2 + 18t + 24$ *Kết quả* $y = e^{e^x}(C_1e^x + C_2) + e^{3x} + 6e^{2x} + 18e^x + 24$.

173) Giải phương trình vi phân: $(x-1)y" - xy' + y = (x-1)^2e^{2x}$ biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng có dạng $y = e^{\alpha x}$ (α cần xác định).

HD giải: *Đưa phương trình về:* $y" - \dfrac{x}{x-1}.y' + \dfrac{1}{x-1}.y = (x-1)e^{2x}$
Với $p(x) = \dfrac{x}{x-1};\ q(x) = \dfrac{1}{x-1}; f(x) = (x-1)e^{2x}$
Thay $y_1 = e^{\alpha x}$ *vào phương trình thuần nhất tương ứng rồi đồng nhất suy ra* $\alpha = 1$
Tìm nghiệm riêng $y_2 = e^x\int e^{-2x}e^{\int \frac{x}{x-1}dx}dx = -x$

$\Rightarrow$ *NTQ:* $y = C_1e^x + C_2(-x)$
Biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} C_1' = xe^x \\ C_2' = e^{2x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = xe^x - e^x + K_1 \\ C_2 = \dfrac{1}{2}e^{2x} + K_2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = (\frac{x}{2} - 1)e^{2x} + K_1e^x - K_2x$

174) Giải phương trình vi phân: $x^2(x+1)y" = 2y$ biết một nghiệm $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$.

HD giải: *Đưa phương trình về:* $y'' - \frac{2}{x^2(x+1)}.y = 0; p(x) = 0; f(x) = 0.$
Tìm NR dạng

$$\begin{aligned} y_2 &= (1+\frac{1}{x})\int \frac{x^2}{(x+1)^2}.e^{-\int 0dx}dx = (1+\frac{1}{x})(x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{1+x}) \\ &= x + 1 - \frac{x+1}{x}\ln(x+1)^2 - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1(1+\frac{1}{x}) + C_2(x - \frac{1}{x} - 1 + \frac{x+1}{x}\ln(x+1)^2 + 1).$

175) Giải phương trình vi phân $(x^2+1)y" - 2y = 0$ nếu biết một nghiệm của nó có dạng đa thức.

HD giải: *Dễ thấy* $y_1 = x^2 + 1$ *là một nghiệm riêng của (1).*

$$\begin{aligned} \text{Nghiệm thứ hai: } y_2 &= y_1\int \frac{1}{y_1^2}.e^{-\int p(x)dx}dx = (x^2+1)\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2+1)(\frac{x}{x^2+1} + arctgx) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1(x^2+1) + C_2(x^2+1)(\frac{x}{x^2+1} + arctgx).$

176) Giải phương trình vi phân $xy" + 2y' - xy = e^x$ bằng phép đổi hàm $z = xy$.

HD giải: *Đặt* $z = xy \Rightarrow z' = y + xy'; z'' = 2y' + xy''$. *Thay vào phương trình:*

$$z'' - z = e^x \rightarrow \text{NTQ} \quad z = C_1 + C_2e^x$$

Nghiệm riêng dạng: $y = Axe^x \rightarrow A = \frac{1}{2}$
Vậy: $y = \frac{z}{x} = \frac{1}{x}(C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}xe^x)$

177) Chứng tỏ rằng hàm: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$
là nghiệm của phương trình $xf'(x) - (x+1)f(x) = 0$.

HD giải: *Dùng tính chất D'Alembert để chứng tỏ chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}$ *hội tụ với mọi* x

Như vậy hàm $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}$ *xác định với mọi* x.

Hơn nữa: $f(x)=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=xe^x$

$\Rightarrow xf'(x)-(x+1)f(x)=x(x+1)e^x-(x+1)xe^x=0,\ \forall x$ *điều phải chứng minh.*

178) Giải phương trình $x(x^2+6)y"-4(x^2+3)y'+6xy=0$ biết rằng nó có nghiệm dạng đa thức.

HD giải: *Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng* $y_1=Ax^2+Bx+C\Rightarrow y_1=x^2+2$

nghiệm riêng thứ hai: $y_2=y_1\int\dfrac{1}{y_1^2}e^{-\int-\frac{4(x^2+3)}{x(x+6)}dx}dx$

$=(x^2+2)\int\dfrac{x^2(x^2+6)}{(x^2+2)^2}dx=(x^2+2)(x+\dfrac{2x}{(x^2+2)}+2\sqrt{2}\text{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}})$

Vậy NTQ: $y=C_1(x^2+2)+C_2[x^3+4x+2\sqrt{2}(x^2+2)\text{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}]$

179) Giải phương trình $(2x+1)y"+(2x-1)y'-2y=x^2+x$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng $y_1=\dfrac{x^2+4x-1}{2};\ y_2=\dfrac{x^2+1}{2}$.

HD giải: *Từ hai nghiệm riêng* y_1,y_2 *của phương trình ta suy ra nghiệm riêng của phương trình thuần nhất là* $\overline{y_1}=y_1-y_2=2x-1$

Suy ra nghiệm thứ hai:

$$\overline{y_2}=\overline{y_1}\int\frac{1}{\overline{y_1}^2}e^{-\int p(x)dx}dx=(2x-1)\int\frac{1}{(2x-1)^2}e^{-\int\frac{2x-1}{2x+1}dx}dx$$

$$=2(x-1)\int\frac{(2x+1)e^{-x}}{(2x-1)^2}dx=\frac{1}{2}(2x-1)[-\frac{(2x+1)e^{-x}}{(2x-1)^2}+\int\frac{e^{-x}(1-2x)}{2x-1}dx]$$

$$=-e^{-x}$$

Suy ra NTQ: $\overline{y}=C_1(2x-1)+C_2e^{-x}$

Và nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu: $y=C_1(2x-1)+C_2e^{-x}+\dfrac{x^2+1}{2}$

180) Xác định hằng số α sao cho $y=e^{\alpha x^2}$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y"+4xy'+(4x^2+2)y=0$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình ấy.

HD giải: *Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng* $y=e^{\alpha x^2}$ *thay vào được* $\alpha=-1$ *và nghiệm riêng* $y_1=e^{-x^2}$

Nghiệm thứ hai: $y_2=y_1\int\dfrac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx=e^{-x^2}\int e^{2x^2}e^{-\int 4xdx}dx=xe^{-x^2}$.

Vậy NTQ: $y=C_1e^{-x^2}+C_2xe^{-x^2}$.

181) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-y\end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ *(bội 2)*

Tìm nghiệm dạng $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at+b)e^t \\ (ct+d)e^t \end{pmatrix}$ *thay vào hệ rồi đồng nhất được:* $\begin{cases} a = 3a - c \\ a + b = 3b - d \\ c = 4a - c \\ c + d = 4b - d \end{cases}$

Cho $a = C_1,\ b = C_2 \Rightarrow c = 2C_1,\ d = 2C_2 - C_1$

Vậy nghiệm tổng quát: $\begin{cases} x = (C_1t + C_2)e^t \\ y = (2C_1t + 2C_2 - C_1)e^t. \end{cases}$

182) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$

HD giải: *Tương tự bài 1), phương trình đặc trưng có nghiệm* $\lambda = 3$ *(bội 2)*

Tìm nghiệm dạng $\begin{pmatrix} (at+b)e^{3t} \\ (ct+d)e^{3t} \end{pmatrix} \Rightarrow a = C_1,\ c = C_1,\ b = C_2,\ d = C_1 + C_2$

Vậy NTQ: $\begin{cases} x = (C_1t + C_2)e^{3t} \\ y = (2C_1t + C_1 + C_2)e^{3t}. \end{cases}$

183) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2$

Với các $\lambda_i;\ i = 1, 2, 3$ *giải hệ:* $\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda_i & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ P_{3i} \end{pmatrix} = 0$

Để tìm nghiệm riêng tương ứng. Từ đó suy ra hệ nghiệm cơ bản:
$x_1 = 1,\ y_1 = 0,\ z_1 = 1;\ x_2 = 0,\ y_2 = e^{-t},\ z_2 = -2e^{-t};\ x_3 = 3e^{2t},$
$y_3 = -2e^{-2t},\ z_3 = e^{2t}.$

Vậy hệ nghiệm tổng quát: $\begin{cases} x = C_1 + 3C_3e^{2t} \\ y = C_2e^{-t} - 2C_3e^{2t} \\ z = C_1 - 2C_2e^{-t} + C_3e^{2t} \end{cases}$

184) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 5x - 3x = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x + y = 0 \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -3 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ *(bội 2)*

$\Rightarrow$ *nghiệm có dạng* $\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} e^{2t}$ *thay vào hệ* $\Rightarrow \begin{cases} a-3b=3d \\ a+c=0 \\ c+3b=-3d \end{cases}$

Cho $a=C_1,\ b=C_2 \Rightarrow c=-C_1,\ d=\dfrac{C_1}{3}-C_2$

Vậy nghiệm tổng quát: $\begin{cases} x=(C_1t+C_2)e^{2t} \\ y=(-C_1t+\dfrac{C_1}{3}-C_2)e^{2t}. \end{cases}$

185) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-3y \\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y+2\sin t \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng có hai nghiệm* $\lambda_{1,2}=\pm 1$

$+\ \lambda_1=-1$ *giải hệ:* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_{11}=\gamma_{12}=1.$

$+\ \lambda_2=1$ *giải hệ:* $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_{21}=3;\ \gamma_{22}=1.$

Hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng là:

$$\begin{cases} x_1=e^{-t} \\ y_1=e^{-t} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2=3e^{t} \\ y_2=e^{t} \end{cases}$$

Vậy NTQ của hệ thuần nhất: $\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+3C_2e^{t} \\ y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{t} \end{cases}$

Biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} C_1'e^{-t}+3C_2'e^{t}=0 \\ C_1'e^{-t}+C_2'e^{t}=2\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'=3e^{t}\sin t \\ C_2'=e^{-t}\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(t)=\dfrac{3}{2}e^{t}(\sin t-\cos t) \\ C_2(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-t}(\sin t+\cos t) \end{cases}$$

Vậy NTQ: $\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+3C_2e^{t}-3\cos t \\ y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{t}+\sin t-2\cos t \end{cases}$

186) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-y+z \\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y-z \\ \dfrac{dz}{dt}=x-y+2z \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ *có 3 nghiệm* $\lambda_1=1;$ $\lambda_2=2;\ \lambda_3=3.$

ứng với λ_i *giải hệ:* $\begin{pmatrix} 2-\lambda_i & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_i & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ P_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Được $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Suy ra hệ nghiệm cơ bản* $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

Vậy NTQ: $\begin{cases} x = C_2e^{2t} + C_3e^{3t} \\ y = C_1e^t + C_2e^{2t} \\ z = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}. \end{cases}$

187) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

HD giải: *Dùng phương pháp khử: Lấy đạo hàm theo t phương trình thứ hai:* $y" = 2x' + y'$
Để ý phương trình đầu, đưa về: $y" = 2(y - 5\cos t) + y' \Leftrightarrow y" - y' - 2y = -10\cos t$.
Đây là phương trình tuyến tính cấp hai, giải ra được nghiệm tổng quát:

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + 3\cos t + \sin t$$

Thay vào phương trình đầu: $x = \frac{1}{2}C_1e^{2t} - C_2e^{-t} - \cos t - 2\sin t$

Vậy NTQ: $\begin{cases} x = A_1e^{2t} + A_2e^{-t} - \cos t - 2\sin t \\ y = 2A_1e^{2t} - A_2e^{-t} + 3\cos t + \sin t. \end{cases}$

188) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y' = 3y + 2z + 4e^{5x} \\ z' = y + 2z \end{cases}$

HD giải: *Nghiệm phương trình đặc trưng* $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 4$*; NTQ:* $\begin{cases} y = C_1e^x + 2C_2e^{4x} \\ z = -C_1e^x + C_2e^{4x} \end{cases}$

Biến thiên hằng số: $\begin{cases} C_1' = \dfrac{4}{3}e^{4x} \\ C_2' = \dfrac{4}{3}e^x \end{cases} \to NTQ \begin{cases} y = C_1e^x + 2C_2e^{4x} + 3e^{5x} \\ z = -C_1e^x + C_2e^{4x} + e^{5x} \end{cases}$

189) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x \\ z' = 3y - 2z + 4e^x \end{cases}$

HD giải: *Nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất:* $\begin{cases} y = C_1e^x + C_2e^{-x} \\ z = C_1e^x + 3C_2e^{-x} \end{cases}$

Nghiệm riêng của hệ không thuần nhất: $\begin{cases} y^* = xe^x \\ z^* = (x+1)e^x. \end{cases}$

Vậy nghiệm tổng quát: $\begin{cases} y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x \\ z = C_1e^x + 3C_2e^{-x} + (x+1)e^x. \end{cases}$

190) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y' = 2y - 4z + 4e^{-2x} \\ z' = 2y - 2z \end{cases}$

HD giải: *Nghiệm tổng quát:* $\begin{cases} y = C_1(\cos 2x - \sin 2x) + C_2(\cos 2x + \sin 2x) \\ z = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + e^{-2x}. \end{cases}$

191) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = z - 4y. \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. *Khi đó* $\lambda_1 = 1 + 2i,\ \lambda_2 = 1 - 2i$. *Hệ thuần nhất có nghiệm*

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x),\ z = 2e^x(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x).$$

192) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z + e^x \\ \dfrac{dz}{dx} = z - 4y. \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. *Khi đó* $\lambda_1 = 1 + 2i,\ \lambda_2 = 1 - 2i$. *Hệ thuần nhất có nghiệm*

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x),\ z = 2e^x(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x).$$

Và nghiệm của hệ không thuần nhất

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x),\ z = 2e^x(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x) - e^x.$$

193) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2z + 4y + e^{2x}. \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng* $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$. *Khi đó* $\lambda_1 = 2 + 2i,\ \lambda_2 = 2 - 2i$. *Hệ thuần nhất có nghiệm*

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x),\ z = -2e^{2x}(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x).$$

Và nghiệm của hệ không thuần nhất

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4}e^{2x},\ z = -2e^{2x}(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x).$$

194) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z + e^x \\ \dfrac{dz}{dx} = z - 4y. \end{cases}$

HD giải:

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. *Khi đó* $\lambda_1 = 1 + 2i,$

$\lambda_2 = 1 - 2i$. *Hệ thuần nhất có nghiệm*

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x),\ \ z = 2e^x(C_2\cos 2x - C_1\sin 2x).$$

Và nghiệm của hệ không thuần nhất

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x),\ \ z = 2e^x(C_2\cos 2x - C_1\sin 2x) - e^x.$$

195) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} &= x - 5\sin t. \end{cases}$

HD giải: *Nghiệm tổng quát của hệ phương trình thuần nhất:*

$$\begin{cases} x &= C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} \\ y &= -C_1e^{t} + C_2e^{2t}. \end{cases}$$

Biến thiên hằng số để được nghiệm:

$$\begin{cases} x &= C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} + \frac{8}{3}\sin t + \frac{4}{3}\cos t \\ y &= -C_1e^{t} + C_2e^{2t} + 2\cos t - \sin t. \end{cases}$$

196) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x - 2y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} &= x + 4y + e^{2t}. \end{cases}$

HD giải: *Nghiệm của phương trình đặc trưng:* $r_1 = 2; r_2 = 3$; *từ đó được NTQ của hệ phương trình thuần nhất là:* $\begin{cases} x &= 2C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ y &= -C_1e^{2t} - C_2e^{3t}. \end{cases}$

Biến thiên hằng số để được nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất:

$$\begin{cases} x &= 2C_1e^{2t} + C_2e^{3t} - \dfrac{3}{2}e^t + 2te^{2t} \\ y &= -C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + \dfrac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t}. \end{cases}$$

197) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} &= 4y - z. \end{cases}$

HD giải: *Nghiệm của phương trình đặc trưng:* $r_1 = r_2 = 3$. *Vậy NTQ có dạng:* $\begin{cases} x &= (\lambda_1 + \mu_1 t)e^{3t} \\ y &= (\lambda_2 + \mu_2 t)e^{3t}. \end{cases}$ *với* $\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1; \mu_2 = \mu_1$

Tức là: $\begin{cases} x &= (C_1 + C_2t)e^{3t} \\ y &= (C_1 + C_2 + C_2t)e^{3t}. \end{cases}$

198) Tìm nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 3x+8y \\ \dfrac{dy}{dt} &= -x-3y \end{cases}$

thỏa mãn các điều kiện: $x(0)=6;\ y(0)=-2$

HD giải: *Từ phương trình thứ hai:* $x=-\dfrac{dy}{dt}-3y$, *lấy đạo hàm theo t hai vế, rồi thay vào phương trình thứ nhất của hệ được:* $\dfrac{d^2y}{dt}-y=0$, *giải ra:* $y=C_1e^t-C_2e^{-t}$, *suy ra* $x=-4C_1e^t-2C_2e^{-t}$

thỏa mãn các điều kiện $x(0)=6;\ y(0)=-2$, *suy ra* $C_1=C_2=-1$. *Vậy nghiệm của hệ:*

$$\begin{cases} x &= 4e^t+2e^{-t} \\ y &= -e^t-e^{-t} \end{cases}$$

199) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 3x-y+z \\ \dfrac{dy}{dt} &= -x+5y-z \\ \dfrac{dz}{dt} &= x-y+3z. \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $\lambda^3-11\lambda^2+36\lambda-36=0$, *giải ra* $\lambda_1=2;\lambda_2=3;\lambda_3=6$. *Từ đó được ba hệ nghiệm cơ bản:*

$$\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ e^{6t} \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ -2e^{6t} \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{3t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} x &= C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+C_3e^{6t} \\ y &= C_2e^{3t}-2C_3e^{6t} \\ z &= -C_1e^{2t}+C_2e^{2t}+C_3e^{6t}. \end{cases}$$

200) Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= y+z \\ \dfrac{dz}{dx} &= z-4y. \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng:* $(\lambda-1)(\lambda-2)=0$, *giải ra* $\lambda_1=1;\lambda_2=2$. *Từ đó được ba hệ nghiệm cơ bản:*

$$\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -3e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} y &= C_1e^{x}+2C_2e^{3x} \\ z &= -C_1e^{x}-3C_2e^{2x}. \end{cases}$$

201) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} & = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

HD giải: *Phương trình đặc trưng có các nghiệm* $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 1$. *Từ đó được hệ nghiệm cơ bản:* $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}.$

Vậy nghiệm tổng quát: $\begin{cases} x & = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{t} \\ y & = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}. \end{cases}$

Biến thiên hằng số: $\begin{cases} C'_1 e^{-t} + 3C'_2 e^{t} & = 0 \\ C'_1 e^{-t} + C'_2 e^{t} & = 2\sin t. \end{cases} \iff \begin{cases} C'_1 & = 3e^{t}\sin t \\ C'_2 & = e^{-t}\sin t. \end{cases}$

Giải ra: $\begin{cases} C_1(t) = \dfrac{3}{2} e^{t}(\sin t - \cos t) \\ C_2(t) = -\dfrac{1}{2} e^{-t}(\sin t + \cos t). \end{cases}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ: $\begin{cases} x(t) & = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{t} - 3\cos t \\ y(t) & = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + \sin t - 2\cos t. \end{cases}$