BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Đặng Minh Thế

BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh 2012

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Đặng Minh Thế

BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: **Toán Giải Tích**

Mã số: **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGUYỄN CAM

Thành phố Hồ Chí Minh 2012

MỤC LỤC

PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Biến đổi Laplace là một phép biến đổi tích phân quan trọng. Ứng dụng lớn nhất của nó là để giải các phương trình vi phân và các bài toán liên quan (bài toán giá trị biên và bài toán điều kiện đầu). Nguồn gốc của ứng dụng này là ở chỗ biến đổi Laplace cho phép chuyển từ phép tính vi tích phân trên hàm sang các phép tính đại số trên ảnh của hàm qua biến đổi Laplace. Các phép biến đổi cho phép chuyển như vậy gọi chung là *phép tính toán tử* (operational calculus).

Biến đổi Laplace được đặt theo tên của nhà toán học và thiên văn học nổi tiếng người Pháp *Pierre Simon Laplace* (1749-1827). Laplace nghiên cứu vấn đề này đầu tiên vào năm 1782. Tuy nhiên tính hữu dụng của phương pháp này không được công nhận. Kỹ thuật thực tế để áp dụng biến đổi Laplace rất hiệu quả như hiện nay được phát triển khoảng một trăm năm sau bởi kỹ sư điện người Anh là Oliver Heaviside (1850-1925). Vì vậy biến đổi Laplace cũng còn được gọi là *phép tính Heaviside* (Heaviside calculus).

Việc tìm hiểu lý thuyết về Laplace và một số ứng dụng của nó là một trong những đề tài có ý nghĩa cho học viên cao học. Vì thế được sự giúp đỡ và hướng dẫn của thầy **Ts**. **Nguyễn Cam**, tôi quyết định chọn đề tài “ ***Biến đổi Laplace và một số ứng dụng***” làm đề tài nghiên cứu của mình.

2. Mục tiêu của đề tài

Trình bày lý thuyết cơ bản về biến đổi Laplace như định nghĩa, tính chất, biến đổi Laplace ngược và một số phương pháp tìm biến đổi Laplace thông dụng.

Ứng dụng biến đổi Laplace để giải các phương trình vi phân thường, phương trình vi phân đạo hàm riêng, phương trình sai phân và vi sai phân,…và các bài toán liên quan thường xuất hiện trong vật lí và khoa học kĩ thuật.

3. Phương pháp nghiên cứu

Thu thập các bài báo khoa học, các sách vở có liên quan đến đề tài luận văn, tìm hiểu chúng và trình bày các kết quả về đề tài theo hiểu biết của mình, theo hệ thống khoa học với các chứng minh chi tiết.

Sử dụng các kết quả của Hàm biến phức, Biến đổi tích phân,…

4. Bố cục luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm có ba phần

CHƯƠNG 1 BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Trong chương này chúng tôi trình bày các vấn đề cơ bản của biến đổi Laplace như là định nghĩa, tính chất, điều kiện tồn tại của biến đổi Laplace và một số phương pháp tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm ảnh đã cho.

CHƯƠNG 2 MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày các ứng dụng của biến đổi Laplace vào việc giải các phương trình

- Phương trình vi phân thường,
- Phương trình đạo hàm riêng,
- Phương trình tích phân,
- Phương trình sai phân và phương trình vi sai phân.

Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày ứng dụng của biến đổi Laplace vào việc nghiệm của bài toán giá trị biên, tìm hàm chuyển và đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính.

PHỤ LỤC MỘT SỐ KIẾN THỨC ĐƯỢC SỬ DỤNG TRONG LUẬN VĂN

Chương 1 BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

1.1 Định nghĩa biến đổi Laplace và các ví dụ

Biến đổi Laplace của hàm số $f(t)$ với $0 \le t < \infty$ là một hàm phức được định nghĩa bởi tích phân suy rộng

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{1.1.1}$$

Phép biến đổi Laplace của hàm $f(t)$ tồn tại nếu tích phân $(1.1.1)$ hội tụ với giá trị của s thuộc miền nào đó. Trường hợp ngược lại ta nói phép biến đổi Laplace của hàm số $f(t)$ không tồn tại. Ta gọi hàm $f(t)$ trong định nghĩa trên là hàm gốc và hàm biến đổi $\overline{f}(s)$ là hàm ảnh.

Sử dụng định nghĩa $(1.1.1)$ ta có biến đổi Laplace của một số hàm cơ bản sau đây.

Ví dụ 1.1.1

Nếu $f(t) = 1$ với $t > 0$ thì

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]\Bigg|_{t=0}^{T} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}\right]\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Do đó nếu $\operatorname{Re} s > 0$ thì giới hạn trên tồn tại và $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$.

Ví dụ 1.1.2

Nếu $f(t) = e^{at}$, trong đó a là hằng số thực thì ta có

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$

$$= \frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a}, \qquad \operatorname{Re} s > a. \tag{1.1.3}$$

Ví dụ 1.1.3

Nếu $f(t) = t^n$, trong đó n là một số nguyên dương thì ta có

$$\overline{f}(s) = \mathscr{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \tag{1.1.4}$$

Thật vậy, ta có

$$I_n = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty t^n d\left(e^{-st}\right)$$

$$= -\frac{1}{s}\left(t^n e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt$$

$$= \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}I_{n-1}.$$

Do đó

$$\mathscr{L}\left\{t^n\right\} = I_n = \frac{n}{s}I_{n-1} = \cdots = \left(\frac{n!}{s^n}\right)I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

với $I_0 = \dfrac{1}{s}.$

Ví dụ 1.1.4

Nếu $f(t) = \sin at$, trong đó a là số thực thì ta có

$$\mathscr{L}\left\{\sin at\right\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \tag{1.1.5}$$

Thật vậy, ta đặt

$$I = \mathscr{L}\left\{\sin at\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at dt$$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{a}e^{-st}\cos at\Big|_{t=0}^{\infty} - \frac{s}{a}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos atdt \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left\{\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{s}{a}\int_0^{\infty} e^{-st}\sin atdt\right\} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^{\infty} e^{-st}\sin atdt = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}I \end{aligned}$$

Do đó

$$I = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}I$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)I = \frac{1}{a}$$

Suy ra

$$\mathscr{L}\{\sin at\} = I = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

1.2 Điều kiện tồn tại cho biến đổi Laplace

Hàm f được gọi là một *hàm gốc* nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau

i) f bị triệt tiêu khi $t < 0$,

ii) f *liên tục từng khúc* (piecewise continous) trên $[0,\infty)$,

iii) f không tăng nhanh hơn hàm mũ khi $t \to \infty$ nghĩa là tồn tại số $M > 0$ và $\alpha > 0$ sao cho

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \quad \forall t \ge 0.$$

Số $\alpha_0 = \inf \alpha$, với tất cả α thỏa mãn (iii) được gọi là chỉ số tăng của hàm f . Chú ý rằng số α_0 có thể không thỏa (iii).

Hàm số f được gọi là *liên tục từng khúc* trên $[0,\infty)$ nếu hàm f liên tục tại mọi điểm thuộc $[0,\infty)$ ngoại trừ một số hữu hạn các điểm gián đoạn, đồng thời tại các điểm t mà f không liên tục thì $f(t^+)$ và $f(t^-)$ tồn tại.

Định lý 1.2.1

Nếu $f(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0 thì biến đổi Laplace của $f(t)$ tồn tại với mọi s thỏa $\operatorname{Re} s > \alpha_0$.

Chứng minh

Do f là hàm gốc với chỉ số tăng α_0 nên tồn tại số $M > 0$ sao cho

$$\left|f(t)\right| \le Me^{(\alpha_0+\varepsilon)t}, \quad \forall t \ge 0.$$

Ta có

$$\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \le M\int_0^\infty e^{-(x-\alpha_0-\varepsilon)t} dt$$

$$= \left.\frac{Me^{-(x-\alpha_0-\varepsilon)t}}{-(x-\alpha_0-\varepsilon)}\right|_{t=0}^{\infty} = \frac{M}{x-\alpha_0-\varepsilon},$$

Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\operatorname{Re} s = x > \alpha_0 + \varepsilon$.

Do đó biến đổi Laplace tồn tại và tích phân $(1.1.1)$ là hội tụ tuyệt đối khi $\operatorname{Re} s > \alpha_0$.

Chú ý

a) Tích phân $(1.1.1)$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu

$$\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt < \infty$$

b) Tích phân $(1.1.1)$ được gọi là hội tụ đều đối với s trên miền xác định Ω trong mặt phẳng phức nếu bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại một số τ_0 sao cho với mọi $\tau \ge \tau_0$ thì

$$\left|\int_\tau^\infty e^{-st} f(t) dt\right| < \varepsilon$$

với mọi s trong Ω.

Định lý 1.2.2

Cho f là hàm gốc có chỉ số tăng α_0. Khi đó biến đổi Laplace

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (1.1.6)$$

hội tụ đều trên miền $\{s | \operatorname{Re} s > \alpha\}, \alpha > \alpha_0$.

Chứng minh

Ta sử dụng *tiêu chuẩn weierstrass* [Định lý B.3 – Trang 103] để chứng minh định lý trên. Thật vậy,

Do f là hàm gốc có chỉ số tăng α_0 nên tồn tại số $M > 0$ sao cho

$$|f(t)| \le Me^{(\alpha_0+\varepsilon)t}, \quad t \ge 0$$

Khi đó

$$\left|e^{-st} f(t)\right| \le Me^{-(x-\alpha_0-\varepsilon)t} \le Me^{-(\alpha-\alpha_0-\varepsilon)t},$$

trong đó $\operatorname{Re} s = x \ge \alpha$ và ta chọn ε đủ nhỏ để $\alpha > \alpha_0 + \varepsilon$.

Do $\int_0^\infty e^{-(\alpha-\alpha_0-\varepsilon)t}dt$ hội tụ với $\alpha > \alpha_0 + \varepsilon$ nên theo tiêu chuẩn weierstrass ta có tích phân $(1.1.6)$ hội tụ đều trên miền $\{s | \operatorname{Re} s \ge \alpha\}, \alpha > \alpha_0$.

Định lý 1.2.3

Cho f là hàm gốc có chỉ số tăng α_0. Khi đó $\overline{f}(s)$ là hàm giải tích trong miền $\operatorname{Re} s > \alpha_0$.

Chứng minh

Ta có

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right)dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}(-t)\,dt,$$

Do f là hàm gốc có chỉ số tăng α_0 nên ta có

$$\left|(-t)e^{-st} f(t)\right| \le tMe^{-(x-\alpha_0-\varepsilon)t} \le Me^{-(\alpha_1-\alpha_0-\delta)t},$$

trong đó $\operatorname{Re} s = x \ge \alpha_1$ và $\delta > 0$ có thể chọn đủ nhỏ để $\alpha_1 > \alpha_0 + \delta$.

Do tích phân $\int_0^{\infty} e^{-(\alpha_1-\alpha_0-\delta)t}dt$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn Weierstrass thì ta có tích phân $\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\right)dt$ hội tụ đều trên miền $\{s|\operatorname{Re}s\geq\alpha_1\}$, với mọi α_1, $\alpha_1>\alpha_0$.

Như vậy ta có tích phân $\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$ hội tụ và tích phân $\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\right)dt$ hội tụ đều trên miền $\{s|\operatorname{Re}s\geq\alpha_1\}$, với mọi α_1, $\alpha_1>\alpha_0$ nên theo [Định lý B.4 – Trang 103] ta có hàm ảnh có đạo hàm là

$$\overline{f}'(s)=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\right)dt,$$

tại mọi điểm s thuộc các miền trên. Do đó $\overline{f}(s)$ giải tích trong miền $\operatorname{Re}s>\alpha_0$.

1.3 Các tính chất cơ bản của biến đổi Laplace

Định lý 1.3.1 (Tính chất tuyến tính)

Cho các hàm gốc f_k với các chỉ số tăng là α_k, biến đổi Laplace là $\overline{f}_k$, $k=1,2,...,n$. Khi đó biến đổi Laplace của hàm tổ hợp tuyến tính f của các hàm f_k

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k f_k(t),\quad \text{với } c_k \text{ là hằng số}$$

là hàm $\overline{f}$ được xác định bởi

$$\overline{f}(s)=\sum_{k=1}^{n}c_k\overline{f}_k(s), \qquad (1.3.1)$$

với miền xác định $\operatorname{Re}s>\max\alpha_k$.

Chứng minh. Suy ra từ định nghĩa và tính chất tuyến tính của tích phân.

Ví dụ 1.3.1

Từ kết quả của ví dụ 1.1.2 và tính chất tuyến tính ta có biến đổi Laplace của các hàm sau

a) Ta có

$$\mathscr{L}\{\sin\alpha t\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s - i\alpha} - \frac{1}{s + i\alpha}\right]$$
$$= \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, \qquad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im}\alpha|$$

b) Tương tự ta có

$$\mathscr{L}\{\cos\alpha t\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}\right)\right\} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}, \qquad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im}\alpha|$$

c) $\mathscr{L}\{\cosh\alpha t\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right)\right\} = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}, \qquad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re}\alpha|$

d) $\mathscr{L}\{\sinh\alpha t\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right)\right\} = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}, \qquad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re}\alpha|.$

Định lý 1.3.2 (Tính chất đồng dạng)

Cho $\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$, f là hàm gốc có chỉ số tăng α_0 và $c > 0$ là hằng số. Khi đó

$$\mathscr{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}\overline{f}\left(\frac{s}{c}\right), \qquad \operatorname{Re} s > c\alpha \tag{1.3.2}$$

Chứng minh

$$\mathscr{L}\{f(ct)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-su/c} f(u)\,du = \frac{1}{c}\overline{f}\left(\frac{s}{c}\right).$$

Định lý 1.3.3 (Tính chất dịch chuyển ảnh)

Nếu $\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$, f có chỉ số tăng là α_0 thì

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = \overline{f}(s - a), \qquad \operatorname{Re} s > \alpha_0 + \operatorname{Re} a \tag{1.3.3}$$

Chứng minh

Theo định nghĩa ta có

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = \overline{f}(s - a).$$

Ví dụ 1.3.2

Các kết quả dưới đây nhận được dễ dàng từ công thức $(1.3.3)$

$$\mathscr{L}\left\{t^n e^{at}\right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a \tag{1.3.4}$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\sin bt\right\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad \operatorname{Re} s > \left|\operatorname{Im} b\right| + \operatorname{Re} a \tag{1.3.5}$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad \operatorname{Re} s > \left|\operatorname{Im} b\right| + \operatorname{Re} a. \tag{1.3.6}$$

Định lý 1.3.4

Nếu $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \overline{f}(s)$ thì

$$\mathscr{L}\left\{f(t-a)H(t-a)\right\} = e^{-as}\overline{f}(s) = e^{-as}\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}, \qquad a > 0 \tag{1.3.7}$$

hay

$$\mathscr{L}\left\{f(t)H(t-a)\right\} = e^{-as}\mathscr{L}\left\{f(t+a)\right\}, \tag{1.3.8}$$

trong đó $H(t-a)$ là hàm bước nhảy đơn vị Heaviside được định nghĩa bởi

$$H(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

Chứng minh

Theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{f(t-a)H(t-a)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)H(t-a)\,dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt,\end{aligned}$$

Đặt $t - a = \tau, \ \ dt = d\tau$

Khi đó

$$\mathscr{L}\left\{f(t-a)H(t-a)\right\} = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau = e^{-as}\overline{f}(s).$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\mathscr{L}\left\{ f(t)H(t-a)\right\} = e^{-as}\mathscr{L}\left\{ f(t+a)\right\}.$$

Đặc biệt, nếu $f(t)=1$ thì

$$\mathscr{L}\left\{H(t-a)\right\} = \frac{1}{s}\exp(-sa) \tag{1.3.9}$$

Định lý 1.3.5 (Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn)

Cho $\mathscr{L}\left\{ f(t)\right\} = \overline{f}(s)$ và f là một hàm tuần hoàn với chu kì T thì ta có

$$\mathscr{L}\left\{ f(t)\right\} = \left[1-\exp(-sT)\right]^{-1}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \tag{1.3.10}$$

Chứng minh

Theo định nghĩa ta có

$$\mathscr{L}\left\{ f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,.$$

Đặt $t=\tau+T$ trong tích phân thứ hai ta được

$$\overline{f}(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \exp(-sT)\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau+T)\,d\tau$$

Do $f(\tau+T) = f(\tau)$ và thay biến τ bởi t trong tích phân thứ hai ta được

$$\begin{aligned}\overline{f}(s) &= \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \exp(-sT)\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\\ &= \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \exp(-sT)\,\overline{f}(s).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\mathscr{L}\left\{ f(t)\right\} = \left[1-\exp(-sT)\right]^{-1}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt.$$

Định lý 1.3.6 (Biến đổi Laplace của đạo hàm)

Cho $\mathscr{L}\left\{ f(t)\right\} = \overline{f}(s)$. Giả sử f' tồn tại và là hàm gốc thì

$$\mathscr{L}\left\{ f'(t)\right\} = s\mathscr{L}\left\{ f(t)\right\} - f(0) = s\,\overline{f}(s) - f(0), \quad \operatorname{Re} s > \alpha_0 \tag{1.3.11}$$

Chứng minh

Theo định nghĩa ta có

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt,$$

Giả sử f là hàm gốc có chỉ số tăng là α_0. Khi đó

$$\lim_{t\to\infty}\left|f(t)e^{-st}\right| \le \lim_{t\to\infty} e^{-xt}\left|f(t)\right| \le M \lim_{t\to\infty} e^{-(x-\alpha_0-\varepsilon)t} = 0, \qquad \operatorname{Re} s = x > \varepsilon + \alpha_0$$

Tích phân từng phần của tích phân trên ta được

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \left[e^{-st} f(t)\right]_{t=0}^{\infty} + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \\ &= s\,\overline{f}(s) - f(0),\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f''(t)\} &= s\mathscr{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s\left(s\overline{f}(s) - f(0)\right) - f'(0) \\ &= s^2\overline{f}(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Tổng quát

Cho $\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$. Giả sử $f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t), f^{(n)}(t)$ là các hàm gốc thì ta có

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\overline{f}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0).$$

1.4 Định lý tích chập

Định lý 1.4.1 (Định lý tích chập)

Cho f và g là các hàm gốc có chỉ số tăng lần lượt là α_0, β_0. Khi đó

$$\mathscr{L}\{f(t)*g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} = \overline{f}(s)\overline{g}(s) \qquad (1.4.1)$$

trong đó $f(t)*g(t)$ được gọi là tích chập của $f(t)$ và $g(t)$ và được định nghĩa bởi tích phân

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \qquad (1.4.2)$$

Ta ghi tắt là $f(t)*g(t)=(f*g)(t)$.

Chứng minh

Với $t>0,\ \varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\left|(f*g)(t)\right| &= \left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right| \le \int_0^t \left|f(\tau)g(t-\tau)\right|d\tau\\ &\le M\int_0^t e^{(\alpha_0+\varepsilon)\tau}e^{(\beta_0+\varepsilon)(t-\tau)}d\tau = Me^{(\beta_0+\varepsilon)t}\int_0^t e^{(\alpha_0-\beta_0)\tau}d\tau\\ &\le \begin{cases} M_1e^{(\alpha_0+\varepsilon)t}, & \alpha_0\ge\beta_0\\ M_2e^{(\beta_0+\varepsilon)t}, & \beta_0>\alpha_0,\end{cases}\end{aligned} \qquad (1.4.3)$$

bất đẳng thức sau cùng có được bằng cách tính trực tiếp tích phân. Vậy $f*g$ là hàm gốc có chỉ số tăng $\gamma_0\le\max\{\alpha_0,\beta_0\}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\}.\mathscr{L}\{g(t)\} &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-su}g(u)du\right)\\ &= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+u)}f(\tau)g(u)du\right)d\tau.\end{aligned}$$

Đặt $t=\tau+u$, $du=dt$ với τ cố định

Khi đó ta có

$$\mathscr{L}\{f(t)\}.\mathscr{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)dt\right)d\tau \qquad (1.4.4)$$

Do $g(t)=0,\ \ t<0$ thì $g(t-\tau)=0,\ \ t<\tau$ và ta viết lại $(1.4.4)$ như sau

$$\mathscr{L}\{f(t)\}.\mathscr{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)dt\,d\tau.$$

Do biến đổi Laplace của f và g hội tụ đều nên ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân [Định lý B.2 – Trang 102].

$$\mathscr{L}\{f(t)\}.\mathscr{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, dt$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right) dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right) dt$$
$$= \mathscr{L}\{(f*g)(t)\}.$$

1.5 Đạo hàm và tích phân của biến đổi Laplace

Định lý 1.5.1 (Đạo hàm của biến đổi Laplace)

Nếu $\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$, f là hàm gốc có chỉ số tăng là α_0 thì

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial s^n} \overline{f}(s), \quad \operatorname{Re} s > \alpha_0 \tag{1.5.1}$$

trong đó $n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$

Chứng minh

Theo định lý 1.2.2 biến đổi Laplace của hàm f hội tụ đều và các điều kiện còn lại trong định lý trên thỏa mãn [Định lý B.4 – Trang 103]. Khi đó, đạo hàm theo s bên trong dấu tích phân của $(1.1.1)$ được cho phép

$$\frac{\partial}{\partial s} \overline{f}(s) = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t)\, dt$$
$$= -\int_0^\infty t\, f(t) e^{-st} dt = -\mathscr{L}\{t\, f(t)\} \tag{1.5.2}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \overline{f}(s) = (-1)^2 \mathscr{L}\{t^2 f(t)\}, \tag{1.5.3}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial s^3} \overline{f}(s) = (-1)^3 \mathscr{L}\{t^3 f(t)\}. \tag{1.5.4}$$

Tổng quát

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n}\overline{f}(s) = (-1)^n \mathscr{L}\{t^n f(t)\}. \qquad (1.5.5)$$

Định lý 1.5.2 (Tích phân của biến đổi Laplace)

Cho $\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$. Nếu $f(t)/t$ là hàm gốc với chỉ số tăng là α_0 thì

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \overline{f}(u)\,du.$$

$(1.5.6)$

Chứng minh

Đặt

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt$$

Theo định lý 1.5.1 ta có

$$G'(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-t) f(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = -\overline{f}(s).$$

Ta có

$$\int_s^\infty \overline{f}(s)\,ds = -\int_s^\infty G'(u)\,du = G(s) - G(\infty). \qquad (1.5.7)$$

Mặt khác

$$|G(s)| \le \int_0^\infty e^{-xt}\left|\frac{f(t)}{t}\right| dt \le M\int_0^\infty e^{(-x+\alpha_0+\varepsilon)t}dt$$

$$= M\left.\frac{e^{(-x+\alpha_0+\varepsilon)t}}{-x+\alpha_0+\varepsilon}\right|_{t=0}^{\infty} = \frac{M}{x-\alpha_0-\varepsilon},$$

Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\operatorname{Re} s = x > \alpha_0 + \varepsilon.$

Cho $s \to \infty$ ta được $G(\infty) = 0$. Thay vào $(1.5.7)$ ta có

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \overline{f}(u)\,du.$$

Định lý đã được chứng minh.

Ví dụ 1.5.1

Tính $\mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$,

Ta có

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = a\int_s^\infty \frac{ds}{s^2+a^2} = \frac{1}{a}\int_s^\infty \frac{ds}{1+(s/a)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right).$$

Định lý 1.5.3 (Biến đổi Laplace của tích phân)

Nếu $\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$ và f là hàm liên tục thì

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{\overline{f}(s)}{s} \tag{1.5.8}$$

Chứng minh

Đặt

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

sao cho $g(0)=0$, $g'(t) = f(t)$ và g liên tục.

Gọi α_0 là chỉ số tăng của hàm f, thì với mọi $0<\varepsilon<1$. Khi đó

$$|g(t)| \le \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau \le M\int_0^t e^{(\alpha_0+\varepsilon)\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{M}{\alpha_0+\varepsilon} e^{(\alpha_0+\varepsilon)\tau}\Big|_{\tau=0}^{t} < M_1 e^{(\alpha_0+\varepsilon)t}.$$

Vậy g là hàm gốc. Do đó

$$\overline{f}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{g'(t)\} = s\overline{g}(s) = s\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Chia cả hai vế cho s, ta được $(1.5.8)$. Định lý đã được chứng minh.

Ví dụ 1.5.2

Hãy sử dụng kết quả $(1.5.8)$ để tìm

(a) $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau^n e^{-a\tau} d\tau\right\}$, (b) $\mathscr{L}\left\{Si(at)\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\left\{\frac{a}{s}\right\}$,

trong đó $Si(at) = \int_0^t \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau$.

(a) Ta có

$$\mathscr{L}\left\{t^n e^{-at}\right\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}.$$

Theo $(1.5.8)$ ta có

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau^n e^{-a\tau} d\tau\right\} = \frac{n!}{s(s+a)^{n+1}}.$$

(b) Theo công thức $(1.5.8)$ và ví dụ 1.5.1, ta có

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right).$$

1.6 Biến đổi Laplace ngược và các ví dụ

Cho hàm số $g(t)$ xác định trên trục thực R. Ta nói g được biểu diễn bởi *tích phân Fourier* nếu với mọi t ta có

$$\frac{1}{2}\left[g(t+0)+g(t-0)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\tau x}dxd\tau \qquad (1.6.1)$$

Phương trình $(1.6.1)$ được gọi là *công thức Fourier*.

Định lý 1.6.1

Cho f là hàm gốc liên tục từng khúc trên $[0,\infty)$ với chỉ số tăng α_0. Khi đó

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\overline{f}(s)ds, \quad c > \alpha_0. \qquad (1.6.2)$$

Công thức $(1.6.2)$ được gọi là *công thức Mellin*.

Chứng minh

Giả sử $f(t)$ là hàm gốc và có một giá trị c sao cho $f(t)e^{-ct}$ là một hàm khả tích tuyệt đối trên $[0,\infty)$. Đặt $g(t)=f(t)e^{-ct}$. Giả sử rằng các điểm gián đoạn của $g(t)$ thỏa mãn phương trình $(1.6.1)$ và để đơn giản cách ghi ta viết

$$g(t)=\frac{1}{2}\left[g(t+0)+g(t-0)\right]$$

Khi đó công thức $(1.6.1)$ trở thành

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau t}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\tau x}dxd\tau \qquad (1.6.3)$$

Do $f(t)$ triệt tiêu khi $t<0$ nên $g(t)$ cũng bị triệt tiêu khi $t<0$. Khi đó phương trình $(1.6.3)$ trở thành

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau t}\int_{0}^{\infty}g(x)e^{-i\tau x}dxd\tau$$

Do đó

$$e^{-ct}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau t}\int_{0}^{\infty}g(x)e^{-i\tau x}dxd\tau$$

Tương đương,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(c+i\tau)t}\int_{0}^{\infty}f(x)e^{-(c+i\tau)x}dxd\tau \qquad (1.6.4)$$

Do $f(t)e^{-ct}$ khả tích tuyệt đối nên trên đường thẳng $s=c+i\tau$ $(-\infty<\tau<\infty)$ thì biến đổi $\overline{f}(s)$ hội tụ với mọi τ và do đó nó sẽ hội tụ trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Re}s=x\geq c$. Ngoài ra, $\overline{f}(s)$ là một hàm giải tích trên nửa mặt phẳng $\operatorname{Re}s=x>c$. Khi $x=c$, ta có

$$\overline{f}(c+i\tau)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-(c+i\tau)t}dt$$

Từ $(1.6.4)$ ta suy ra

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(c+i\tau)t}\,\overline{f}(c+i\tau)d\tau$$

Đặt $s = c + i\tau$ ta có

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\,\overline{f}(s)\,ds, \qquad c > \alpha_0 .$$

Định lý đã được chứng minh.

Tuy nhiên trong tính toán, để tìm biến đổi Laplace ngược của một hàm $\overline{f}(s)$ cho trước chúng ta có thể sử dụng các phương pháp sau đây

(i) *Dùng khai triển phân thức*

Nếu

$$\overline{f}(s) = \frac{\overline{p}(s)}{\overline{q}(s)}, \tag{1.6.5}$$

trong đó $\overline{p}(s)$ và $\overline{q}(s)$ là các đa thức, bậc của $\overline{p}(s)$ thì nhỏ hơn bậc của $\overline{q}(s)$.

Phương pháp này có thể được sử dụng để biểu diễn $\overline{f}(s)$ thành tổng các số hạng mà các số hạng này có thể tìm được biến đổi Laplace ngược dựa vào bảng biến đổi Laplace. Để minh họa cho phương pháp này ta xét các ví dụ sau đây

Ví dụ 1.6.1

Tìm

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\},$$

trong đó a là hằng số.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right\}\right]\\ &= \frac{1}{a}\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\right]\\ &= \frac{1}{a}\left(e^{at} - 1\right).\end{aligned}$$

Ví dụ 1.6.2

Tìm

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)\left(s^2+b^2\right)}\right\}$$

Ta có

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)\left(s^2+b^2\right)}\right\}=\frac{1}{b^2-a^2}\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{1}{s^2+b^2}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\sin at}{a}-\frac{\sin bt}{b}\right).$$

Ví dụ 1.6.3

Tìm

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s+5}\right\}.$$

Ta có

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{(s+1)^2+4}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1+6}{(s+1)^2+2^2}\right\}$$
$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right\}+3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\}$$
$$=e^{-t}\cos 2t+3e^{-t}\sin 2t.$$

Ví dụ 1.6.4

Tìm biến đổi Laplace ngược sau

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+5s+7}{(s-2)\left(s^2+4s+13\right)}\right\}.$$

Ta có

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+5s+7}{(s-2)(s^2+4s+13)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}+\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}+\frac{1}{(s+2)^2+3^2}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\}$$

$$=e^{2t}+e^{-2t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

(ii) *Dùng tích chập*

Chúng ta sẽ áp dụng tích chập để tìm hàm ngược của biến đổi Laplace.

Ví dụ 1.6.5

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\}=1*e^{at}=\int_0^t e^{a\tau}d\tau=\frac{\left(e^{at}-1\right)}{a}.$$

Ví dụ 1.6.6

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}\right\}=t*\frac{\sin at}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^t (t-\tau)\sin a\tau d\tau$$

$$=\frac{t}{a}\int_0^t \sin a\tau d\tau-\frac{1}{a}\int_0^t \tau\sin a\tau d\tau$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(t-\frac{1}{a}\sin at\right).$$

Ví dụ 1.6.7

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-a)}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^{at}, \quad (a>0)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{a(t-\tau)} d\tau\\
&= \frac{2e^{at}}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{\sqrt{at}} e^{-x^2} dx, \qquad \left(x=\sqrt{at}\right)\\
&= \frac{e^{at}}{\sqrt{a}}\, erf\left(\sqrt{at}\right). \qquad (1.6.6)
\end{aligned}
$$

trong đó $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = 1/\sqrt{\pi t}$ [Ví dụ A.1.11 – Trang 98] và *hàm* $erf(t)$ được định nghĩa bởi tích phân sau

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2} dx \qquad (1.6.7)$$

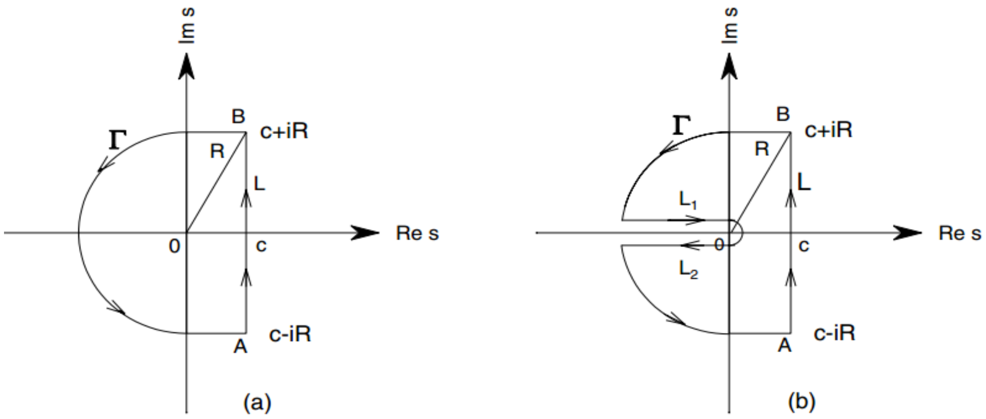
(iii) *Dùng chu tuyến*

Ta đã biết hàm ngược của biến đổi Laplace được định nghĩa bởi công thức tích phân phức

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{f}(s)\right\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\,\overline{f}(s)\,ds, \qquad (1.6.8)$$

trong đó c là hằng số và $\overline{f}(s)$ là một hàm giải tích trên nửa mặt phẳng phức bên phải có $\operatorname{Re} s > \alpha_0$.

Để tính tích phân $(1.6.8)$ ta dựa vào tính chất của các điểm kì dị của $\overline{f}(s)$. Thông thường $\overline{f}(s)$ là hàm đơn trị với hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các cực điểm. Nếu hàm đã cho $\overline{f}(s)$ là hàm đa trị thì nó có điểm rẽ nhánh. Đường lấy tích phân là đường thẳng L (hình 1.6a) trong mặt phẳng phức s có phương trình là $s = c + iR,\ -\infty < R < \infty,\ \operatorname{Re} s = c$ được chọn sao cho tất cả các điểm kì dị của hàm dưới dấu tích phân đều nằm bên trái đường thẳng L. Đường này L gọi là đường thẳng Bromwich và chu tuyến khép kín tạo bởi L và nửa đường tròn bán kính R như trong hình 1.6(a) được gọi là chu tuyến Bromwich. Khi $R \to \infty$ thì chu tuyến của tích phân mở rộng ra vô cùng sao cho tất cả các điểm kì dị của $\overline{f}(s)$ đều nằm bên trong chu tuyến của tích phân. Khi $\overline{f}(s)$ có điểm rẻ nhánh ở gốc tọa độ, chúng ta sẽ vẽ chu tuyến bị biến đổi bởi một lát cắt dọc theo nửa trục thực âm và một đường cong nhỏ γ quanh gốc tọa độ như trong hình 1.6(b).



Hình 1.6

Bây giờ, nếu ta giả sử $\overline{f}(s)$ là hàm giải tích trong miền $\operatorname{Re} s < \alpha_0$ ngoại trừ hữu hạn các cực điểm $a_1, a_2, ..., a_k$. Bằng cách lấy R đủ lớn để đảm bảo các cực điểm này nằm hoàn toàn trong chu tuyến C. Theo định lý thặng dư Cauchy ta có

$$\int_L e^{st}\overline{f}(s)ds + \int_\Gamma e^{st}\overline{f}(s)ds = \int_C e^{st}\overline{f}(s)ds = 2\pi i \times \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(a_k), \qquad (1.6.9)$$

trong đó $\operatorname{Res}(a_k)$ là thặng dư của hàm $e^{st}\overline{f}(s)$ tại cực điểm tại $s = a_k$.

Cho $R \to \infty$, tích phân trên Γ tiến đến 0 dựa vào bổ đề bên dưới.

Do đó từ $(1.6.9)$ ta có

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{st}\overline{f}(s)ds = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(a_k)$$

Bổ đề

Với s trên Γ, giả sử rằng $\overline{f}(s)$ thỏa mãn

$$\left|\overline{f}(s)\right| \le \frac{M}{|s|^p}, \quad p > 0 \text{ với mọi } R > R_0,$$

trong đó M, p, R_0 là các hằng số.

Khi đó

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} e^{st}\,\overline{f}(s)\,ds = 0, \qquad t > 0.$$

Ta chấp nhận bổ đề này mà không chứng minh.

Định lý 1.6.2 (Định lý thặng dư Cauchy)

Cho một hàm đơn trị $f(z)$ liên tục trên biên C của miền D và giải tích trên phần trong của D ngoại trừ một số hữu hạn các điểm kì dị $a_1, a_2, ..., a_n$ thì ta có

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\left[f(a_k)\right], \qquad (1.6.10)$$

trong đó $resf(a)$ là giá trị thặng dư của hàm f tại a.

Thặng dư của hàm $f(z)$ tại cực điểm cấp n được tính bởi công thức

$$resf(a) = \lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right] \qquad (1.6.11)$$

Đối với cực điểm cấp một ta có công thức sau

$$resf(a) = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right] \qquad (1.6.12)$$

Nếu trong lân cận điểm a, hàm $f(z)$ là thương của hai hàm giải tích

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \ \left(\varphi(a) \ne 0, \psi(a) = 0, \psi'(a) \ne 0\right)$$

thì ta có công thức sau đây

$$resf(a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (1.6.13)$$

Ví dụ 1.6.8

Nếu $\overline{f}(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$. Chứng minh rằng

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}\,\overline{f}(s)\,ds=\cos at.$$

Dễ thấy hàm dưới dấu tích phân có hai cực điểm là $s=\pm ia$ và thặng dư tại các cực điểm này là

$$R_1=\lim_{s\to ia}(s-ia)\frac{se^{st}}{(s-ia)(s+ia)}$$
$$=\lim_{s\to ia}\frac{se^{st}}{(s+ia)}=\frac{1}{2}e^{iat},$$

$$R_2=\lim_{s\to -ia}(s+ia)\frac{se^{st}}{(s^2+a^2)}=\frac{1}{2}e^{-iat}.$$

Do đó

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}\,\overline{f}(s)=R_1+R_2=\frac{1}{2}\left(e^{iat}+e^{-iat}\right)=\cos at.$$

Ví dụ 1.6.9

Tính

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\}.$$

Đặt

$$\overline{g}(s)=e^{st}\,\overline{f}(s)=\frac{se^{st}}{\left(s^2+a^2\right)^2}$$

Dễ thấy $\overline{g}(s)$ có hai cực điểm cấp hai tại $s=\pm ia$. Theo công thức $(1.6.11)$ ta có thặng dư của $\overline{g}(s)$ tại cực điểm cấp hai $s=ia$ là

$$R_1 = \lim_{s\to ia}\frac{d}{ds}\left[(s-ia)^2\frac{se^{st}}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right]$$
$$=\lim_{s\to ia}\frac{d}{ds}\left[\frac{se^{st}}{(s+ia)^2}\right]=\frac{te^{iat}}{4ia}.$$

Tương tự ta có $R_2=\dfrac{-te^{-iat}}{4ia}.$

Do đó

$$f(t)=R_1+R_2=\frac{t}{4ia}\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)=\frac{t}{2a}\sin at.$$

Ví dụ 1.6.10

Tính

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh(\alpha x)}{s\cosh(\alpha\ell)}\right\},\qquad \alpha=\sqrt{\frac{s}{a}}.$$

Ta có

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}\frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh(\alpha\ell)}\frac{ds}{s}$$

Dễ thấy hàm dưới dấu tích phân có các cực điểm đơn tại

$$s=0\,,s=s_n=-(2n+1)^2\frac{a\pi^2}{4\ell^2},\ n=0,1,2,...$$

trong đó $s=s_n$ là nghiệm của phương trình $\cosh(\alpha\ell)=\cos(i\alpha\ell)=0$.

Giả sử R_1 là thặng dư tại cực điểm $s=0$ thì $R_1=1$ và theo công thức 1.6.13 thặng dư tại cực điểm $s=s_n$ là

$$R_n = \lim_{s \to s_n} (s - s_n) \frac{e^{st} \cosh(\alpha x)}{s \cosh(\alpha \ell)}$$

$$= \frac{\exp(s_n t) \cosh\left\{ \alpha \sqrt{\frac{s_n}{a}} \right\}}{\left[s \frac{d}{ds} \left\{ \cosh\left(\ell \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \right\} \right]_{s=s_n}},$$

$$= \frac{2}{\left[\ell \sqrt{\frac{s}{a}} \sin\left(\ell \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \right]_{s=s_n}} .\exp\left[-\left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \right\}^2 at \right] \cosh\left\{ i(2n+1) \frac{\pi x}{2\ell} \right\}$$

$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \exp\left[-\left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \right\}^2 at \right] \cos\left\{ (2n+1) \frac{\pi x}{2\ell} \right\}.$$

Do đó

$$f(t) = R_1 + R_n$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)} \exp\left[-(2n+1)^2 \frac{\pi^2 at}{4\ell^2} \right]$$

$$\times \cos\left\{ (2n+1) \frac{\pi x}{2\ell} \right\}.$$

Mệnh đề

$$\mathscr{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right\} = erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right),$$

trong đó $erfc(t)$ (complementary error function) được định nghĩa bởi tích phân sau

$$erfc(t) = 1 - erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Chứng minh

Hàm dưới dấu tích phân là hàm đa trị có điểm rẽ nhánh tại $s = 0$. Chúng ta sử dụng chu tuyến tích phân trong hình 1.6(b) có chứa điểm rẻ nhánh $s = 0$. Do đó, theo định lí Cauchy ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_L + \int_\Gamma + \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_\gamma \right]\exp\left(st - a\sqrt{s}\right)\frac{ds}{s} = 0 \qquad (1.6.14)$$

Ta thấy rằng tích phân trên Γ tiến về 0 khi $R \to \infty$ và trên L cho ta tích phân Bromwich. Bây giờ chúng ta tính ba tích phân còn lại trong $(1.6.14)$

- Trên $L_1 : s = re^{i\pi} = -r,\ \sqrt{s} = \sqrt{r}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{r}$

$$\int_{L_1} \exp\left(st - a\sqrt{s}\right)\frac{ds}{s} = \int_{-\infty}^{0} \exp\left(st - a\sqrt{s}\right)\frac{ds}{s} = -\int_0^\infty \exp\left\{-\left(rt + ia\sqrt{r}\right)\right\}\frac{dr}{r}.$$

- Trên $L_2 : s = re^{-i\pi} = -r,\ \sqrt{s} = \sqrt{r}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{r}$

$$\int_{L_2} \exp\left(st - a\sqrt{s}\right)\frac{ds}{s} = \int_0^{-\infty} \exp\left(st - a\sqrt{s}\right)\frac{ds}{s} = \int_0^\infty \exp\left\{-rt + ia\sqrt{r}\right\}\frac{dr}{r}.$$

Do đó, kết hợp tích phân dọc theo L_1 và L_2 lại ta được

$$\begin{aligned}
\int_{L_1} \exp\left(st - a\sqrt{s}\right)\frac{ds}{s} + \int_{L_2} \exp\left(st - a\sqrt{s}\right)\frac{ds}{s} &= \int_0^\infty e^{-rt}\left(\frac{e^{ia\sqrt{r}} - e^{-ia\sqrt{r}}}{r}\right)dr \\
&= 2i\int_0^\infty e^{-rt}\sin\left(a\sqrt{r}\right)\frac{dr}{r} \\
&= 2\pi i\, erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right), \qquad a > 0 \qquad (1.6.15)
\end{aligned}$$

trong đó

$$\int_0^\infty e^{-rt}\sin\left(a\sqrt{r}\right)\frac{dr}{r} = \pi erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right), \qquad a > 0$$ [Định lý B.5 – Trang 104]

- Cuối cùng, trên $\gamma : s = re^{i\theta},\ ds = ir\,e^{i\theta}d\theta$

$$\int_\gamma \exp\left(st - a\sqrt{s}\right)\frac{ds}{s} = i\int_\pi^{-\pi} \exp\left\{re^{i\theta} - a.r^{\frac{1}{2}}.e^{i\frac{\theta}{2}}\right\}d\theta$$

$$\xrightarrow{r\to 0} \quad -i\int_{-\pi}^{\pi} dr = -2\pi i \qquad (1.6.16)$$

Do đó, thay $(1.6.15),(1.6.16)$ vào $(1.6.14)$ ta được

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{s}\exp\left(st-a\sqrt{s}\right)ds$$

$$=\left[1-erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right]=erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \qquad (1.6.17)$$

(iv) *Định lý khai triển của Heaviside*

Giả sử $\overline{f}(s)$ là biến đổi Laplace của $f(t)$ và có khai triển Maclaurin dưới dạng chuỗi lũy thừa

$$f(t)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r\frac{t^r}{r!} \qquad (1.6.18)$$

Lấy biến đổi Laplace của $f(t)$ ta được

$$\overline{f}(s)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a_r}{s^{r+1}} \qquad (1.6.19)$$

Ngược lại, chúng ta có thể rút ra $(1.6.18)$ từ một khai triển đã cho $(1.6.19)$.

Định lý 1.6.3 (Định lý khai triển của Heaviside)

Nếu $\overline{f}(s)=\dfrac{\overline{p}(s)}{\overline{q}(s)}$, trong đó $\overline{p}(s)$ và $\overline{q}(s)$ là các đa thức biến s và bậc của $\overline{q}(s)$ thì lớn hơn bậc của $\overline{p}(s)$ thì

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\overline{p}(s)}{\overline{q}(s)}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{p}(\alpha_k)}{\overline{q}'(\alpha_k)}\exp(t\alpha_k), \qquad (1.6.20)$$

trong đó α_k là các nghiệm phân biệt của phương trình $\overline{q}(s)=0.$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng hệ số đầu tiên của $\overline{q}(s)$ là 1 và viết các thừa số phân biệt của $\overline{q}(s)$ sao cho

$$\overline{q}(s)=(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\ldots(s-\alpha_k)\ldots(s-\alpha_n) \qquad (1.6.21)$$

Theo qui tắc khai triển phân thức riêng phần, ta có thể viết

$$\overline{f}(s)=\frac{\overline{p}(s)}{\overline{q}(s)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(s-\alpha_k)}, \qquad (1.6.22)$$

trong đó A_k là các hằng số đã xác định. Từ $(1.6.21)$, ta có

$$\overline{p}(s)=\sum_{k=1}^{n}A_k(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)...(s-\alpha_{k-1})(s-\alpha_{k+1})...(s-\alpha_n).$$

Thay $s=\alpha_k$ ta được

$$\overline{p}(\alpha_k)=A_k(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)...(\alpha_k-\alpha_{k+1})...(\alpha_k-\alpha_n) \qquad (1.6.23)$$

trong đó $k=1,2,3,...n.$

Đạo hàm hai vế của $(1.6.21)$ ta được

$$\overline{q}'(s)=\sum_{k=1}^{n}(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)...(s-\alpha_{k-1})(s-\alpha_{k+1})...(s-\alpha_n)$$

Thay $s=\alpha_k$ ta có

$$\overline{q}'(\alpha_k)=(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)...(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})...(\alpha_k-\alpha_n) \qquad (1.6.24)$$

Từ $(1.6.23)$ và $(1.6.24)$ ta có

$$A_k=\frac{\overline{p}(\alpha_k)}{\overline{q}'(\alpha_k)},$$

Do đó

$$\frac{\overline{p}(s)}{\overline{q}(s)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{p}(\alpha_k)}{\overline{q}'(\alpha_k)}\frac{1}{(s-\alpha_k)} \qquad (1.6.25)$$

Suy ra

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\overline{p}(s)}{\overline{q}(s)}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{p}(\alpha_k)}{\overline{q}'(\alpha_k)}\exp(t\alpha_k).$$

Định lý đã được chứng minh.

Ví dụ 1.6.11

Tìm

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-3s+2}\right\}$$

Ở đây $\overline{p}(s)=s$ và $\overline{q}(s)=s^2-3s+2=(s-1)(s-2)$. Do đó

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-3s+2}\right\}=\frac{\overline{p}(2)}{\overline{q}'(2)}e^{2t}+\frac{\overline{p}(1)}{\overline{q}'(1)}e^{t}=2e^{2t}-e^{t}.$$

Ví dụ 1.6.12

Nếu $\alpha=\sqrt{\dfrac{s}{a}}$, chứng minh rằng

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh\alpha x}{s\cosh\alpha\ell}\right\}=1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{\ell}\right\}\exp\left[-(2k+1)^2\frac{a\pi^2 t}{4\ell^2}\right]}{(2k+1)}.$$

Chứng minh

Ta có

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{f}(s)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\overline{p}(s)}{\overline{q}(s)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh\alpha x}{s\cosh\alpha\ell}\right\}$$

Nghiệm của $\overline{q}(s)$ là $s=0$ và tại các nghiệm của $\cosh\alpha\ell=\cos(i\alpha\ell)=0$, nghĩa là tại $s=s_k=a\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{\pi i}{\ell}\right)^2$, $k=0,1,2,\ldots$. Do đó

$$\alpha_k=\sqrt{\frac{s_k}{a}}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{\ell},\quad k=0,1,2,\ldots$$

Ở đây $\overline{p}(s)=\cosh(\alpha x)$, $\overline{q}(s)=s\cosh(\alpha\ell)$ nên để áp dụng định lý khai triển Heaviside ta cần

$$\overline{q}'(s)=\frac{d}{ds}(s\cosh\alpha\ell)=\cosh(\alpha\ell)+\frac{1}{2}\alpha\ell\sinh(\alpha\ell).$$

Nếu $s=0$ thì $\overline{q}'(0)=1$ và tại $s=s_k$ ta có

$$\begin{aligned}\overline{q}'(s_k)&=\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i.\sinh\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]\\&=(2k+1)\frac{\pi i}{4}.i\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\\&=-(2k+1)\frac{\pi}{4}.\cos k\pi=(-1)^{k+1}(2k+1)\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Do đó

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh\alpha x}{s\cosh(\alpha\ell)}\right\}=1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)}\cosh\left[(2k+1)\frac{\pi i x}{2\ell}\right]\exp(ts_k)$$
$$=1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(2k+1)}\cos\left[(2k+1)\frac{\pi x}{2\ell}\right]$$
$$\times\exp\left[-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2 a t}{\ell^2}\right].$$

1.7 Định lý giá trị đầu, định lý giá trị cuối

Định lý 1.7.1 (Định lý giá trị đầu)

Nếu $\mathscr{L}\{f(t)\}=\overline{f}(s)$ và $f'(t)$ là hàm gốc thì

$$\lim_{s\to\infty}\left[s\,\overline{f}(s)\right]=\lim_{t\to 0}f(t)=f(0) \tag{1.7.1}$$

Chứng minh

Do tích phân Laplace hội tụ đều theo s nên ta được phép đưa giới hạn vào bên trong dấu tích phân [Định lý B.1 – Trang 100]. Do đó

$$\lim_{s\to\infty}\mathscr{L}\{f'(t)\}=\int_0^\infty\left(\lim_{s\to\infty}e^{-st}\right)f'(t)\,dt=0.$$

Theo định lý biến đổi Laplace của đạo hàm ta có

$$\lim_{s\to\infty}\mathscr{L}\{f'(t)\}=\lim_{s\to\infty}\left[s\,\overline{f}(s)-f(0)\right]=0$$

Suy ra

$$\lim_{s\to\infty}\left[s\,\overline{f}(s)\right]=f(0)=\lim_{t\to 0}f(t).$$

Ví dụ 1.7.1

Nếu

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{s+1}{(s-1)(s+2)},$$

Thì

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{s+1}{(s-1)(s+2)}\right) = 1.$$

Định lý 1.7.2 (Định lý giá trị cuối)

Cho $\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$. Giả sử f' là hàm gốc và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ thì ta có

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,\overline{f}(s) \tag{1.7.2}$$

Chứng minh

Ta có

$$\lim_{s\to 0}\mathscr{L}\{f'(t)\} = \lim_{s\to 0}\left[s\,\overline{f}(s) - f(0)\right] = \int_0^\infty\left(\lim_{s\to 0}\exp(-st)\right) f'(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty f'(t)\,dt = f(\infty) - f(0) = \lim_{s\to\infty}\left[f(t) - f(0)\right].$$

Suy ra

$$\lim_{s\to 0}\left[s\,\overline{f}(s)\right] = \lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty).$$

Ví dụ 1.7.2

Cho $f(t) = \sin t$. Khi đó

$$\lim_{s\to 0} s\,\overline{f}(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{s^2+1} = 0,$$

Nhưng $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ là không tồn tại. Do đó, định lý giá trị cuối không được áp dụng.

Chương 2 MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE

Nhiều bài toán thú vị trong vật lý được mô tả thông qua các phương trình vi phân hoặc các phương trình vi phân đạo hàm riêng với các điều kiện ban đầu cũng như các điều kiện biên thích hợp. Các bài toán mà chúng ta thường gặp như bài toán giá trị đầu, bài toán giá trị biên hoặc các bài toán giá trị biên – giá trị đầu đều có những ứng dụng thực tế trong vật lý và khoa học kĩ thuật. Phương pháp biến đổi Laplace thì đặc biệt hữu ích trong việc tìm nghiệm của các bài toán nêu trên.

Chương này chúng tôi sẽ trình bày phương pháp giải phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng bằng kĩ thuật biến đổi Laplace. Các ứng dụng của biến đổi Laplace để tìm nghiệm của phương trình tích phân, nghiệm của các bài toán giá trị biên trong *lý thuyết chuyển vị dầm* cũng được thảo luận. Ngoài ra, chúng tôi cũng tìm hiểu cách giải phương trình sai phân và vi sai phân bằng phép biến đổi Laplace.

2.1 Nghiệm của phương trình vi phân thường

Để giải phương trình vi phân bằng cách sử dụng biến đổi Laplace chúng ta tiến hành theo các bước sau đây

- Biến đổi Laplace hai vế của phương trình ta thu được phương trình đại số theo $\overline{f}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.
- Giải phương trình đại số để tìm ra $\overline{f}(s)$.
- Dùng phép biến đổi Laplace ngược ta có nghiệm của các bài toán ban đầu.

Ví dụ 2.1.1

Phương trình vi phân tuyến tính thông thường bậc hai có dạng tổng quát như sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + qx = f(t), \qquad t > 0 \qquad (2.1.1)$$

Điều kiện đầu là

$$x(0)=a,\ x'(0)=b \tag{2.1.2}$$

trong đó p,q,a và b là các hằng số.

Lấy biến đổi Laplace hai vế $(2.1.1)$ ta được

$$\mathscr{L}\{x''(t)\}+2p\mathscr{L}\{x'(t)\}+q\mathscr{L}\{x(t)\}=\mathscr{L}\{f(t)\}$$

$$\Leftrightarrow s^2\overline{x}(s)-sx(0)-x'(0)+2p\{s\overline{x}(s)-x(0)\}+q\overline{x}(s)=\overline{f}(s)$$

Thay $(2.1.2)$ vào phương trình trên ta được

$$s^2\overline{x}(s)-sa-b+2p\{s\overline{x}(s)-a\}+q\overline{x}(s)=\overline{f}(s),$$

$$\Leftrightarrow (s^2+2ps+q)\overline{x}(s)-sa-b-2pa=\overline{f}(s),$$

$$\Leftrightarrow \left[(s+p)^2+n^2\right]\overline{x}(s)=(s+p)a+(b+pa)+\overline{f}(s)$$

Suy ra

$$\overline{x}(s)=\frac{(s+p)a+(b+pa)+\overline{f}(s)}{(s+p)^2+n^2},$$

$$=\frac{a(s+p)}{(s+p)^2+n^2}+\frac{(b+pa)}{(s+p)^2+n^2}+\frac{\overline{f}(s)}{(s+p)^2+n^2},\qquad n^2=q-p^2 \tag{2.1.3}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược cùng với định lý tích chập ta nhận được nghiệm với ba trường hợp sau đây

- Trường hợp 1: $n^2=q-p^2>0$

Từ $(2.1.3)$ ta có

$$x(t)=a\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+p)}{(s+p)^2+n^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(b+pa)}{(s+p)^2+n^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\overline{f}(s)}{(s+p)^2+n^2}\right\}$$

$$=ae^{-pt}\cos nt+\frac{1}{n}(b+pa)e^{-pt}\sin nt$$

$$+\frac{1}{n}\int_0^t f(t-\tau)e^{-p\tau}\sin n\tau d\tau, \tag{2.1.4}$$

- Trường hợp 2: $n^2=q-p^2=0$

Khi đó $(2.1.3)$ trở thành

$$\overline{x}(s)=\frac{a}{s+p}+\frac{b+pa}{(s+p)^2}+\frac{\overline{f}(s)}{(s+p)^2}.$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của phương trình trên ta được

$$x(t)=a\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+p}\right\}+(b+pa)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+p)^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\overline{f}(s)}{(s+p)^2}\right\}$$

$$=ae^{-pt}+(b+pa)te^{-pt}+\int_0^t f(t-\tau)\tau e^{-p\tau}d\tau, \qquad (2.1.5)$$

- Trường hợp 3: $n^2=-m^2$ sao cho $m^2=p^2-q>0$

Khi đó $(2.1.3)$ trở thành

$$\overline{x}(s)=\frac{a(s+p)}{(s+p)^2-m^2}+\frac{(b+pa)}{(s+p)^2-m^2}+\frac{\overline{f}(s)}{(s+p)^2-m^2}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược phương trình trên ta được

$$x(t)=ae^{-pt}\cosh mt+\frac{1}{m}(b+pa)e^{-pt}\sinh mt$$

$$+\frac{1}{m}\int_0^t f(t-\tau)e^{-p\tau}\sinh m\tau d\tau, \qquad (2.1.6)$$

Ví dụ 2.1.2

Giải phương trình vi phân tuyến tính bậc hai sau

$$x''(t)+4x'(t)+3x(t)=0, \quad x(0)=3,\ x'(0)=1 \qquad (2.1.7)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.1.7)$ ta được

$$\mathscr{L}\{x''(t)\}+4\mathscr{L}\{x'(t)\}+3\mathscr{L}\{x(t)\}=0$$

$$\Leftrightarrow s^2\overline{x}(s)-sx(0)-x'(0)+4\left[s\overline{x}(s)-x(0)\right]+3\overline{x}(s)=0$$

$$\Leftrightarrow (s^2+4s+3)\overline{x}(s)-(s+4)x(0)-x'(0)=0 \qquad (2.1.8)$$

Do $x(0)=3,\ x'(0)=1$ nên $(2.1.8)$ tương đương với

$$(s^2+4s+3)\overline{x}(s)=3(s+4)+1=3s+13$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\overline{x}(s) &= \frac{3s+13}{(s^2+4s+3)} \\ &= \frac{3s+13}{(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+3},\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

trong đó A, B là hằng số.

Ta có

$$\begin{aligned}3s+13 &= (s+3)A+(s+1)B \\ &= (A+B)s+3A+B\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 3A+B=0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $A=5,\ B=-2$. Thay vào $(2.1.9)$ ta được

$$\overline{x}(s) = \frac{5}{s+1}-\frac{2}{s+3} \tag{2.1.10}$$

Lấy biến đổi laplace ngược của phương trình $(2.1.10)$ ta được

$$\begin{aligned}x(t) &= 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\ &= 5e^{-t}-2e^{-3t}\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Ví dụ 2.1.3 (Phương trình vi phân thường bậc cao)

Giải phương trình vi phân tuyến tính bậc n với hệ số hằng như sau

$$f(D)\{x(t)\} \equiv D^n x + a_1 D^{n-1}x + a_2 D^{n-2}x + \cdots + a_n x = \phi(t), \quad t>0 \tag{2.1.12}$$

với điều kiện đầu

$$x(t)=x_0,\ \ Dx(t)=x_1,\ \ D^2x(t)=x_2,\dots,D^{n-1}x(t)=x_{n-1} \text{ tại } t=0 \tag{2.1.13}$$

trong đó $D=\dfrac{d}{dt}$ là đạo hàm của $x(t)$ và $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ là các hằng số.

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.1.12)$ cùng với điều kiện đầu ta có

$$\mathscr{L}\left\{D^n x\right\}+a_1\mathscr{L}\left\{D^{n-1}x\right\}+a_2\mathscr{L}\left\{D^{n-2}x\right\}+\cdots+\mathscr{L}\left\{a_n x\right\}=\mathscr{L}\left\{\phi(t)\right\}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow &\left(s^n\overline{x}-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_1-\cdots-sx_{n-2}-x_{n-1}\right)\\ &\quad+a_1\left(s^{n-1}\overline{x}-s^{n-2}x_0-s^{n-3}x_1-\cdots-x_{n-2}\right)\\ &\quad+a_2\left(s^{n-2}\overline{x}-s^{n-3}x_0-\cdots-x_{n-3}\right)\\ &\quad+\cdots+a_{n-1}\left(s\overline{x}-x_0\right)+a_n\overline{x}=\overline{\phi}(s) \qquad (1.1.14)\end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned}&\left(s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n\right)\overline{x}(s)\\ &\quad=\overline{\phi}(s)+\left(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\right)x_0\\ &\qquad+\left(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-2}\right)x_1+\cdots+\left(s+a_1\right)x_{n-2}+x_{n-1}\\ &\quad=\overline{\phi}(s)+\overline{\psi}(s), \qquad (2.1.15)\end{aligned}$$

trong đó $\overline{\psi}(s)$ là tất cả các số hạng vế bên phải của $(2.1.15)$ bỏ đi $\overline{\phi}(s)$ là đa thức bậc $(n-1)$ của s.

Do đó

$$\left(s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n\right)\overline{x}(s)=\overline{\phi}(s)+\overline{\psi}(s)$$

$$\Leftrightarrow \overline{f}(s)\overline{x}(s)=\overline{\phi}(s)+\overline{\psi}(s),$$

trong đó $\overline{f}(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n.$

Suy ra

$$\overline{x}(s)=\frac{\overline{\phi}(s)+\overline{\psi}(s)}{\overline{f}(s)} \qquad (2.1.16)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của $(2.1.16)$ là

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\overline{\phi}(s)}{\overline{f}(s)}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\overline{\psi}(s)}{\overline{f}(s)}\right\} \qquad (2.1.17)$$

Ví dụ 2.1.4 (Phương trình vi phân tuyến tính bậc 3)

Giải phương trình vi phân sau

$$x'''(t)+x''(t)-6x'(t)=0, \qquad t>0, \qquad (2.1.18)$$

với điều kiện ban đầu

$$x(0)=1,\quad x'(0)=0,\quad x''(0)=5 \tag{2.1.19}$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.1.18)$ ta được

$$\left[s^3\overline{x}(s)-s^2x(0)-sx'(0)-x''(0)\right]+\left[s^2\overline{x}(s)-sx(0)-x'(0)\right]-6\left[s\overline{x}(s)-x(0)\right]=0.$$

Thay $(2.1.19)$ vào phương trình trên ta được

$$\left[s^3\overline{x}(s)-s^2.1-s.0-5\right]+\left[s^2\overline{x}(s)-s-0\right]-6\left[s\overline{x}(s)-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[s^3+s^2-6s\right]\overline{x}(s)=s^2+s-1,$$

Suy ra

$$\overline{x}(s)=\frac{s^2+s-1}{s\left(s^2+s-6\right)}=\frac{s^2+s-1}{s(s+3)(s-2)} \tag{2.1.20}$$

Ta viết lại như sau

$$\overline{x}(s)=\frac{s^2+s-1}{s(s+3)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+3)}+\frac{C}{(s-2)} \tag{2.1.21}$$

Tương tự ví dụ 2.1.2 ta tìm được các hệ số lần lượt là $A=\frac{1}{6},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{1}{2}$.

Khi đó từ $(2.1.21)$ suy ra

$$\overline{x}(s)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-2},$$

Lấy biến đổi Laplace ngược phương trình trên ta được

$$x(t)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{2t} \tag{2.1.22}$$

Ví dụ 2.1.5 (Phương trình vi phân tuyến tính hệ số biến thiên)

Giải phương trình

$$\frac{d^2x}{dt^2}+t\,\frac{dx}{dt}-2x=2, \tag{2.1.23}$$

$$x(0)=x'(0)=0 \tag{2.1.24}$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.1.23)$ ta có

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\}+\mathscr{L}\left\{t\frac{dx}{dt}\right\}-2\mathscr{L}\{x\}=\frac{2}{s},$$

$$\Leftrightarrow s^2\overline{x}-sx(0)-x'(0)-\frac{d}{ds}\{s\overline{x}(s)-x(0)\}-2\overline{x}(s)=\frac{2}{s} \qquad (2.1.25)$$

Thay $(2.1.24)$ vào $(2.1.25)$ ta được

$$s^2\,\overline{x}(s)-\frac{d}{ds}\{s\,\overline{x}(s)\}-2\,\overline{x}(s)=\frac{2}{s},$$

$$\Leftrightarrow s^2\overline{x}(s)-\overline{x}(s)-s\frac{d\overline{x}}{ds}-2\overline{x}(s)=\frac{2}{s}$$

$$\Leftrightarrow s\frac{d\overline{x}}{ds}+\left(3-s^2\right)\overline{x}(s)=-\frac{2}{s} \qquad (2.1.26)$$

Chia hai vế $(2.1.26)$ cho s ta được

$$\frac{d\,\overline{x}}{ds}+\left(\frac{3}{s}-s\right)\overline{x}=-\frac{2}{s^2} \qquad (2.1.27)$$

Thừa số tích phân là $\mu(s)=e^{\int\left(\frac{3}{s}-s\right)ds} = s^3\exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right).$

Nhân cả hai vế của $(2.1.27)$ với thừa số tích phân ta được

$$\left(\overline{x}(s)s^3\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right)'=-2s\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right).$$

Do đó

$$\overline{x}(s)=\frac{1}{s^3}\exp\left(\frac{s^2}{2}\right)\left[\int -2s\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds+A\right],$$

$$=\frac{1}{s^3}\exp\left(\frac{s^2}{2}\right)\left[2\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)+A\right]$$

$$=\frac{2}{s^3}+\frac{A}{s^3}\exp\left(\frac{s^2}{2}\right),$$

trong đó A là hằng số tích phân.

Ta thấy $\overline{x}(s)\to\infty$ khi $s\to\infty$ nên ta phải có $A\equiv 0$. Do đó, $\overline{x}(s)=2/s^3$.

Lấy biến đổi Laplace ngược, ta nhận nghiệm

$$x(t) = t^2.$$

Ví dụ 2.1.6 (Hệ phương trình vi phân tuyến tính bậc một)

Xét hệ sau

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t) \end{cases} \tag{2.1.28}$$

với điều kiện đầu

$$x_1(0) = x_{10} \text{ và } \quad x_2(0) = x_{20}$$

$$(2.1.29)$$

trong đó $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ là các hằng số.

Đặt

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{dx}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$b(t) \equiv \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \text{ và } x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix},$$

Chúng ta có thể viết lại hệ trên dưới dạng ma trận như sau

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b(t), \quad x(0) = x_0 \tag{2.1.30}$$

Lấy biến đổi Laplace của hệ $(2.1.28)$ ta được

$$\begin{cases} s\overline{x}_1 - x_1(0) = a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 + \overline{b}_1(s) \\ s\overline{x}_2 - x_2(0) = a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + \overline{b}_2(s) \end{cases}$$

Do $(2.1.29)$ nên hệ phương trình trên tương đương với

$$\begin{cases} (s - a_{11})\overline{x}_1 - a_{12}\overline{x}_2 = x_{10} + \overline{b}_1(s), \\ -a_{21}\overline{x}_1 + (s - a_{22})\overline{x}_2 = x_{20} + \overline{b}_2(s). \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là

$$\overline{x}_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} x_{10}+\overline{b}_1(s) & -a_{12} \\ x_{20}+\overline{b}_2(s) & s-a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s-a_{22}\end{vmatrix}},\quad \overline{x}_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} s-a_{11} & x_{10}+\overline{b}_1(s) \\ -a_{21} & x_{20}+\overline{b}_2(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s-a_{22}\end{vmatrix}}. \qquad (2.1.31)$$

Khai triển các định thức trên ta được $\overline{x}_1(s),\ \overline{x}_2(s)$ và từ đó ta có thể tìm hàm ngược $x_1(t),\ x_2(t)$.

Ví dụ 2.1.7

Giải hệ phương trình vi phân sau

$$\frac{dx}{dt}=Ax,\qquad x(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad (2.1.32)$$

trong đó

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix} \qquad (2.1.33)$$

Từ $(2.1.32)$ và $(2.1.33)$ ta có

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}-x_2=0\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}+2x_1-3x_2=0\end{cases} \qquad (2.1.34)$$

và

$$x_1(0)=0 \text{ và } \quad x_2(0)=1$$

$$(2.1.35)$$

Lấybiến đổi Laplace hệ $(2.1.34)$ ta được

$$\begin{cases}s\overline{x}_1(s)-x_1(0)-\overline{x}_2(s)=0\\ s\overline{x}_2(s)-x_2(0)+2\overline{x}_1(s)-3\overline{x}_2(s)=0\end{cases}$$

Do $(2.1.35)$ nên hệ trên trở thành

$$\begin{cases} s\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 0 \\ 2\overline{x}_1 + (s-3)\overline{x}_2 = 1 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là

$$\overline{x}_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$$

$$= \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}, \qquad (2.1.36)$$

và

$$\overline{x}_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{vmatrix}} = \frac{s}{s^2 - 3s + 2}$$

$$= \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1} \qquad (2.1.37)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của $(2.1.36)$ và $(2.1.37)$ ta được

$$x_1(t) = e^{2t} - e^t, \qquad x_2(t) = 2e^{2t} - e^t.$$

Khi đó, nghiệm của hệ viết dưới dạng ma trận như sau

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^t \\ 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 2.1.8 (Hệ phương trình vi phân kép bậc hai)

Giải hệ sau

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} - 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad (t > 0), \qquad (2.1.38)$$

với điều kiện ban đầu

$$x_1(t) = x_2(t) = 0; \quad \frac{dx_1}{dt} = 2, \ \frac{dx_2}{dt} = 0 \text{ tại } t = 0 \qquad (2.1.39)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của hệ $(2.1.38)$ ta được

$$\begin{cases} s^2\overline{x}_1 - sx_1(0) - x_1'(0) - 3\overline{x}_1 - 4\overline{x}_2 = 0 \\ s^2\overline{x}_2 - sx_2(0) - x_2'(0) + \overline{x}_1 + \overline{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Do $(2.1.39)$ nên

$$\begin{cases} (s^2-3)\overline{x}_1 - 4\overline{x}_2 = 2 \\ \overline{x}_1 + (s^2+1)\overline{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Ta có

$$\overline{x}_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & s^2+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2-3 & -4 \\ 1 & s^2+1 \end{vmatrix}} = \frac{2(s^2+1)}{(s^2-1)^2}$$

Ta viết lại như sau

$$\overline{x}_1(s) = \frac{2(s^2+1)}{(s^2-1)^2} = \frac{(s+1)^2+(s-1)^2}{\left[(s-1)(s+1)\right]^2} = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được

$$x_1(t) = t\left(e^t + e^{-t}\right),$$

Tương tự

$$\overline{x}_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2-3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2-3 & -4 \\ 1 & s^2+1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{(s^2-1)^2}.$$

Ta có

$$\overline{x}_2(s) = \frac{-2}{(s^2-1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}\right],$$

Do đó

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t} - te^t - te^{-t}\right).$$

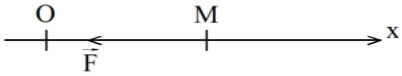
➢ Ứng dụng trong các bài toán dao động

a) Các dao động tự do không có lực cản

Xét điểm M chuyển động thẳng dưới tác dụng của lực phục hồi $\vec{F}$ trên trục Ox. Hình chiếu của $\vec{F}$ trên trục Ox bằng

$$F_x = -cx,$$

với $c > 0$ là hằng số.



Ta thấy lực $\vec{F}$ có xu hướng bắt điểm M quay trở lại vị trí cân bằng O, tại đó $\vec{F} = 0$.

Ta tìm qui luật chuyển động của điểm M. Theo định luật II Newton, ta có phương trình vi phân của chuyển động là

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx, \qquad (2.1.40)$$

trong đó m là khối lượng, t là thời gian.

Chia hai vế phương trình $(2.1.40)$ cho m và kí hiệu $\frac{c}{m} = \omega^2$ ta được

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

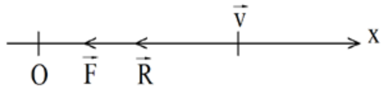
Đây là phương trình vi phân của các *dao động tự do* (free oscillation) không có lực cản.

b) Các dao động tắt dần có lực cản tỉ lệ với vận tốc

Ta xét ảnh hưởng của sức cản của môi trường tới các dao động tự do với giả thiết là lực cản tỉ lệ bậc nhất với vận tốc

$$\vec{R} = -\eta\,\vec{v},$$

trong đó η là hằng số dương. Dấu trừ chỉ lực $\vec{R}$ ngược chiều với vận tốc $\vec{v}$.



Giả sử điểm chuyển động dưới tác dụng của lực phục hồi $\vec{F}$ và lực cản $\vec{R}$. Khi đó hình chiếu các lực này lên trục Ox bằng

$$F_x = -cx,\ R_x = -\eta v_x = -\eta \frac{dx}{dt}$$

Khi đó phương trình vi phân cho chuyển động này là

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \eta\frac{dx}{dt} \qquad (2.1.41)$$

Chia hai vế cho m ta được

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \qquad (2.1.42)$$

trong đó ta kí hiệu $\omega^2 = c/m,\ 2k = \eta/m.$

Phương trình $(2.1.42)$ là phương trình vi phân của các *dao động tắt dần* (damped oscillation) chịu lực cản tỉ lệ bậc nhất với vận tốc.

c) Các dao động cưỡng bức khi không có lực cản

Xét trường hợp xảy ra khi ngoài lực phục hồi $\vec{F}$, điểm còn chịu tác dụng của lực $\vec{Q}$ biến đổi tuần hoàn theo thời gian mà hình chiếu của nó lên trục Ox là

$$Q_x = Q_0 \cos\omega_0 t \qquad (2.1.43)$$

lực đó gọi là *lực ngoài* (external force) còn dao động xảy ra dưới tác dụng của lực đó gọi là *dao động cưỡng bức* (forced oscillation). Đại lượng ω_0 là tần số góc của lực ngoài.

Phương trình vi phân của chuyển động trong trường hợp này có dạng

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q_0\cos\omega_0 t \qquad (2.1.44)$$

Chia hai vế $(2.1.44)$ cho m và đặt $P_0 = Q_0/m$ ta có

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = P_0 \cos \omega_0 t \qquad (2.1.45)$$

Đây là phương trình vi phân của các dao động cưỡng bức khi không có lực cản.

Ví dụ 2.1.9 (Dao động cưỡng bức trong môi trường không có lực cản)

Phương trình vi phân cho dao động có sự xuất hiện một lực ngoài $Ff(t)$ tác động lên hệ là

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = Ff(t), \qquad (2.1.46)$$

trong đó ω là tần số góc và F là hằng số.

Điều kiện ban đầu là

$$x(0) = a, \quad x'(0) = U \qquad (2.1.47)$$

trong đó a, U là các hằng số.

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.1.46)$ với điều kiện đầu $(2.1.47)$ ta được

$$s^2\overline{x}(s) - sx(0) - x'(0) + \omega^2\overline{x}(s) = F\,\overline{f}(s)$$

$$\Leftrightarrow s^2\overline{x}(s) - sa - U + \omega^2\overline{x}(s) = F\,\overline{f}(s)$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2 + \omega^2\right)\overline{x}(s) = sa + U + F\,\overline{f}(s)$$

Suy ra

$$\overline{x}(s) = \frac{as}{s^2+\omega^2} + \frac{U}{s^2+\omega^2} + \frac{F\,\overline{f}(s)}{s^2+\omega^2} \qquad (2.1.48)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của $(2.1.48)$ ta có

$$x(t) = a\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} + \frac{U}{\omega}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} + F\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\overline{f}(s)}{s^2+\omega^2}\right\}$$

$$= a\cos\omega t + \frac{U}{\omega}\sin\omega t + \frac{F}{\omega}\int_0^t f(t-\tau)\sin\omega\tau\, d\tau \qquad (2.1.49)$$

$$= \left(a^2 + \frac{U^2}{\omega^2}\right)^{1/2}(\cos\phi\cos\omega t + \sin\phi\sin\omega t) + \frac{F}{\omega}\int_0^t f(t-\tau)\sin\omega\tau\, d\tau$$

$$= A\cos(\omega t - \phi) + \frac{F}{\omega}\int_0^t f(t-\tau)\sin\omega\tau\, d\tau, \qquad (2.1.50)$$

trong đó $A = \left(a^2 + \frac{U^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$ và $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{U}{\omega a}\right)$.

Nghiệm $(2.1.50)$ bao gồm hai số hạng. Số hạng đầu tiên thỏa mãn điều kiện ban đầu và nó biểu diễn cho một *dao động tự do* với biên độ A, pha ban đầu ϕ và *tần số góc tự nhiên* ω (natural frequency). Dao động tự do này là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tương ứng, nó không phụ thuộc gì vào tác động ngoài.

Số hạng thứ hai biểu diễn cho một dao động cưỡng bức và dao động cưỡng bức này là nghiệm riêng của phương trình vi phân trên. Để kiểm tra một vài đặc trưng thú vị của nghiệm $(2.1.50)$, chúng ta xét các trường hợp đặc biệt sau đây.

(i) *Hàm cưỡng bức triệt tiêu* (Zero forcing function): $f(t) = 0$

Trong trường hợp này, từ nghiệm $(2.1.50)$ ta có

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi) \qquad (2.1.51)$$

Phương trình này biểu diễn cho một dao động điều hòa đơn giản với biên độ A, tần số góc ω, pha ban đầu ϕ.

(ii) *Hàm cưỡng bức ổn định* (Steady forcing function): $f(t) = 1$

Trong trường hợp này, nghiệm $(2.1.50)$ trở thành

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi) + \frac{F}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau d\tau$$

$$= A\cos(\omega t - \phi) + \frac{F}{\omega^2}[1 - \cos\omega t]$$

Tương đương

$$x(t)-\frac{F}{\omega^2}=A\cos(\omega t-\phi)-\frac{F}{\omega^2}\cos\omega t \qquad (2.1.52)$$

Đặt biệt với $U=0$. Khi đó $A=a,\phi=0$ nên từ $(2.1.52)$ ta có

$$x-\frac{F}{\omega^2}=\left(a-\frac{F}{\omega^2}\right)\cos\omega t.$$

Phương trình này tương ứng với dao động tự do với tần số góc tự nhiên ω.

(iii) *Hàm cưỡng bức biến đổi tuần hoàn* (periodic forcing function) nghĩa là $f(t)=\cos\omega_0 t$.

Nghiệm của biến đổi có thể dễ dàng tìm thấy từ $(2.1.48)$

$$\bar{x}(s)=\frac{as}{s^2+\omega^2}+\frac{U}{s^2+\omega^2}+\frac{Fs}{\left(s^2+\omega_0^2\right)\left(s^2+\omega^2\right)}$$

$$=\frac{as}{s^2+\omega^2}+\frac{U}{s^2+\omega^2}+\frac{F}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}-\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right). \qquad (2.1.53)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của phương trình trên ta được

$$x(t)=a\cos\omega t+\frac{U}{\omega}\sin\omega t+\frac{F}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right) \qquad (2.1.54)$$

$$=A\cos(\omega t-\phi)+\frac{F}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\cos\omega_0 t, \qquad (2.1.55)$$

trong đó $A=\left\{\left(a+\frac{F}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right)^2+\frac{U^2}{\omega^2}\right\}^{1/2}$ và $\tan\phi=\frac{U}{\omega}\div\left(a+\frac{F}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$.

Chú ý rằng $(2.1.54)$ gồm có ba dao động tự do với chu kì $\frac{2\pi}{\omega}$ và một dao động cưỡng bức với $\frac{2\pi}{\omega_0}$, dao động này có chu kì bằng với chu kì của ngoài lực biến thiên tuần hoàn. Từ số hạng thứ hai bên vế phải $(2.1.55)$ ta thấy chuyển động cưỡng bức thì cùng pha hoặc lệch pha 180^o so với ngoại lực khi $\omega>\omega_0$ hoặc $\omega<\omega_0$.

Khi $\omega=\omega_0$, kết quả $(2.1.54)$ có thể được viết lại như sau

$$x(t)=a\cos\omega t+\frac{U}{\omega}\sin\omega t+\frac{Ft}{(\omega_0+\omega)}\left[\frac{\sin\left\{\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)t\right\}\sin\left\{\frac{1}{2}(\omega+\omega_0)t\right\}}{\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)t}\right]$$

$$=a\cos\omega t+\frac{U}{\omega}\sin\omega t+\frac{Ft}{2\omega}\sin\omega t=A\cos(\omega t-\phi)+\frac{Ft}{2\omega}\sin\omega t, \qquad (2.1.56)$$

trong đó

$$A^2=\left(a^2+\frac{U^2}{\omega^2}\right) \text{và } \tan\phi=\frac{U}{a\omega}.$$

Từ số hạng thứ hai bên vế phải $(2.1.56)$ ta thấy biên độ của dao động cưỡng bức tăng dần theo thời gian. Do đó nếu tần số góc tự nhiên của hệ bằng tần số góc của dao động cưỡng bức thì dao động này sẽ *không bị chặn* (unbounded). Hiện tượng này ta còn gọi là *hiện tượng cộng hưởng* (resonance) và tần số góc tương ứng $\omega=\omega_0$ thì được gọi là *tần số cộng hưởng* (resonant frequency) của hệ.

Ví dụ 2.1.10 (Dao động tắt dần trong môi trường có lực cản)

Phương trình vi phân của dao động trong môi trường có lực cản tỉ lệ với vận tốc được cho bởi

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0, \qquad (2.1.57)$$

Điều kiện ban đầu của hệ là

$$x(0)=a,\ x'(0)=U \qquad (2.1.58)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.1.57)$ và theo $(2.1.58)$ ta được

$$s^2\overline{x}(s)-sx(0)-x'(0)+2k\left[s\overline{x}(s)-x(0)\right]+\omega^2\overline{x}(s)=0$$

$$\Leftrightarrow s^2\overline{x}(s)-U-sa+2k\left[s\overline{x}(s)-a\right]+\omega^2\overline{x}(s)=0,$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2+2ks+\omega^2\right)\overline{x}(s)=a(s+2k)+U$$

Do đó

$$\overline{x}(s) = \frac{a(s+2k)+U}{(s^2+2ks+\omega^2)}$$
$$= \frac{a(s+k)+(U+ak)}{(s+k)^2+n^2}$$
$$= \frac{a(s+k)}{(s+k)^2+n^2} + \frac{(U+ak)}{(s+k)^2+n^2} \qquad (2.1.59)$$

trong đó $n^2 = \omega^2 - k^2$.

Ta có ba trường hợp xảy ra như sau

- Trường hợp $0 < k < \omega$: *tắt dần yếu* (small damping)

Lấy biến đổi Laplace ngược của $(2.1.59)$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a(s+k)}{(s+k)^2+n^2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(U+ak)}{(s+k)^2+n^2}\right\}$$
$$= ae^{-kt}\cos nt + \frac{(U+ak)}{n}e^{-kt}\sin nt.$$

Do đó

$$x(t) = e^{-kt}\left(a\cos nt + \frac{U+ak}{n}\sin nt\right) = Ae^{-kt}\cos(nt-\phi),$$

trong đó $A = \left\{a^2 + \frac{(U+ak)^2}{n^2}\right\}^{1/2}$ và $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{U+ak}{an}\right)$.

Chuyển động này là một dao động với biên độ Ae^{-kt} phụ thuộc thời gian và *tần số góc suy rộng* (modified frequency)

$$n = (\omega^2 - k^2)^{1/2}, \quad 0 < k < \omega.$$

Điều này có nghĩa là khi lực cản nhỏ, tần số góc suy rộng sẽ nhỏ hơn tần số góc tự nhiên ω. Mặc dù lực cản nhỏ thì ảnh hưởng không đáng kể đối với tần số góc nhưng biên độ thì biến đổi hoàn toàn. Chú ý rằng biên độ giảm theo hàm mũ theo thời gian đến 0 khi $t \to \infty$ và pha của chuyển động thì cũng thay đổi bởi lực cản nhỏ . Do đó, chuyển động này là dao động tắt dần được minh họa trong hình 2.1.

- Trường hợp $\omega = k$: *tắt dần tới hạn* (critical damping)

Ta có $n = 0$ nên từ $(2.1.59)$ ta có nghiệm là

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{(s+k)}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(U+ak)}{(s+k)^2}\right\}$$
$$= ae^{-kt} + (U+ak)te^{-kt}$$

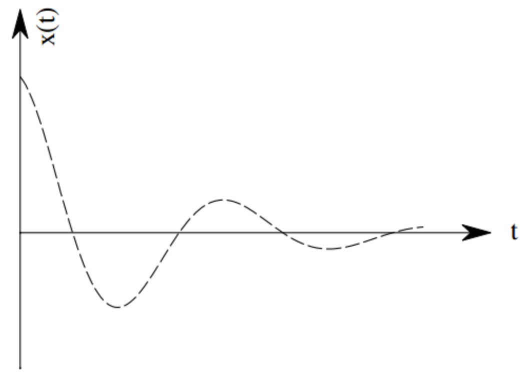
- Trường hợp $k > \omega$: *Quá tắt dần* (large damping)

Đặt $n^2 = -(k^2 - \omega^2) = -m^2$. Khi đó nghiệm $(2.1.59)$ có dạng

$$\overline{x}(s) = \frac{a(s+k)+(U+ak)}{(s+k)^2 - m^2}.$$
$$= \frac{a(s+k)}{(s+k)^2 - m^2} + \frac{U+ak}{(s+k)^2 - m^2} \qquad (2.1.60)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược $(2.1.60)$ ta được

$$x(t) = ae^{-kt}\cosh mt + \left(\frac{ak+U}{m}\right)e^{-kt}\sinh mt \qquad (2.1.61)$$



Hình 2.1 *Dao động tắt dần*

➢ Ứng dụng trong mạch điện

Một số bài toán về tính toán các mạch điện được đưa về giải phương trình vi phân. Vì thế, nếu chuyển qua ảnh của biến đổi Laplace thì việc giải các bài toán sẽ đơn giản hơn.

Ta nhắc lại định luật vật lý đối với mạch RLC. Theo *Định luật ôm* (Ohm's law) *lượng giảm điện thế* (voltage drop) khi *dòng điện* (electric current) đi qua *điện trở* (resistor) R là

$$V_R(t) = RI(t) \tag{2.1.62}$$

Thực nghiệm cũng cho định luật về lượng giảm điện thế $V_L(t)$đi qua *cuộn cảm* (inductor) có *điện cảm L* (inductance) tỉ lệ với độ thay đổi cường độ dòng điện

$$V_L(t) = L\frac{dI}{dt} \tag{2.1.63}$$

Tương tự ta có định luật về lượng giảm điện thế $V_C(t)$ khi dòng điện $I(t)$ đi qua *tụ điện* (capacitor) C tỉ lệ với *điện tích của tụ điện* (charge on the capacitor) $Q(t)$

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \tag{2.1.64}$$

trong đó C là *điện dung* (capacitance) của tụ điện và

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

($I(t)$ được đo bằng Ampere; R được đo bằng Ohm; điện dung được đo bằng Fara, điện tích $Q(t)$ đo bằng Coulomb, điện cảm L đo bằng Henry, $V_R(t), V_C(t), V_L(t)$ được đo bằng Volt).

Bây giờ, ta xét một mạch điện đơn giản RLC gồm có điện cảm L, điện trở R, điện dung C và một điện áp $E(t)$ như trong hình 2.2. Khi đó điện áp đi qua cuộn cảm, điện trở và tụ điện tương ứng là $L\frac{dI(t)}{dt}$, $RI(t)$, $(1/C)\int_0^t I(\tau)d\tau$.

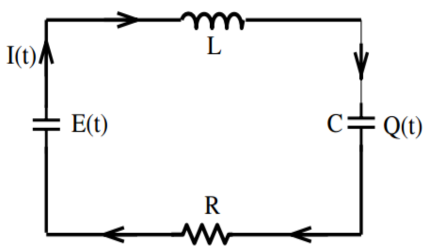
Theo *định luật điện thế Kirchoff*[1] (Kirchhoff's voltage law) nói rằng: điện thế áp lên một mạch kín bằng tổng lượng giảm thế trong cả mạch. Do đó với mạch RLC của ta thì

[1]***Gustav Robert Kirchhoff*** (1824-1887) là nhà vật lý người Đức.

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau=E(t), \qquad (2.1.65)$$

trong đó L, R, C là các hằng số và $I(t)$ là cường độ dòng điện mà nó có liên quan đến sự tích tụ điện tích Q trên tụ điện tại thời điểm t và được cho bởi

$$Q(t)=\int_0^t I(\tau)d\tau \text{ sao cho } \frac{dQ}{dt}=I(t) \qquad (2.1.66)$$



Hình 2.2 Mạch điện RLC

Nếu mạch điện không chứa tụ điện ($C\to\infty$), phương trình $(2.1.65)$ tương đương với

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t), \qquad t>0. \qquad (2.1.67)$$

Phương trình cho điện tích $Q(t)$ có thể tìm thấy từ $(2.2.65)$ và $(2.1.66)$ là

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E(t).$$

Ví dụ 2.1.11

Giả sử rằng cường độ dòng điện trong mạch LR thỏa mãn

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E_0\sin\omega t, \qquad (2.1.68)$$

trong đó L, R, E_0 và ω là các hằng số. Tìm $I=I(t)$ với $t>0$ nếu $I(0)=0$.

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.1.68)$ ta có

$$L\left[s\overline{I}(s)-I(0)\right]+R\overline{I}(s)=\frac{E_0\omega}{s^2+\omega^2} \qquad (2.1.69)$$

Do $I(0)=0$ nên phương trình $(2.1.69)$ tương đương với

$$(Ls+R)\overline{I}(s)=\frac{E_0\omega}{s^2+\omega^2}$$

Do đó

$$\overline{I}(s)=\frac{E_0\omega}{(Ls+R)(s^2+\omega^2)}.$$

Ta có

$$\overline{I}(s)=\frac{E_0\omega/L}{\left(s+\dfrac{R}{L}\right)(s^2+\omega^2)}=\frac{A}{s+R/L}+\frac{Bs+C}{s^2+\omega^2} \tag{2.1.70}$$

Khi đó

$$A(s^2+\omega^2)+(Bs+C)\left(s+\frac{R}{L}\right)=\frac{E_0\omega}{L}$$

$$\Leftrightarrow (A+B)s^2+\left(B\frac{R}{L}+C\right)s+A\omega^2+\frac{CR}{L}=\frac{E_0\omega}{L}$$

Ta có hệ sau

$$\begin{cases} A+B=0 \\ BR/L=-C \\ A\omega^2+CR/L=E_0\omega/L \end{cases}$$

Giải hệ ta được

$$A=\frac{E_0L\omega}{L^2\omega^2+R^2},\qquad B=\frac{-E_0L\omega}{L^2\omega^2+R^2},\qquad C=\frac{E_0R\omega}{L^2\omega^2+R^2}.$$

Thay A,B, C vào $(2.1.70)$ và lấy biến đổi Laplace ngược ta được

$$I(t)=\frac{E_0L\omega}{L^2\omega^2+R^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0R}{L^2\omega^2+R^2}\sin\omega t-\frac{E_0L\omega}{L^2\omega^2+R^2}\cos\omega t.$$

Ví dụ 2.1.12

Giả sử rằng cường độ dòng điện trong mạch LC thỏa mãn phương trình

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau=E, \tag{2.1.71}$$

trong đó L, C và E là các hằng số dương, $I(0)=0$.

Lấy biến đổi Laplace hai của $(2.1.71)$ ta được

$$Ls\overline{I}(s)-LI(0)+\frac{\overline{I}(s)}{Cs}=\frac{E}{s}$$

Do $I(0)=0$ nên

$$\left(Ls+\frac{1}{Cs}\right)\overline{I}(s)=\frac{E}{s}$$

$$\Leftrightarrow \overline{I}(s)=\frac{EC}{LCs^2+1}=\frac{E}{L\left(s^2+1/LC\right)}.$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta có

$$I(t)=E\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t \qquad (2.1.72)$$

2.2 Phương trình đạo hàm riêng

Định nghĩa 2.2.1

Một phương trình liên hệ hàm phải tìm u của nhiều biến độc lập và các đạo hàm riêng của nó được gọi là *phương trình đạo hàm riêng* (partial differential equation).

Cấp cao nhất của đạo hàm riêng của hàm phải tìm u có mặt trong phương trình gọi là *cấp* (order) của phương trình. Các phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ \ a\in \mathrm{R}, u=u(x,t) \qquad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ u=u(x,y,z) \qquad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ a\in \mathrm{R},\ u=u(x,t) \qquad (2.2.3)$$

là các phương trình đạo hàm riêng cấp hai.

Dạng tổng quát của một phương trình đạo hàm riêng cấp 2 đối với hàm $u(x,t)$ là

$$F\left(x,t,u,\nabla u,D^2u,\,u_t,\,u_{tt}\right)=0, \qquad (2.2.4)$$

trong đó $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^k$, t là biến độc lập; $u(x,t)$ là hàm phải tìm; $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$

$D^2u=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,k}}$ là các đạo hàm riêng.

➢ Qui tắc giải phương trình đạo hàm riêng bằng biến đổi Laplace

a) Áp dụng biến đổi Laplace theo một biến, thường là t vào phương trình để nhận được một phương trình vi phân thường của ảnh hàm phải tìm theo biến thứ hai (dùng cả điều kiện đầu để nhận được phương trình của ảnh này). Áp dụng biến đổi Laplace lên điều kiện biên để được điều kiện xác định các hằng số khi giải (hay tích phân) phương trình vi phân thường.

b) Dùng biến đổi Laplace ngược để suy ra nghiệm.

Định lý 2.2.1

Đặt $\overline{u}(x,s)=\mathscr{L}\left\{u(x,t)\right\}$ ta có

a)

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(x,t)\right\}=s^n\overline{u}(x,s)-\left[s^{n-1}u(x,0)+s^{n-2}\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)+\cdots+\right.$$
$$\left.+s\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}u(x,0)+\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(x,0)\right] \qquad (2.2.5)$$

Đặc biệt

Với $n=1,2$ ta có

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\}=s\overline{u}(x,s)-u(x,0)$$
$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right\}=s^2\overline{u}(x,s)-su(x,0)-\frac{\partial}{\partial t}u(x,0).$$

b) $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right\} = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\overline{u}(x,s),\ k = 1,2,...,n \qquad (2.2.6)$

Chứng minh

Đặt $f(t) = u(x,t),\ \overline{f}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$

a) Áp dụng công thức đạo hàm của hàm gốc ta được

$$\mathscr{L}\{f^n(t)\} = s^n\overline{f}(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \qquad (2.2.7)$$

Thay $f^n(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}u(x,t),\ \overline{f}(s) = \mathscr{L}\{u(x,t)\}$ thì a) được chứng minh.

b)

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)dt = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\mathscr{L}\{u(x,t)\}.$$

Định lý 2.2.2

Giả sử $\overline{f}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Khi đó ta có

a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-a\sqrt{s}}\right\} = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}, \qquad a > 0 \qquad (2.2.8)$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}, \qquad a > 0 \qquad (2.2.9)$

Chứng minh

a) Theo định lí biến đổi Laplace của đạo hàm ta có

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = s\mathscr{L}\left\{erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} - erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)_{t=0} \qquad (2.2.10)$$

Theo mệnh đề trong mục 1.6 ta có

$$\mathscr{L}\left\{erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s},$$

$(2.2.11)$

và $erfc\left(a/2\sqrt{t}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{a/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2}dx$ nên $erfc\left(a/2\sqrt{t}\right) \to 0$ khi $t \to 0$. $\quad (2.2.12)$

Thay $(2.2.11),(2.2.12)$ vào $(2.2.10)$ ta được

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t} erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = s\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} = e^{-a\sqrt{s}}$$

Tương đương,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}\right\} = e^{-a\sqrt{s}}, \qquad (2.2.13)$$

Bởi vì

$$erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} dx \qquad (2.2.14)$$

Đạo hàm hai vế của $(2.2.14)$ theo t ta được

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} erfc\left(a/2\sqrt{t}\right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{a/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} dx\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} f\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)', \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2/4t}.\frac{a}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-3/2} \\ &= \frac{ae^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}},\end{aligned}$$

trong đó $f(x) = e^{-x^2}$.

Từ $(2.2.13)$ ta có

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-a\sqrt{s}}\right\} = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}, \qquad a > 0 \qquad (2.2.15)$$

b) Lấy đạo hàm hai vế của $(2.2.13)$ theo s ta được

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathscr{L}\left(\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}\right) = -\frac{ae^{-a\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}\left\{-\frac{at}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}\right\} = -\frac{ae^{-a\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}\right\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

Suy ra

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t} \qquad a > 0 \qquad (2.2.16)$$

Ví dụ 2.2.1 (Phương trình truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn)

Giải phương trình

$$u_t = cu_{xx}, \qquad x > 0, \qquad t > 0 \qquad (2.2.17)$$

với các điều kiện đầu và biên như sau

$$u(x,0) = 0, \qquad x > 0 \qquad (2.2.18)$$

$$u(0,t) = f(t), \qquad t > 0 \qquad (2.2.19)$$

$$u(x,t) \to 0, \qquad x \to \infty, \quad t > 0 \qquad (2.2.20)$$

Lấy biến đổi Laplace theo t của $(2.2.17)$, coi x là tham số ta được

$$s\overline{u}(x,s) - u(x,0) = c\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

Do $u(x,0) = 0$ nên phương trình trên trở thành

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{u} - \frac{s}{c}\overline{u} = 0 \qquad (2.2.21)$$

Ta coi đây là phương trình vi phân thường theo biến x thì được phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng thuần nhất. Nghiệm tổng quát là

$$\overline{u}(x,s) = A\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + B\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \qquad (2.2.22)$$

trong đó A, B là các hằng số tích phân.

Ta có

$$\overline{u}(0,s) = \int_0^\infty u(0,t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \overline{f}(s).$$

Do nghiệm bị chặn nên $B=0$ và do $\bar{u}(0,s)=\bar{f}(s)$ nên từ $(2.2.22)$ ta có

$$A=\bar{f}(s).$$

Khi đó

$$\bar{u}(x,s)=\bar{f}(s)\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right). \qquad (2.2.23)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta có

$$u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi c}}\int_0^t f(t-\tau)\tau^{-3/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4c\tau}\right)d\tau, \qquad (2.2.24)$$

trong đó $\sqrt{\quad}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-x\sqrt{\frac{s}{c}}}\right\}=\frac{x}{2\sqrt{\pi c t^3}}e^{-x^2/4ct} \qquad \text{(Định lý 2.2.2)}$$

Đặt

$$\lambda=\frac{x}{2\sqrt{c\tau}},\ \ d\lambda=-\frac{x}{4\sqrt{c}}\tau^{-3/2}d\tau$$

Từ $(2.2.24)$ ta có

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}^{\infty} f\left(t-\frac{x^2}{4c\lambda^2}\right)e^{-\lambda^2}d\lambda \qquad (2.2.25)$$

Trường hợp đặc biệt, nếu $f(t)=T_0=$constant. Nghiệm $(2.2.25)$ trở thành

$$u(x,t)=\frac{2T_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}d\lambda=T_0\ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{ct}}\right) \qquad (2.2.26)$$

Dễ thấy, sự phân bố nhiệt độ có xu hướng tiến đến giá không đổi T_0 khi $t\to\infty$.

Ví dụ 2.2.2 (Phương trình khuếch tán trong môi trường hữu hạn)

Giải phương trình

$$u_t=k\,u_{xx}, \qquad 0<x<a,\quad t>0, \qquad (2.2.27)$$

với các điều kiện đầu và điều kiện biên sau

$$u(x,0)=0, \qquad 0<x<a, \qquad (2.2.28)$$

$$u(0,t)=U,\quad t>0, \tag{2.2.29}$$

$$u_x(a,t)=0,\ t>0, \tag{2.2.30}$$

trong đó U, k là hằng số.

Lấybiến đổi Laplace hai vế của $(2.2.27)$theo biến $\boldsymbol{t}$ ta được

$$s\overline{u}(x,s)-u(x,0)=k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{u}-\frac{s}{k}\overline{u}=0,\qquad 0<x<a, \tag{2.2.31}$$

do $u(x,0)=0.$

Ta có

$$\overline{u}(0,s)=\int_0^\infty u(0,t)e^{-st}dt=\frac{U}{s}, \tag{2.2.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{u}(a,s)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}u(a,t)e^{-st}dt=0 \tag{2.2.33}$$

Ta coi $(2.2.31)$ là phương trình vi phân thường theo biến x thì được phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng thuần nhất. Nghiệm tổng quát là

$$\overline{u}(x,s)=A\cosh\left(x\sqrt{\frac{s}{k}}\right)+B\sinh\left(x\sqrt{\frac{s}{k}}\right), \tag{2.2.34}$$

trong đó A, B là các hằng số tích phân.

Từ $(2.2.32)$ và $(2.2.34)$ ta có

$$\overline{u}(0,s)=A=\frac{U}{s}.$$

Lấy đạo hàm hai vế của $(2.2.34)$ theo x ta được

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{u}(x,s)=A\sqrt{\frac{s}{k}}\sinh\left(x\sqrt{\frac{s}{k}}\right)+B\sqrt{\frac{s}{k}}\cosh\left(x\sqrt{\frac{s}{k}}\right)$$

Từ $(2.2.33)$ ta có

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{u}\left(a,s\right)=\frac{U}{s}\sqrt{\frac{s}{k}}\sinh\left(a\sqrt{\frac{s}{k}}\right)+B\sqrt{\frac{s}{k}}\cosh\left(a\sqrt{\frac{s}{k}}\right)=0$$

Do đó

$$B=\frac{U}{s}\frac{\sinh\left(a\sqrt{\frac{s}{k}}\right)}{\cosh\left(a\sqrt{\frac{s}{k}}\right)}.$$

Thay A,B vào $\left(2.2.34\right)$ ta được

$$\overline{u}\left(x,s\right)=\frac{U}{s}\cdot\frac{\cosh\left[\left(a-x\right)\sqrt{\frac{s}{k}}\right]}{\cosh\left(a\sqrt{\frac{s}{k}}\right)}. \qquad \left(2.2.35\right)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của $\left(2.2.35\right)$ ta được

$$u\left(x,t\right)=U\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh\left[\left(a-x\right)\sqrt{\frac{s}{k}}\right]}{s\cosh\left(a\sqrt{\frac{s}{k}}\right)}\right\}=U\ f\left(t\right),$$

Đặt $\alpha=\sqrt{\frac{s}{k}}$, ta có

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}\,\frac{\cosh\left\{\left(a-x\right)\alpha\right\}}{s\cosh\left(a\alpha\right)}\,ds$$

Dễ thấy hàm dưới dấu tích phân có cực điểm tại $s=0$ và

$$s=s_n=-\left(2n-1\right)^2\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2k,\qquad n=1,2,3...$$

Ta có giá trị thặng dư R_1 tại $s=0$ là $\mathbf{1}$ và giá trị thặng dư R_n tại $s=s_n$ là

$$R_n = \lim_{s \to s_n}\left(s - s_n\right)\frac{e^{st}\cosh\left\{\left(a-x\right)\alpha\right\}}{s\cosh\left(a\alpha\right)} = \frac{\exp\left(s_n t\right)\cosh\left\{\left(a-x\right)\sqrt{\dfrac{s_n}{k}}\right\}}{\left[s\dfrac{d}{ds}\left\{\cosh a\sqrt{\dfrac{s}{k}}\right\}\right]_{s=s_n}}$$

$$= \frac{1}{\left[s\dfrac{d}{ds}\left\{\cosh a\sqrt{\dfrac{s}{k}}\right\}\right]_{s=s_n}}.\cosh\left\{i\frac{\left(2n-1\right)\left(a-x\right)\pi}{2a}\right\}\times\exp\left\{-\left(2n-1\right)^2\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 k\,t\right\}.$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n-1\right)}\cos\left\{\frac{\left(2n-1\right)\left(a-x\right)\pi}{2a}\right\}\times\exp\left\{-\left(2n-1\right)^2\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 k\,t\right\}.$$

Do đó nghiệm của bài toán là

$$u\left(x,t\right) = U\left(R_1 + R_n\right)$$

$$= U\left[1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n-1\right)}\cos\left\{\frac{\left(2n-1\right)\left(a-x\right)\pi}{2a}\right\}\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\left(2n-1\right)^2\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 k\,t\right\}\right] \qquad \left(2.2.36\right)$$

Ví dụ 2.2.3

Giải phương trình khuếch tán

$$u_t = c\,u_{xx}, \qquad x > 0, \qquad t > 0 \qquad \left(2.2.37\right)$$

với các điều kiện đầu và biên như sau

$$u\left(x,0\right) = 0, \qquad x > 0 \qquad \left(2.2.38\right)$$

$$u_x\left(0,t\right) = -\frac{1}{k}g\left(t\right), \quad t > 0 \qquad \left(2.2.39\right)$$

$$u\left(x,t\right) \to 0, \qquad x \to \infty, \quad t > 0 \qquad \left(2.2.40\right)$$

trong đó k là hằng số.

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $\left(2.2.37\right)$ theo $\boldsymbol{t}$ ta được

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{u} - \frac{s}{c}\overline{u} = 0 \qquad \left(2.2.41\right)$$

Ta coi đây là phương trình vi phân thường theo biến x thì được phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng thuần nhất. Nghiệm tổng quát là

$$\overline{u}(x,s) = A\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + B\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \qquad (2.2.42)$$

trong đó A, B là các hằng số.

Ta có

$$\overline{u}_x(0,s) = \int_0^\infty u_x(0,t)e^{-st}dt = -\frac{1}{k}\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = -\frac{1}{k}\,\overline{g}(s) \qquad (2.2.43)$$

Do nghiệm bị chặn nên $B = 0$, khi đó phương trình $(2.2.42)$ trở thành

$$\overline{u}(x,s) = A\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right)$$

Suy ra

$$\overline{u}_x(x,s) = -A\sqrt{\frac{s}{c}}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right)$$

Do đó

$$\overline{u}_x(0,s) = -A\sqrt{\frac{s}{c}} \qquad (2.2.44)$$

Từ $(2.2.43)$ và $(2.2.44)$ ta có

$$-A\sqrt{\frac{s}{c}} = -\frac{1}{k}\overline{g}(s)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{s}}\,\overline{g}(s).$$

Suy ra

$$\overline{u}(x,s) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{s}}\,\overline{g}(s)\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{k}\overline{g}(s).\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \qquad (2.2.45)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược phương trình trên ta được

$$u(x,t)=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{\pi}}\int_0^t g(t-\tau)\tau^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4c\tau}\right)d\tau, \qquad (2.2.46)$$

trong đó

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{\frac{s}{c}}}}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{\exp\left(-x^2/4ct\right)}{\sqrt{\pi t}} \qquad \text{(Định lý 2.2.2)}$$

Đặt

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{x}{2\sqrt{c\tau}},\\ d\lambda=-\dfrac{x}{4\sqrt{c}}\tau^{-3/2}d\tau\end{cases}$$

Khi đó phương trình $(2.2.46)$ trở thành

$$u(x,t)=\frac{x}{k\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4ct}}}^{\infty} g\left(t-\frac{x^2}{4c\lambda^2}\right)\lambda^{-2}e^{-\lambda^2}d\lambda. \qquad (2.2.47)$$

Đặc biệt, nếu $g(t)=T_0=$constant, nghiệm trở thành

$$u(x,t)=\left(\frac{T_0x}{k\sqrt{\pi}}\right)\int_{\frac{x}{\sqrt{4ct}}}^{\infty}\lambda^{-2}e^{-\lambda^2}d\lambda \qquad (2.2.48)$$

Ta có

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{T_0x}{k\sqrt{\pi}}\left[-e^{-\lambda^2}\frac{1}{\lambda}\Bigg|_{\lambda=\frac{x}{\sqrt{4ct}}}^{\infty}-2\int_{\frac{x}{\sqrt{4ct}}}^{\infty}e^{-\lambda^2}d\lambda\right]\\
&=\frac{T_0x}{k\sqrt{\pi}}\left[\frac{2\sqrt{ct}}{x}\exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)-\sqrt{\pi}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4ct}}}^{\infty}e^{-\lambda^2}d\lambda\right]\\
&=\frac{T_0x}{k\sqrt{\pi}}\left[\frac{2\sqrt{ct}}{x}\exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)-\sqrt{\pi}\,erfc\left(\frac{x}{\sqrt{4ct}}\right)\right]\\
&=\frac{T_0}{k}\left[2\sqrt{\frac{ct}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)-x\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{ct}}\right)\right].\end{aligned}$$

Do đó

$$u(x,t)=\frac{T_0}{k}\left[2\sqrt{\frac{ct}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)-x\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{ct}}\right)\right] \qquad (2.2.49)$$

Ví dụ 2.2.4 (Phương trình sóng cho dao động của một sợi dây nửa vô hạn)

Tìm độ dịch chuyển của một sợi dây nửa vô hạn mà tại thời điểm ban đầu sợi dây nằm ở vị trí cân bằng (dây ở trạng thái không bị dịch chuyển). Tại thời điểm $t=0$ đầu mút $x=0$ nó bị cưỡng bức để chuyển động sao cho độ dịch chuyển là $u(0,t)=A\,f(t)$, với $t\geq 0$, trong đó A là hằng số. Đây là bài toán điều kiện biên – điều kiện đầu của phương trình sóng một chiều.

$$u_{tt}=c^2u_{xx},\qquad 0<x<\infty,\quad t>0, \qquad (2.2.50)$$

với các điều kiện biên vàđiều kiện đầu sau

$$u(0,t)=A\,f(t)\qquad \text{với}\quad t\geq 0 \qquad (2.2.51)$$

$$u(x,t)\to 0\qquad \text{khi}\quad x\to\infty,\quad t\geq 0, \qquad (2.2.52)$$

$$u(x,0)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=0\quad \text{với}\quad 0<x<\infty \qquad (2.2.53)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.2.50)$ theo t ta nhận được

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right\}=c^2\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\}$$

$$\Leftrightarrow s^2\overline{u}(x,s)-su(x,0)-\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{u}(x,s)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}-\frac{s^2}{c^2}\overline{u}=0, \qquad (2.2.54)$$

Ta có

$$\overline{u}(0,s)=\int_0^\infty u(0,t)e^{-st}dt=A\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=A\,\overline{f}(s), \qquad (2.2.55)$$

$$\overline{u}(x,s)\to 0,\ \text{khi}\ x\to\infty \qquad (2.2.56)$$

Ta xem phương trình $(2.2.54)$ là phương trình vi phân thường theo biến x thì được phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng thuần nhất. Nghiệm tổng quát là

$$\bar{u}(x,s) = C\exp\left(\frac{sx}{c}\right) + D\exp\left(-\frac{sx}{c}\right). \qquad (2.2.57)$$

Do $\bar{u}(x,s)$ bị chặn nên $C = 0$. Khi đó $(2.2.57)$ trở thành

$$\bar{u}(x,s) = D\exp\left(-\frac{sx}{c}\right).$$

Do đó $\bar{u}(0,s) = D$ và do $\bar{u}(0,s) = A\bar{f}(s)$ nên ta có

$$D = A\bar{f}(s).$$

Suy ra

$$\bar{u}(x,s) = A\bar{f}(s)\exp\left(-\frac{xs}{c}\right).$$

Lấy biến đổi Lalace ngược ta có

$$u(x,t) = Af\left(t - \frac{x}{c}\right)H\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Nói cách khác, nghiệm là

$$u(x,t) = \begin{bmatrix} Af\left(t - \dfrac{x}{c}\right), & t > \dfrac{x}{c} \\ 0, & 0 < t < \dfrac{x}{c} \end{bmatrix} \qquad (2.2.58)$$

Nghiệm biểu diễn một sóng lan truyền sang phải với vận tốc c. Điểm x sẽ ở cân bằng từ $t = 0$ đến $t = \dfrac{x}{c}$ thì sóng sẽ truyền đến nó.

Ví dụ 2.2.5

Tìm nghiệm của phương trình

$$xu_t + u_x = x, \qquad x > 0,\ t > 0 \qquad (2.2.59)$$

với điều kiện đầu - điều kiện biên

$$u(x,0)=0, \qquad x>0, \tag{2.2.60}$$

$$u(0,t)=0, \qquad t>0 \tag{2.2.61}$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế theo t của $(2.2.59)$, coi x là tham số ta có

$$x\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\}+\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right\}=\mathscr{L}\{x\}$$

$$\Leftrightarrow x\left[s\bar{u}(x,s)-u(x,0)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,s)=\frac{x}{s}.$$

Do $u(x,0)=0$ nên phương trình trên trở thành

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,s)+xs\bar{u}(x,s)=\frac{x}{s}.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất theo biến x, vì không có đạo hàm theo s nên nó sẽ là tham số và hằng số khi tích phân phương trình sẽ phụ thuộc vào s. Thừa số tích phân là

$$\mu(x)=e^{\int xs dx}=\exp\left(\frac{1}{2}x^2s\right).$$

Nhân hai vế phương trình trên với thừa số tích phân $\exp\left(\frac{1}{2}x^2s\right)$ ta được

$$\left(\bar{u}(x,s)\exp\left(\frac{1}{2}x^2s\right)\right)'=\frac{x}{s}\exp\left(\frac{1}{2}x^2s\right),$$

Do đó

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,s)&=\exp\left(-\frac{1}{2}x^2s\right)\left[\int\frac{x}{s}\exp\left(\frac{1}{2}x^2s\right)dx+A\right]\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}x^2s\right)\left[\frac{1}{s^2}\exp\left(\frac{1}{2}x^2s\right)+A\right]\\&=\frac{1}{s^2}+A\exp\left(-\frac{1}{2}x^2s\right),\end{aligned} \tag{2.2.62}$$

trong đó A là hằng số tích phân.

Ta có

$$\overline{u}(0,s) = \frac{1}{s^2} + A$$

Do $\overline{u}(0,s) = \int_0^\infty u(0,t)e^{-st}dt = 0$ nên

$$\frac{1}{s^2} + A = 0$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{1}{s^2}$$

Thay $A = -\frac{1}{s^2}$ vào $(2.2.62)$ ta được

$$\overline{u}(x,s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 s\right) \qquad (2.2.63)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta có

$$u(x,t) = t - \left(t - \frac{1}{2}x^2\right) H\left(t - \frac{x^2}{2}\right). \qquad (2.2.64)$$

hay

$$u(x,t) = \begin{cases} t, & 2t < x^2 \\ \frac{1}{2}x^2, & 2t > x^2 \end{cases} \qquad (2.2.65)$$

Ví dụ 2.2.6

Giải phương trình đạo hàm riêng không thuần nhất sau

$$u_{xt} = -\omega \sin \omega t, \qquad t > 0 \qquad (2.2.66)$$

$$u(x,0) = x, \quad u(0,t) = 0 \qquad (2.2.67)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.2.66)$ ta có

$$\mathscr{L}\{u_{xt}\} = \mathscr{L}\{-\omega \sin \omega t\}, \quad t > 0$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}\left\{\left[u_x(x,t)\right]_t\right\} = -\omega.\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow s\overline{u}_x(x,t) - u_x(x,0) = -\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

Theo $(2.2.67)$ ta có $u_x(x,0) = 1$ nên phương trình trên trở thành

$$s\,\overline{u}_x\left(x,t\right)-1=-\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow s\,\overline{u}_x\left(x,t\right)=1-\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\overline{u}}{\partial x}=\frac{s^2}{s\left(s^2+\omega^2\right)}$$

hay

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}=\frac{s}{s^2+\omega^2},$$

Do đó nghiệm tổng quát là

$$\overline{u}\left(x,s\right)=\frac{sx}{s^2+\omega^2}+A, \tag{2.2.68}$$

trong đó A là hằng số tích phân.

Mà

$$\overline{u}\left(0,s\right)=\int_0^\infty u\left(0,t\right)e^{-st}dt=0$$

nên từ $(2.2.68)$ ta có $A=0$.

Suy ra

$$\overline{u}\left(x,s\right)=\frac{sx}{s^2+\omega^2}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được

$$u\left(x,t\right)=x\cos\omega t \tag{2.2.69}$$

Ví dụ 2.2.7 (Phương trình sóng không thuần nhất)

Giải phương trình sau

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}-u_{xx}=k\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right),\qquad 0<x<a,\ t>0, \tag{2.2.70}$$

$$u\left(x,0\right)=u_t\left(x,0\right)=0,\qquad 0<x<a, \tag{2.2.71}$$

$$u\left(0,t\right)=u\left(a,t\right)=0,\qquad t>0, \tag{2.2.72}$$

trong đó c, k và a là các hằng số.

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.2.70)$ ta có

$$\frac{1}{c^2}\left[s^2\bar{u}(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)\right]-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}=\frac{k}{s}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \tag{2.2.73}$$

Từ $(2.2.71)$ ta có

$$\frac{s^2}{c^2}\bar{u}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}=\frac{k}{s}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Tương đương

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}-\frac{s^2}{c^2}\bar{u}=-\frac{k}{s}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \tag{2.2.74}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất. Khi đó

- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{u}(x,s)=A\exp\left(\frac{sx}{c}\right)+B\exp\left(-\frac{sx}{c}\right). \tag{2.2.75}$$

- Tìm nghiệm riêng của phương trình $(2.2.70)$

Do vế phải của $(2.2.70)$ có chứa $\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ nên ta viết nghiệm riêng dưới dạng

$$\bar{u}_p(x,s)=C\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)+D\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Ta có

$$\frac{\partial\bar{u}_p}{\partial x}=-\frac{\pi C}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)+\frac{\pi D}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right),$$
$$\frac{\partial^2\bar{u}_p}{\partial x^2}=-\frac{\pi^2 C}{a^2}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)-\frac{\pi^2 D}{a^2}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right).$$

Thay vào phương trình $(2.2.74)$ ta được

$$-C\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{s^2}{c^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)-D\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{s^2}{c^2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)=-\frac{k}{s}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

Do đó

$$\begin{cases} C = 0, \\ D = \dfrac{k}{s\left(\dfrac{\pi^2}{a^2} + \dfrac{s^2}{c^2}\right)}, \end{cases}$$

Do đó

$$\bar{u}_P(x,s) = \frac{kc^2}{s\left(s^2 + \dfrac{\pi^2 c^2}{a^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình $(2.2.74)$ là

$$\bar{u}(x,s) = A\exp\left(\frac{sx}{c}\right) + B\exp\left(-\frac{sx}{c}\right) + \frac{kc^2}{s\left(s^2 + \dfrac{\pi^2 c^2}{a^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \qquad (2.2.76)$$

Từ $(2.2.72)$ ta có $\bar{u}(0,s) = \bar{u}(a,s) = 0$. Do đó từ $(2.2.75)$ ta có

$$A = B = 0$$

Khi đó nghiệm $(2.2.76)$ trở thành

$$\bar{u}(x,s) = \frac{k a^2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \dfrac{\pi^2 c^2}{a^2}}\right],$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta có

$$u(x,t) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 k \left[1 - \cos\left(\frac{\pi c}{a} t\right)\right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right). \qquad (2.2.78)$$

2.3 Nghiệm của phương trình tích phân

Định nghĩa 2.3.1

Một phương trình mà trong đó hàm số chưa biết xuất hiện bên dưới dấu một tích phân được gọi là *phương trình tích phân* (integral equation).

Phương trình tích phân có dạng

$$f(t)=h(t)+\lambda\int_a^b \mathrm{k}(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau \qquad (2.3.1)$$

trong đó f là hàm số chưa biết, $h(t),\mathrm{k}(t,\tau)$ và các giới hạn của tích phân a,b đã biết, λ là hằng số, được gọi là phương trình tích phân tuyến tính loại hai hoặc phương trình tích phân Volterra. Hàm số $\mathrm{k}(t,\tau)$ được gọi là *hạt nhân* (kernel) của phương trình. Như vậy một phương trình được xem là thuần nhất hay không thuần nhất thì dựa vào $h(t)=0$ hoặc $h(t)\neq 0$. Nếu hạt nhân của phương trình có dạng $\mathrm{k}(t,\tau)=g(t-\tau)$, ta nhận được *phương trình tích phân chập* (convolution integral equation).

Để giải phương trình tích phân chập có dạng

$$f(t)=h(t)+\lambda\int_0^t g(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau \qquad (2.3.2)$$

Lấy biến đổi Laplace của phương trình $(2.3.2)$ ta được

$$\bar{f}(s)=\bar{h}(s)+\lambda\mathscr{L}\left\{\int_0^t g(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\right\},$$

Theo định lý tích chập ta có

$$\bar{f}(s)=\bar{h}(s)+\lambda\bar{f}(s)\bar{g}(s).$$

hay

$$\bar{f}(s)=\frac{\bar{h}(s)}{1-\lambda\bar{g}(s)} \qquad (2.3.3)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta nhận được nghiệm

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{h}(s)}{1-\lambda\bar{g}(s)}\right\} \qquad (2.3.4)$$

Trong nhiều trường hợp, vế bên phải có thể lấy hàm ngược bằng cách sử dụng khai triển phân thức hoặc dùng chu tuyến. Do đó, nghiệm có thể dễ dàng được tìm thấy.

Ví dụ 2.3.1

Giải phương trình tích phân

$$f(t) = a + \lambda \int_0^t f(\tau)\,d\tau \qquad (2.3.5)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.3.5)$ ta được

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{a\} + \mathscr{L}\left\{\lambda \int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}$$

$$\Leftrightarrow \overline{f}(s) = \frac{a}{s} + \lambda \frac{\overline{f}(s)}{s} .$$

$$\Leftrightarrow \overline{f}(s) = \frac{a}{s-\lambda}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta có

$$f(t) = a\exp(\lambda t) \qquad (2.3.6)$$

Ví dụ 2.3.2

Giải phương trình vi tích phân

$$f(t) = a\sin t + 2\int_0^t f'(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau, \quad f(0) = 0 \qquad (2.3.7)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.3.7)$ ta được

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{a\sin t\} + \mathscr{L}\left\{2\int_0^t f'(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

$$\Leftrightarrow \overline{f}(s) = \frac{a}{s^2+1} + 2\mathscr{L}\{f'(t)\}\mathscr{L}\{\sin t\}$$

hay

$$\overline{f}(s) = \frac{a}{s^2+1} + 2\frac{\{s\,\overline{f}(s) - f(0)\}}{s^2+1}.$$

Do $f(0) = 0$ nên ta có

$$\bar{f}(s) = \frac{a}{s^2+1} + 2\ \frac{s\,\bar{f}(s)}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2+1\right)\bar{f}(s) = a + 2s\,\bar{f}(s)$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2-2s+1\right)\bar{f}(s) = a$$

$$\Leftrightarrow \bar{f}(s) = \frac{a}{(s-1)^2}.$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta được

$$f(t) = a\,t\exp(t) \tag{2.3.8}$$

Ví dụ 2.3.3

Giải phương trình tích phân

$$f(t) = a\,t^n - e^{-bt} - c\int_0^t f(\tau)e^{c(t-\tau)}d\tau \tag{2.3.9}$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.3.9)$ ta được

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{a\,t^n\} - \mathscr{L}\{e^{-bt}\} - \mathscr{L}\left\{c\int_0^t f(\tau)e^{c(t-\tau)}d\tau\right\}$$

$$\Leftrightarrow \bar{f}(s) = \frac{a\,n!}{s^{n+1}} - \frac{1}{s+b} - \bar{f}(s)\frac{c}{s-c}$$

$$\Leftrightarrow \bar{f}(s)\left[1+\frac{c}{s-c}\right] = \frac{a\,n!}{s^{n+1}} - \frac{1}{s+b}$$

$$\Leftrightarrow \bar{f}(s)\left(\frac{s}{s-c}\right) = \frac{a\,n!}{s^{n+1}} - \frac{1}{s+b}$$

Do đó

$$\overline{f}(s)=\left(\frac{s-c}{s}\right)\left[\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{1}{s+b}\right]$$
$$=\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{(ac)n!}{s^{n+2}}-\frac{1}{s}\left[\frac{s+b-c-b}{s+b}\right]$$
$$=\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{(ac)n!}{s^{n+2}}-\frac{1}{s}+\frac{c+b}{b}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+b}\right]$$
$$=\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{(ac)n!}{s^{n+2}}-\frac{1}{s}+\left(1+\frac{c}{b}\right)\frac{1}{s}-\left(1+\frac{c}{b}\right)\frac{1}{s+b}$$
$$=\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{(ac)n!}{s^{n+2}}+\frac{c}{bs}-\left(1+\frac{c}{b}\right)\frac{1}{s+b}.$$

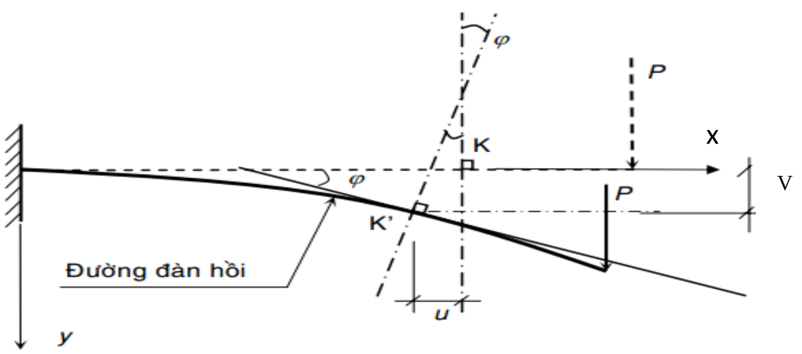
Lấy biến đổi Laplace ngược ta nhận được nghiệm

$$f(t)=at^{n}-\frac{(ac)n!}{(n+1)!}t^{n+1}+\frac{c}{b}-\left(1+\frac{c}{b}\right)e^{-bt}.$$

2.4 Nghiệm của bài toán giá trị biên

Phương pháp biến đổi Laplace thì cũng rất hữu ích trong việc tìm nghiệm của các bài toán biên thường xuất hiện nhiều trong lý thuyết chuyển vị của dầm chịu uốn. Biến dạng của *thanh chịu uốn* (dầm) là sự thay đổi độ cong của trục thanh. Khi đó đường cong của thanh chịu uốn là *đường đàn hồi*.

Một dầm nằm ngang sẽ bị uốn cong khi có sự tác dụng kết hợp của trọng lượng và tải trọng tác dụng lên nó. Chúng ta xét một dầm có chiều dài ℓ và vị trí cân bằng được lấy dọc theo trục ngang x, trục này còn gọi là trục của dầm.



Hình 2.3

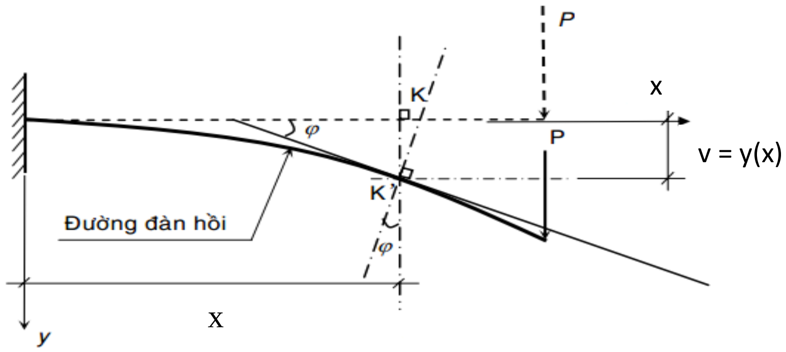
Xét một điểm K trên trục dầm trước khi biến dạng. Sau khi dầm biến dạng, điểm K sẽ di chuyển đến điểm K' (Hình 2.3). Khoảng cách KK' được gọi là chuyển vị thẳng của điểm K. Chuyển vị này chia ra làm hai thành phần

+ Thành phần v vuông góc với trục dầm (*song song với trục y*) được gọi là độ võng của K.

+ Thành phần u song song với trục dầm (*song song với trục x*) gọi là chuyển vị ngang của điểm K.

Ngoài ra sau khi trục dầm bị biến dạng, *mặt cắt ngang* ở vị trí K bị xoay đi một góc φ, được gọi là chuyển vị góc hay góc xoay của mặt cắt ngang ở tại điểm K. Dễ dàng thấy rằng, góc xoay φ chính bằng góc giữa trục chưa biến dạng của dầm và tiếp tuyến ở điểm K' của đường đàn hồi.

Trong điều kiện chuyển vị của dầm là bé thì thành phần chuyển vị ngang u là một đại lượng vô cùng bé so với v nên ta có thể bỏ qua chuyển vị u và xem KK' bằng v (Hình 2.4).



Hình 2.4

Nếu ta chọn trục dầm là x, trục y vuông góc với trục dầm thì chuyển vị v chính là tung độ y của điểm K'. Tung độ y được gọi là *độ võng* (deflection) của điểm K.

Phương trình vi phân cho *độ võng thẳng đứng* $y(x)$ của dầm có mặt cắt không đổi, chịu tác dụng của một *tải trọng*[2] $W(x)$ trên một đơn vị chiều dài tại một khoảng x được tính từ gốc tọa độ trên trục của dầm là

[2]Tải trọng là ngoại lực và là những lực chủ động nghĩa là ta có thể biết phương, vị trí và độ lớn.

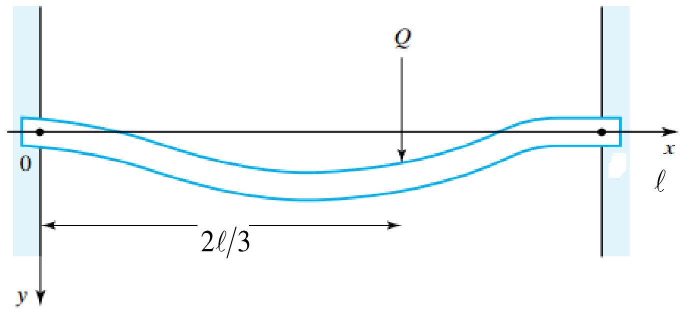
$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = W(x), \qquad 0 < x < \ell, \qquad (2.4.1)$$

trong đó EI là *độ cứng chịu uốn* của dầm (flexural rigidity of the beam).

Một số đại lượng vật lý có liên quan đến bài toán là $y'(x), M(x) = EIy''(x)$ và $S(x) = M'(x) = EIy'''(x)$ tương ứng biểu diễn cho góc xoay, moment uốn và lực cắt tại một điểm.

Ví dụ 2.4.1

Cho một dầm có khối lượng *M*, chiều dài ℓ bị *ngàm*[3] (clamped) hai đầu mút và chịu tải trọng tập trung có độ lớn Q tại điểm $x = \dfrac{2\ell}{3}$ trên trục của dầm. Hãy xác định độ võng của dầm?



Phương trình vi phân cho độ võng của dầm có dạng

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = W(x), \qquad 0 < x < \ell,$$

Do dầm có tải trọng tập trung tại điểm $x = \dfrac{2\ell}{3}$ nên lực chỉ tập trung tại điểm đó. Khi đó $W(x)$ được biểu diễn như sau

$$W(x) = \frac{M}{\ell} + Q\delta\left(x - \frac{2\ell}{3}\right), \qquad 0 < x < \ell \qquad (2.4.2)$$

Hơn nữa do dầm bị ngàm hai đầu mút nên độ võng và góc xoay ở tại các điểm đó bằng 0. Khi đó ta viết lại phương trình vi phân cho độ võng của dầm như sau

[3]Ngàm là liên kết của dầm với một vật thể khác có tác dụng ngăn cản chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay nào đó của dầm.

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{M}{\ell}+Q\delta\left(x-\frac{2\ell}{3}\right),\qquad 0<x<\ell \tag{2.4.3}$$

với điều kiện biên

$$y(0)=y'(0)=0,\ y(\ell)=y'(\ell)=0, \tag{2.4.4}$$

trong đó Q là một hằng số và $\delta\left(x-\frac{2\ell}{3}\right)$ là hàm *Dirac Delta* được định nghĩa bởi

$$\delta\left(x-\frac{2\ell}{3}\right)=\begin{cases}\infty, & x=\dfrac{2\ell}{3}\\ 0, & x\neq\dfrac{2\ell}{3}\end{cases} \tag{2.4.5}$$

Để giải quyết bài toán này, chúng ta sử dụng biến đổi Laplace $\overline{y}(s)$ của $y(x)$ được định nghĩa bởi

$$\overline{y}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}y(x)\,dx. \tag{2.4.6}$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.4.3)$ ta được

$$EI\left[s^4\overline{y}(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)\right]=\frac{M}{\ell s}+Qe^{-\frac{2\ell s}{3}}, \tag{2.4.7}$$

trong đó $\mathscr{L}\left\{\delta\left(t-\frac{2\ell}{3}\right)\right\}=e^{-\frac{2\ell s}{3}}$ [Mục A.2, Trang 99]

Theo điều kiện $(2.4.4)$ nên từ $(2.4.7)$ ta có

$$EI\left[s^4\overline{y}(s)-sy''(0)-y'''(0)\right]=\frac{M}{\ell s}+Qe^{-\frac{2\ell s}{3}}$$

$$\Leftrightarrow s^4\overline{y}(s)-sy''(0)-y'''(0)=\frac{M}{\ell EIs}+\frac{Q}{EI}e^{-\frac{2\ell s}{3}}$$

Suy ra

$$\overline{y}(s)=\frac{y''(0)}{s^3}+\frac{y'''(0)}{s^4}+\frac{Q}{EI}\frac{e^{-\frac{2\ell s}{3}}}{s^4}+\frac{M}{\ell EI}\cdot\frac{1}{s^5} \tag{2.4.8}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược $(2.4.8)$ ta được

$$y(x) = y''(0)\frac{x^2}{2} + y'''(0)\frac{x^3}{6} + \frac{Q}{6EI}\left(x - \frac{2\ell}{3}\right)^3 H\left(x - \frac{2\ell}{3}\right) + \frac{M}{24\ell EI}x^4 \qquad (2.4.9)$$

Suy ra

$$y'(x) = y''(0)x + \frac{1}{2}x^2 y'''(0) + \frac{Q}{2EI}\left(x - \frac{2\ell}{3}\right)^2 H\left(x - \frac{2\ell}{3}\right) + \frac{M}{6\ell EI}x^3 \qquad (2.4.10)$$

Từ điều kiện $y(\ell) = y'(\ell) = 0$ nên từ $(2.4.9), (2.4.10)$ ta có hệ sau

$$\begin{cases} y''(0)\dfrac{\ell^2}{2} + y'''(0)\dfrac{\ell^3}{6} + \dfrac{Q}{6EI}\left(\ell - \dfrac{2\ell}{3}\right)^3 + \dfrac{M\ell^3}{24EI} = 0, \\ y''(0)\ell + y'''(0)\dfrac{\ell^2}{2} + \dfrac{Q}{2EI}\left(\ell - \dfrac{2\ell}{3}\right)^2 + \dfrac{M\ell^2}{6EI} = 0. \end{cases}$$

Tương đương,

$$\begin{cases} \dfrac{M\ell}{4EI} + \dfrac{Q\ell}{27EI} + 3y''(0) + \ell y'''(0) = 0 \\ \dfrac{M\ell^2}{6EI} + \dfrac{Q}{18EI} + y''(0) + \dfrac{1}{2}\ell y'''(0) = 0 \end{cases}$$

Tương đương,

$$\begin{cases} 3y''(0) + \ell y'''(0) = -\dfrac{M\ell}{4EI} - \dfrac{Q\ell}{27EI} \\ y''(0) + \dfrac{1}{2}\ell y'''(0) = -\dfrac{M\ell^2}{6EI} - \dfrac{Q}{18EI} \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình đại số, ta giải hệ này bằng định thức tương tự như ví dụ 2.1.6 ta được

$$y''(0) = \frac{\ell}{108EI}(9M + 8Q) \text{ và } y'''(0) = -\frac{1}{54EI}(27M + 14Q).$$

Thay vào $(2.4.9)$ ta được

$$y(x) = \frac{M}{24\ell EI}x^4 + \frac{Q}{6EI}\left(x - \frac{2\ell}{3}\right)^3 H\left(x - \frac{2\ell}{3}\right) + \frac{\ell}{216EI}(9M + 8Q)x^2$$
$$-\frac{1}{324EI}(27M + 14Q)x^3, \qquad 0 \le x \le \ell.$$

2.5 Nghiệm của phương trình sai phân và vi sai phân

Giả sử $\{u_r\}_{r=1}^{\infty}$ là dãy số đã cho. Khi đó các *toán tử sai phân* $\Delta, \Delta^2, \Delta^3, ..., \Delta^n$ định nghĩa bởi

$$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r, \tag{2.5.1}$$

$$\Delta^2 u_r = \Delta(\Delta u_r) = \Delta(u_{r+1} - u_r) = u_{r+2} - 2u_{r+1} + u_r, \tag{2.5.2}$$

$$\Delta^3 u_r = \Delta^2(u_{r+1} - u_r) = u_{r+3} - 3u_{r+2} + 3u_{r+1} - u_r. \tag{2.5.3}$$

Tổng quát

$$\Delta^n u_r = \Delta^{n-1}(u_{r+1} - u_r) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_{r+n-k} \tag{2.5.4}$$

Các biểu thức trên được gọi là các *sai phân* cấp 1, cấp 2, cấp 3 và cấp n tương ứng. Bất kì phương trình nào biểu diễn mối liên hệ giữa các sai phân hữu hạn thì được gọi là một *phương trình sai phân* (difference equation). Cấp cao nhất của sai phân trong phương trình cũng là bậc của phương trình. Một phương trình sai phân có chứa đạo hàm của hàm số chưa biết thì phương trình đó được gọi là *phương trình vi sai phân* (differential – difference equation). Do đó, phương trình vi sai phân gồm có hai bậc phân biệt – bậc thứ nhất là cấp cao nhất của sai phân và bậc thứ hai là cấp cao nhất của đạo hàm.

Phương trình

$$\Delta u_r - u_r = 0, \tag{2.5.5}$$

$$\Delta^2 u_r - 2\Delta u_r = 0, \tag{2.5.6}$$

tương ứng là phương trình sai phân bậc nhất và bậc hai. Dạng tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính cấp n là

$$a_0\Delta^n u_r + a_1\Delta^{n-1} u_r + ... + a_{n-1}\Delta u_r + a_n u_r = f(n), \tag{2.5.7}$$

trong đó $a_0, a_1, ..., a_n$ và $f(n)$ là các hằng số hoặc là các hàm của đối số nguyên không âm n. Tương tự như phương trình vi phân, phương trình $(2.5.7)$ được gọi là thuần nhất hay không thuần nhất dựa vào hàm $f(n)$ bằng 0 hay khác 0.

Các phương trình sau đây

$$u'(t) - u(t-1) = 0, \tag{2.5.8}$$

$$u'(t) - au(t-1) = f(t), \tag{2.5.9}$$

là các phương trình vi sai phân, trong đó $f(t)$ là hàm số đã cho . Để nghiên cứu các phương trình trên ta đặt hàm $S_n(t)$ như sau

$$S_n(t) = H(t-n) - H(t-n-1), \quad n \le t < n+1, \tag{2.5.10}$$

trong đó n là số nguyên không âm và $H(t)$ là hàm bước nhảy đơn vị Heaviside. Lấy biến đổi Laplace của $S_n(t)$ ta được

$$\begin{aligned}\bar{S}_n(s) = \mathscr{L}\{S_n(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\{H(t-n) - H(t-n-1)\}dt \\ &= \int_n^{n+1} e^{-st}dt = \frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)e^{-ns} = \bar{S}_0(s)\exp(-ns),\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

trong đó $\bar{S}_0(s) = \frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)$.

Tiếp theo chúng ta định nghĩa hàm $u(t)$ bởi một chuỗi

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n S_n(t), \tag{2.5.12}$$

trong đó $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy số đã cho. Theo đó $u(t) = u_n$ trong khoảng $n \le t < n+1$ và biễu diễn một hàm bậc thang. Hơn nữa

$$\begin{aligned}u(t+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n S_n(t+1) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \left[H(t+1-n) - H(t-n)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n S_{n-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} S_n(t).\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Tương tự ta có

$$u(t+2) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+2} S_n(t) \tag{2.5.14}$$

Tổng quát

$$u(t+k) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+k} S_n(t) \tag{2.5.15}$$

Biến đổi Laplace của hàm $u(t)$ được cho bởi

$$\bar{u}(s) = \mathscr{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty u_n \int_0^\infty e^{-st} S_n(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right) \sum_{n=0}^\infty u_n \exp(-ns).$$

Do đó

$$\bar{u}(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right)\zeta(s), \qquad (2.5.16)$$

trong đó $\zeta(s)$ biểu diễn cho hàm *Dirichlet* được định nghĩa bởi

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^\infty u_n \exp(-ns). \qquad (2.5.17)$$

Do đó ta suy ra

$$u(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\bar{S}_0(s)\zeta(s)\right\} \qquad (2.5.18)$$

Đặc biệt

- Nếu $u_n = a^n$ là một dãy hình học thì

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^\infty \left(ae^{-s}\right)^n = \frac{1}{1 - ae^{-s}} = \frac{e^s}{e^s - a}. \qquad (2.5.19)$$

Do đó, từ $(2.5.16)$ ta nhận được

$$\mathscr{L}\left\{a^n\right\} = \bar{S}_0(s)\zeta(s) = \bar{S}_0(s)\frac{e^s}{e^s - a}, \qquad (2.5.20)$$

sao cho

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\bar{S}_0(s)\frac{e^s}{e^s - a}\right\} = a^n. \qquad (2.5.21)$$

- Nếu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(ae^{-s}\right)^{n}=\left(1-ae^{-s}\right)^{-2},$$

$(2.5.22)$

Ta có

$$\mathscr{L}\left\{(n+1)a^{n}\right\}=\overline{S}_{0}(s)\left(1-ae^{-s}\right)^{-2}=\frac{e^{2s}\overline{S}_{0}(s)}{\left(e^{s}-a\right)^{2}} \qquad (2.5.23)$$

Do đó

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}\overline{S}_{0}(s)}{\left(e^{s}-a\right)^{2}}\right\}=(n+1)a^{n} \qquad (2.5.24)$$

Từ $(2.5.22)$ ta thay $n=n-1$ ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\,a^{n}e^{-ns}=\frac{ae^{s}}{\left(1-ae^{-s}\right)^{2}} \qquad (2.5.25)$$

Do đó

$$\mathscr{L}\left\{na^{n}\right\}=\overline{S}_{0}(s)\frac{ae^{s}}{\left(e^{s}-a\right)^{2}}, \qquad (2.5.26)$$

sao cho

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{ae^{s}\overline{S}_{0}(s)}{\left(e^{s}-a\right)^{2}}\right\}=na^{n} \qquad (2.5.27)$$

Định lý 2.5.1

Nếu $\overline{u}(s)=\mathscr{L}\left\{u(t)\right\}$ thì

$$\mathscr{L}\left\{u(t+1)\right\}=e^{s}\left[\overline{u}(s)-u_{0}\overline{S}_{0}(s)\right], \quad u_{0}=u(0) \qquad (2.5.28)$$

Chứng minh

$$\mathscr{L}\left\{u(t+1)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}u(t+1)\,dt = e^s\int_1^\infty e^{-s\tau}u(\tau)\,d\tau$$
$$= e^s\left[\overline{u}(s) - \int_0^1 e^{-s\tau}u(\tau)\,d\tau\right]$$
$$= e^s\left[\overline{u}(s) - u_0\int_0^1 e^{-s\tau}\,d\tau\right] = e^s\left[\overline{u}(s) - u(0)\overline{S}_0(s)\right].$$

Tương tự ta có

$$\mathscr{L}\left\{u(t+2)\right\} = e^s\left[\mathscr{L}\left\{u(t+1)\right\} - u_1\overline{S}_0(s)\right]$$
$$= e^{2s}\left[\overline{u}(s) - u_0\overline{S}_0(s)\right] - e^s u_1\overline{S}_0(s)$$
$$= e^{2s}\left[\overline{u}(s) - \left(u_0 + u_1e^{-s}\right)\overline{S}_0(s)\right], \qquad u(1) = u_1 \qquad (2.5.29)$$

$$\mathscr{L}\left\{u(t+3)\right\} = e^{3s}\left[\overline{u}(s) - \left(u_0 + u_1e^{-s} + u_2e^{-2s}\right)\overline{S}_0(s)\right] \qquad (2.5.30)$$

Tổng quát hơn, nếu k là số nguyên thì

$$\mathscr{L}\left\{u(t+k)\right\} = e^{ks}\left(\overline{u}(s) - \overline{S}_0(s)\sum_{r=0}^{k-1}u_re^{-rs}\right) \qquad (2.5.31)$$

Ví dụ 2.5.1

Giải phương trình sai phân

$$\Delta u_n - u_n = 0, \qquad (2.5.32)$$

với điều kiện đầu $u_0 = 1$.

Phương trình $(2.5.32)$ tương đương với

$$u_{n+1} - 2u_n = 0 \qquad (2.5.33)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.5.33)$ ta được

$$\mathscr{L}\left\{u_{n+1}\right\} - 2\mathscr{L}\left\{u_n\right\} = 0,$$

Theo định lý 2.5.1 ta có

$$e^s\left[\overline{u}(s) - u_0\overline{S}_0(s)\right] - 2\overline{u}(s) = 0$$
$$\Leftrightarrow e^s\left[\overline{u}(s) - 1.\overline{S}_0(s)\right] - 2\overline{u}(s) = 0.$$
$$\Leftrightarrow \left(e^s - 2\right)\overline{u}(s) = e^s\overline{S}_0(s)$$

Do đó

$$\overline{u}(s) = \frac{e^s \overline{S}_0(s)}{e^s - 2}.$$

Lấy biến đổi Laplace ngược kết hợp với $(2.5.21)$ ta suy ra nghiệm là

$$u_n = 2^n$$

Ví dụ 2.5.2

Chứng minh rằng nghiệm của phương trình sai phân

$$\Delta^2 u_n - 2\Delta u_n = 0 \qquad (2.5.34)$$

là

$$u_n = A + B3^n, \qquad (2.5.35)$$

trong đó $A = \frac{1}{2}(3u_0 - u_1)$ và $B = \frac{1}{2}(u_1 - u_0)$.

Phương trình $(2.5.34)$ tương đương với

$$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n = 0.$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình trên ta được

$$\mathscr{L}\{u_{n+2}\} - 4\mathscr{L}\{u_{n+1}\} + 3\mathscr{L}\{u_n\} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2s}\left[\overline{u}(s) - \left(u_0 + u_1 e^{-s}\right)\overline{S}_0(s)\right] - 4e^s\left[\overline{u}(s) - u_0\overline{S}_0(s)\right] + 3\overline{u}(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{2s} - 4e^s + 3\right)\overline{u}(s) = \left[u_0\left(e^{2s} - 4e^s\right) + u_1 e^s\right]\overline{S}_0(s).$$

Suy ra

$$\overline{u}(s) = \overline{S}_0(s)\left[\frac{u_0\left(e^{2s} - 4e^s\right) + u_1 e^s}{\left(e^s - 1\right)\left(e^s - 3\right)}\right]$$

$$= \overline{S}_0(s)\left[\frac{Ae^s}{\left(e^s - 1\right)} + \frac{Be^s}{\left(e^s - 3\right)}\right] \qquad (2.5.36)$$

Ta có

$$\frac{u_0\left(e^{2s}-4e^s\right)+u_1e^s}{\left(e^s-1\right)\left(e^s-3\right)}=\frac{Ae^s}{\left(e^s-1\right)}+\frac{Be^s}{\left(e^s-3\right)}$$
$$\Leftrightarrow\frac{u_0\left(e^{2s}-4e^s\right)+u_1e^s}{\left(e^s-1\right)\left(e^s-3\right)}=\frac{Ae^s\left(e^s-3\right)+Be^s\left(e^s-1\right)}{\left(e^s-1\right)\left(e^s-3\right)}$$

Suy ra

$$u_0\left(e^{2s}-4e^s\right)+u_1e^s=Ae^s\left(e^s-3\right)+Be^s\left(e^s-1\right)$$
$$\Leftrightarrow u_0e^{2s}-\left(4u_0-u_1\right)e^s=\left(A+B\right)e^{2s}-\left(3A+B\right)e^s$$

Do đó ta có

$$\begin{cases}A+B=u_0\\3A+B=4u_0-u_1\end{cases}$$

Giải hệ này ta được ta có $A=\dfrac{1}{2}\left(3u_0-u_1\right)$, $B=\dfrac{1}{2}\left(u_1-u_0\right)$.

Thay A,B vào ta được$\left(2.5.36\right)$ ta được

$$\overline{u}\left(s\right)=\overline{S}_0\left(s\right)\left[\frac{\left(3u_0-u_1\right)e^s}{2\left(e^s-1\right)}+\frac{\left(u_1-u_0\right)e^s}{2\left(e^s-3\right)}\right].$$

Biến đổi Laplace ngược kết hợp với $\left(2.5.21\right)$ ta nhận được

$$u_n=A+B3^n.$$

Ví dụ 2.5.3

Giải phương trình sai phân

$$u_{n+2}-2\lambda u_{n+1}+\lambda^2u_n=0, \qquad \left(2.5.37\right)$$

với điều kiện ban đầu $u_0=0$ và $u_1=1$.

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $\left(2.5.36\right)$ ta được

$$e^{2s}\left[\overline{u}\left(s\right)-\left(u_0+u_1e^{-s}\right)\overline{S}_0\left(s\right)\right]-2\lambda e^s\left[\overline{u}\left(s\right)-u_0\overline{S}_0\left(s\right)\right]+\lambda^2\overline{u}\left(s\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e^{2s}\left[\overline{u}\left(s\right)-e^{-s}\overline{S}_0\left(s\right)\right]-2\lambda e^s\overline{u}\left(s\right)+\lambda^2\overline{u}\left(s\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(e^{2s}-2\lambda e^s+\lambda^2\right)\overline{u}\left(s\right)=e^s\overline{S}_0\left(s\right)$$

Suy ra

$$\overline{u}(s)=\frac{e^{s}\overline{S}_0(s)}{\left(e^{s}-\lambda\right)^2}.$$

Lấy biến đổi Laplace ngược ta nhận được nghiệm là

$$u_n=\frac{1}{\lambda}n\lambda^{n}=n\lambda^{n-1}.$$

Ví dụ 2.5.4

Giải phương trình vi sai phân

$$u'(t)=u(t-1),\qquad u(0)=1 \tag{2.5.38}$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.5.38)$ ta được

$$\begin{aligned}
&s\overline{u}(s)-u(0)=e^{-s}\left[\overline{u}(s)-u(0)\overline{S}_0(s)\right]\\
&\Leftrightarrow s\overline{u}(s)-1=e^{-s}\left[\overline{u}(s)-\overline{S}_0(s)\right]\\
&\Leftrightarrow \overline{u}(s)\left(s-e^{-s}\right)=1+\frac{e^{-s}}{s}\left(e^{-s}-1\right).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\overline{u}(s)&=\left\{\frac{1}{s-e^{-s}}-\frac{e^{-s}}{s\left(s-e^{-s}\right)}\right\}+\frac{e^{-2s}}{s\left(s-e^{-s}\right)}\\
&=\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}\left(1-\frac{e^{-s}}{s}\right)^{-1}\\
&=\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-3s}}{s^3}+\frac{e^{-4s}}{s^4}+\cdots+\frac{e^{-ns}}{s^n}+\cdots
\end{aligned}$$

Do

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^n}\right\}=\frac{(t-a)^{n-1}}{\Gamma(n)}H(t-a), \tag{2.5.39}$$

trong đó $\Gamma(n)$ là *hàmGamma* (Gamma function) được định nghĩa bởi tích phân

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-t}dt$$

và $\mathscr{L}\left\{t^{n-1}\right\} = \dfrac{\Gamma(n)}{s^n}$ $(s > 0)$ [Ví dụ A.1.1 – Trang 98]

Do đó

$$u(t) = 1 + \frac{(t-2)}{1!} + \frac{(t-3)^2}{2!} + \cdots + \frac{(t-n)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > n \tag{2.5.40}$$

Ví dụ 2.5.5

Giải phương trình vi sai phân sau

$$u'(t) - \alpha u(t-1) = \beta, \quad u(0) = 0 \tag{2.5.41}$$

Lấy biến đổi Laplace cho hai vế của phương trình $(2.5.41)$ ta được

$$s\bar{u}(s) - u(0) - \alpha e^{-s}\left[\bar{u}(s) - u(0)\bar{S}_0(s)\right] = \frac{\beta}{s}$$

$$\Leftrightarrow s\bar{u}(s) - \alpha e^{-s}\bar{u}(s) = \frac{\beta}{s}$$

$$\Leftrightarrow \left(s - \alpha e^{-s}\right)\bar{u}(s) = \frac{\beta}{s}.$$

Suy ra

$$\bar{u}(s) = \frac{\beta}{s\left(s - \alpha e^{-s}\right)} = \frac{\beta}{s^2}\left(1 - \frac{\alpha}{s}e^{-s}\right)^{-1}$$

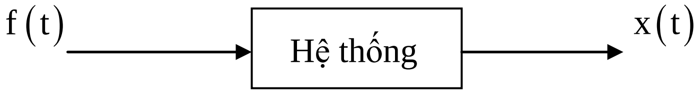
$$= \beta\left[\frac{1}{s^2} + \frac{\alpha e^{-s}}{s^3} + \frac{\alpha^2 e^{-2s}}{s^4} + \cdots + \frac{\alpha^n s^{-ns}}{s^{n+2}} + \cdots\right].$$

Theo công thức $(2.5.39)$ ta có

$$u(t) = \beta\left[t + \frac{\alpha(t-1)^2}{\Gamma(3)} + \alpha^2\frac{(t-2)^3}{\Gamma(4)} + \cdots + \frac{\alpha^n(t-n)^{n+1}}{\Gamma(n+2)}\right], \quad t > n.$$

2.6 Hàm chuyển và hàm đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính

Một hệ thống được gọi là *tuyến tính* (linear system) nếu có thể áp dụng nguyên lý xếp chồng. Nguyên lý xếp chồng phát biểu rằng đáp ứng tạo ra bởi những kích thích đồng thời là tổng của các đáp ứng riêng lẻ. Vì thế với hệ thống tuyến tính, đáp ứng với nhiều cửa vào có thể được xác định bằng cách xét đáp ứng của từng cửa vào sau đó cộng các đáp ứng lại với nhau.



Mô hình của một hệ thống tuyến tính

Một hệ thống tuyến tính được cho bởi một phương trình vi phân tuyến tính thông thường bậc n với hệ số hằng như sau

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = f(t), \qquad (2.6.1)$$

trong đó $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ là các hằng số và $a_n \neq 0$ với điều kiện đầu là

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1,\ ...\ , x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \qquad (2.6.2)$$

Nghiệm $x(t)$ của hệ thống $(2.6.1)-(2.6.2)$ được gọi là *hàm đầu ra* (output) và hàm số $f(t)$ đã cho được gọi là *hàm đầu vào* (input) của hệ thống.

Hàm chuyển (transfer function) $\bar{h}(s)$ của một hệ thống tuyến tính được định nghĩa là tỉ số giữa biến đổi Laplace của đại lượng đáp ứng ra $x(t)$ của hệ thống so với biến đổi Laplace của đại lượng tác động vào $f(t)$ của hệ thống với điều kiện đầu đồng nhất bằng 0, nghĩa là

$$\bar{h}(s) = \frac{\mathscr{L}\{x(t)\}}{\mathscr{L}\{f(t)\}} = \frac{\mathscr{L}\{output\}}{\mathscr{L}\{input\}}, \qquad (2.6.3)$$

$$x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (2.6.4)$$

Lấy biến đổi Laplace của $(2.6.1)$ với điều kiện đầu $(2.6.2)$ ta được

$$\begin{aligned} &a_n\left[s^n\,\bar{x}(s) - s^{(n-1)}x(0) - ... - x^{(n-1)}(0)\right] \\ &\quad + a_{n-1}\left[s^{n-1}\,\bar{x}(s) - s^{(n-2)}x(0) - ... - x^{(n-2)}(0)\right] \\ &\quad + ... + a_1\left[s\,\bar{x}(s) - x(0)\right] + a_0\,\bar{x}(s) = \bar{f}(s) \qquad (2.6.5) \end{aligned}$$

Tương đương,

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0\right)\overline{x}(s) = \overline{f}(s) + \overline{g}(s),$$

$$\Leftrightarrow \overline{p}_n(s)\overline{x}(s) = \overline{f}(s) + \overline{g}(s), \tag{2.6.6}$$

trong đó

$$\overline{p}_n(s) = \left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right) \tag{2.6.7}$$

là một đa thức bậc n, $\overline{g}(s)$ là đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng $(n-1)$ gồm tích khác nhau của các hệ số $a_r\left(r = 1, 2, \ldots, n\right)$ và các điều kiện đầu đã cho $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Hàm chuyển được kí hiệu bởi $\overline{h}(s)$ và định nghĩa bởi

$$\overline{h}(s) = \frac{1}{\overline{p}_n(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} \tag{2.6.8}$$

Do đó phương trình $(2.6.6)$ trở thành

$$\overline{x}(s) = \frac{\overline{f}(s)}{\overline{p}_n(s)} + \frac{\overline{g}(s)}{\overline{p}_n(s)} = \overline{h}(s)\left[\overline{f}(s) + \overline{g}(s)\right] \tag{2.6.9}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của $(2.6.9)$ ta nhận được hàm đáp ứng $x(t)$ của hệ thống, nó là sự xếp chồng của hai đáp ứng sau

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{h}(s)\overline{g}(s)\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{h}(s)\,\overline{f}(s)\right\} \\ &= \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \int_0^t h(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau \\ &= x_0(t) + x_1(t), \end{aligned}$$

trong đó

$$x_0(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{h}(s)\overline{g}(s)\right\}, \qquad x_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{h}(s)\,\overline{f}(s)\right\},$$

và

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{h}(s)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\overline{p}_n(s)}\right\},$$

thường được gọi là *hàm đáp ứng xung* (impulse response function) của hệ thống tuyến tính. Thật vậy, với $\overline{g}(s) = 0$ ta có

$$\bar{h}(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{f}(s)}.$$

Nếu $f(t) = \delta(t)$ là *hàm xung đơn vị* (unit impulse function) sao cho $\bar{f}(s) = 1$, khi đó hàm đầu ra là

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_0^t \delta(t-\tau)h(\tau)d\tau = h(t).$$

Ta thấy rằng đáp ứng xung của hệ thống chính là đáp ứng khi đầu vào hệ thống là hàm xung đơn vị.

Nếu hàm đầu vào $f(t) \equiv 0$, nghiệm của bài toán là $x_0(t)$, được gọi là *đáp ứng ngõ vào – zero của hệ thống*[4]. Nói cách khác, $x_1(t)$ là đáp ứng dựa vào hàm đầu vào $f(t)$ và được gọi là *đáp ứng trạng thái – zero của hệ thống*[5]. Nếu tất cả các điều kiện đầu đều bằng 0 nghĩa là $x_0 = x_1 = ... = x_{n-1} = 0$ thì $\bar{g}(s) = 0$ và do đó nghiệm duy nhất của phương trình không thuần nhất $(2.6.1)$ là $x_1(t)$.

Đa thức $\bar{p}_n(s) = \left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0\right)$ của s được gọi là *đa thức đặc trưng* (characteristic polynomial) của hệ thống và $\bar{p}_n(s) = 0$ được gọi là *phương trình đặc trưng của hệ thống* (characteristic equation of the system). Do các hệ số của $\bar{p}_n(s)$ là số thực nên nghiệm của phương trình đặc trưng tất cả đều là thực hoặc nếu phức nó phải xảy ra trong các cặp phức liên hợp. Nếu $\bar{h}(s)$ được biễu diễn ở dạng phân thức đơn giản, hệ thống được xem là *ổn định* (stable) khi tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng có phần thực âm.

Ví dụ 2.6.1

Giải phương trình vi phân sau

$$x''(t) - x'(t) = t \qquad (2.6.10)$$

---

[4]*Đáp ứng ngỏ vào – zero* của hệ thống là đáp ứng của hệ thống đối với đầu vào là zero.

[5]*Đáp ứng trạng thái – zero* của hệ thống là đáp ứng của hàm đầu vào với trạng thái ban đầu là zero.

với điều kiện đầu là

$$x(0)=1,\ x'(0)=1, \qquad (2.6.11)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.6.10)$ cùng với điều kiện đầu ta được

$$s^2\overline{x}(s)-sx(0)-x'(0)-\overline{x}(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow s^2\overline{x}(s)-\overline{x}(s)=s+1+\frac{1}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2-1\right)\overline{x}(s)=s+1+\frac{1}{s^2}$$

Do đó

$$\overline{x}(s)=\frac{s+1}{s^2-1}+\frac{1}{s^2\left(s^2-1\right)}$$

$$=\text{thành phần ngỏ vào}-\text{zero}+\text{thành phần trạng thái}-\text{zero}$$

$$=\frac{1}{s-1}+\left(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2}\right) \qquad (2.6.12)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của $(2.6.12)$ ta được

$$x(t)=e^t+\left(\sinh t-t\right)$$

$$=\text{đáp ứng ngõ vào}-\text{zero}+\text{đáp ứng trạng thái}-\text{zero}.$$

Ví dụ 2.6.2

Tìm hàm chuyển cho mỗi hệ thống tuyến tính dưới đây. Xác định bậc và tính ổn định của hệ thống.

(a) $x''(t)+2x'(t)+5x(t)=3f'(t)+2f(t)$ $\qquad (2.6.13)$

(b) $x'''(t)+x''(t)+3x'(t)-5x(t)=6f''(t)-13f'(t)+6f(t)$ $\qquad (2.6.14)$

a) Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình $(2.6.13)$ ta được

$$s^2\overline{x}(s)-sx(0)-x'(0)+2\left[s\overline{x}(s)-x(0)\right]+5\overline{x}(s)=3\left[s\overline{f}(s)-f(0)\right]+2\overline{f}(s)$$

Do các điều kiện ban đầu bằng 0 nên phương trình trên tương đương với

$$\left(s^2+2s+5\right)\overline{x}(s)=\left(3s+2\right)\overline{f}(s)$$

Do đó hàm chuyển là

$$\overline{h}(s)=\frac{\overline{x}(s)}{\overline{f}(s)}=\frac{3s+2}{s^2+2s+5}.$$

Hệ thống có bậc là hai và phương trình đặc trưng của nó là

$$s^2+2s+5=0,$$

với các nghiệm phức $s=-1\pm 2i$. Do phần thực các nghiệm của phương trình đặc trưng đều âm nên hệ thống là ổn định.

b) Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.6.14)$ cùng với điều kiện đầu zero ta được

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\left\{x'''(t)+x''(t)+3x'(t)-5x(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{6f''(t)-13f'(t)+6f(t)\right\}\\&\Leftrightarrow\left(s^3+s^2+3s-5\right)\overline{x}(s)=\left(6s^2-13s+6\right)\overline{f}(s)\end{aligned}$$

Do đó hàm chuyển là

$$\overline{h}(s)=\frac{\overline{x}(s)}{\overline{f}(s)}=\frac{\left(6s^2-13s+6\right)}{\left(s^3+s^2+3s-5\right)}$$

Ta có hệ thống bậc ba và phương trình đặc trưng

$$s^3+s^2+3s-5=0,$$

Có các nghiệm là $s_1=1, s_2=-1+2i, s_3=-1-2i$. Do $s_1=1>0$ nên hệ thống là không ổn định.

Ví dụ 2.6.3

Tìm hàm chuyển, hàm đáp ứng xung và nghiệm của hệ thống tuyến tính được mô tả bởi

$$x''(t)+2a\,x'(t)+\left(a^2+4\right)x(t)=f(t) \qquad (2.6.15)$$

$$x(0)=1,\quad x'(0)=-a \qquad (2.6.16)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của $(2.6.15)$ ta có

$$s^2\overline{x}(s)-sx(0)-x'(0)+2a\left[s\overline{x}(s)-x(0)\right]+\left(a^2+4\right)\overline{x}(s)=\overline{f}(s)$$

Do $x(0)=1,\ x'(0)=-a$ nên phương trình trên trở thành

$$s^2\overline{x}(s)-s+a+2as\overline{x}(s)-2a+\left(a^2+4\right)\overline{x}(s)=\overline{f}(s)$$
$$\Leftrightarrow \left(s^2+2as+a^2+4\right)\overline{x}(s)=(a+s)+\overline{f}(s)$$
$$\Leftrightarrow \overline{x}(s)=\frac{\overline{f}(s)+s+a}{s^2+2as+a^2+4}$$
$$\Leftrightarrow \overline{x}(s)=\frac{\overline{f}(s)+s+a}{(s+a)^2+2^2} \tag{2.6.17}$$

Theo công thức $(2.6.8)$, hàm chuyển của hệ thống là

$$\overline{h}(s)=\frac{1}{\left(s^2+2as+a^2+4\right)}=\frac{1}{(s+a)^2+2^2}.$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của hàm $\overline{h}(s)$ là hàm đáp ứng xung

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{h}(s)\right\}=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+a)^2+2^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-at}\sin 2t.$$

Giải bài toán giá trị đầu thuần nhất

$$x''(t)+2a\,x'(t)+\left(a^2+4\right)x(t)=0$$

Từ $(2.6.17)$ với $\overline{f}(s)=0$ ta có

$$\overline{x}(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+2^2}$$

Do đó

$$x_0(t)=e^{-at}\cos 2t$$

Nghiệm của bài toán $(2.6.15)-(2.6.16)$ là

$$\begin{aligned}x(t)&=x_0(t)+h(t)*f(t)\\&=e^{-at}\cos 2t+\frac{1}{2}\int_0^t f(t-\tau)e^{-a\tau}\sin 2\tau\,d\tau\end{aligned}$$

PHỤ LỤC. MỘT SỐ KIẾN THỨC ĐƯỢC SỬ DỤNG TRONG LUẬN VĂN

A. Các hàm đặc biệt

A.1 Hàm Gamma

Hàm Gamma được định nghĩa bởi tích phân sau

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad (x>0) \tag{A.1.1}$$

Một trong những tính chất quan trọng của hàm Gamma được rút ra từ định nghĩa đó là

$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1), \qquad x>1 \tag{A.1.2}$$

Chứng minh

Lấy tích phân từng phần của (A.1.1) ta được

$$\Gamma(x)=-t^{x-1}e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty}+(x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}dt \tag{A.1.3}$$

Ta thấy tích phân (A.1.3) hội tụ khi $x>1$ và do số hạng thứ nhất bên vế phải bằng 0 nên ta có

$$\Gamma(x)=(x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}dt=(x-1)\Gamma(x-1).$$

Đặt biệt

- Nếu n là số nguyên dương thì

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)\\&=\cdots=n(n-1)...(1)\Gamma(1),\end{aligned}$$

và

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

Do đó

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (A.1.4)$$

- Với $x = \dfrac{1}{2}$ thì ta có $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Thật vậy, theo định nghĩa ta có

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt.$$

Đặt $t = u^2$, khi đó

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du.$$

Ta xét tích phân sau

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \qquad (A.1.5)$$

Cho

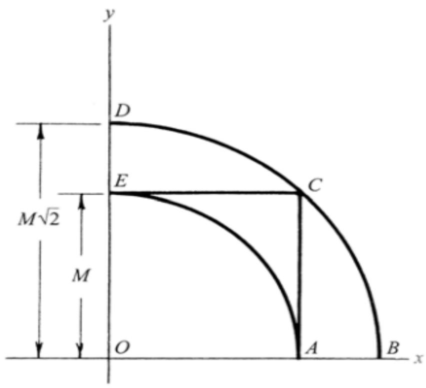
$I_M = \int_0^M e^{-x^2}dx = \int_0^M e^{-y^2}dy$ và $\lim\limits_{M\to\infty} I_M = I$ là giá trị của tích phân cần tìm. Khi đó,

$$\begin{aligned}
I_M^2 &= \left(\int_0^M e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^M e^{-y^2}dy\right)\\
&= \int_0^M\int_0^M e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\\
&= \iint\limits_{R_m} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy
\end{aligned}$$

trong đó R_m là hình vuông $OACE$ cạnh M (hình A.1). Do biểu thức dưới dấu tích phân là dương nên ta có

$$\iint\limits_{R_1} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy \le I_M^2 \le \iint\limits_{R_2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy, \qquad (A.1.6)$$

trong đó R_1, R_2 là miền bị chặn trong góc phần tư thứ nhất bởi các đường tròn có bán kính tương ứng là M và $M\sqrt{2}$.



Hình A.1

Sử dụng hệ tọa độ cực với $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi$ và từ (A.1.6), ta có

$$\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{M} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\phi \le I_M^2 \le \int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{M\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\phi \qquad (\text{A.1.7})$$

Tương đương

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-M^2}\right) \le I_M^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2M^2}\right) \qquad (\text{A.1.8})$$

Cho $M \to \infty$ trong (A.1.8) ta được

$$\lim_{M\to\infty} I_M^2 = I^2 = \frac{\pi}{4}$$

Do đó

$$I = \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Suy ra

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad (\text{A.1.9})$$

Ví dụ A.1.1

Nếu $a > -1$ là một số thực, thì

$$\mathscr{L}\left\{t^a\right\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \qquad (s > 0) \qquad (\text{A.1.10})$$

Theo định nghĩa ta có

$$\mathscr{L}\left\{t^a\right\} = \int_0^\infty t^a e^{-st} dt,$$

Đặt $st = x$,

$$\mathscr{L}\left\{t^a\right\} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty x^a e^{-x} dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}},$$

Ta thấy rằng ví dụ trên là mở rộng của ví dụ 1.1.3. Trường hợp của ví dụ 1.1.3 là trường hợp đặc biệt khi a là số dương.

Trường hợp đặc biệt $a = -\frac{1}{2}$, từ kết quả (A.1.10) ta có

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \text{ trong đó } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad (\text{A.1.11})$$

A.2 Hàm Dirac Delta

Xét hàm số sau

$$f_k(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & a \le t \le a+k \\ 0, & t \notin [a, a+k] \end{cases} \qquad (\text{A.2.1})$$

Trong vật lí, hàm này mô tả độ lớn của lực tác dụng là $1/k$ xảy ra trong khoảng thời gian $t = a$ đến $t = a + k$, trong đó k là một số dương rất bé. Tích phân của một lực tác dụng trong một khoảng thời gian $a \le t \le a + k$ được gọi là một xung lực.

Xung lực của f_k trong (A.2.1) là

$$I_k = \int_0^\infty f_k(t-a) dt = \int_a^{a+k} \frac{1}{k} dt = 1 \qquad (\text{A.2.2})$$

Bây giờ, cho $k \to 0$ và ta đặt

$$\delta(t-a) = \lim_{k \to 0} f_k(t-a),$$

Ta gọi $\delta(t-a)$ là hàm *Dirac Delta*.

Hàm Dirac Delta không phải là một hàm theo ý nghĩa thông thường trong tính toán bởi vì khi $k \to 0$ từ (A.2.1) và (A.2.2) ta nhận được

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases} \quad \text{và} \quad \int_0^\infty \delta(t-a)\,dt = 1.$$

Như đã biết trong tính toán một hàm số mà bằng 0 khắp nơi trừ đi một điểm thì tích phân của nó phải bằng 0. Tuy nhiên trong những vấn đề của xung lực thì ta xem nó là một hàm thông thường.

Để nhận được biến đổi Laplace của hàm $\delta(t-a)$ ta viết

$$f_k(t-a) = \frac{1}{k}\left[H(t-a) - H\{t-(a+k)\}\right]$$

Do đó

$$\mathscr{L}\{f_k(t-a)\} = \frac{1}{ks}\left[e^{-as} - e^{-(a+k)s}\right]$$
$$= e^{-as}\frac{1-e^{-ks}}{ks}$$

Cho $k \to 0$ và sử dụng qui tắc L'Hopital cho tỉ số bên phải của phương trình trên ta được

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}\lim_{k\to 0}\frac{1-e^{-ks}}{ks} = e^{-as} \qquad (\text{A.2.3})$$

Đặt biệt khi $a = 0$ ta nhận được *hàm xung đơn vị* $\delta(t)$ và

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1 \qquad (\text{A.2.4})$$

B. Một số định lý quan trọng

Định lý B.1

Nếu f là hàm liên tục từng khúc và

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \overline{f}(s)$$

hội tụ đều với mọi $s \in E \subseteq \mathbb{C}$ thì $\overline{f}(s)$ là hàm liên tục trên E.

Chứng minh

Do tích phân Laplace hội tụ đều nên với $\varepsilon > 0$ đã cho, tồn tại $t_0 > 0$ sao cho với mọi $\tau \geq t_0$,

$$\left| \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| < \varepsilon, \qquad (B.1.1)$$

với mọi $s \in E$.

Ta có

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt - \int_0^{\infty} e^{-s_0 t} f(t)\, dt \right| = \left| \int_0^{\infty} \left(e^{-st} - e^{-s_0 t} \right) f(t)\, dt \right|$$
$$\leq \int_0^{t_0} \left| e^{-st} - e^{-s_0 t} \right| \left| f(t) \right| dt + \left| \int_{t_0}^{\infty} \left(e^{-st} - e^{-s_0 t} \right) f(t)\, dt \right|.$$

Theo $(B.1.1)$ tích phân thứ hai thỏa

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} \left(e^{-st} - e^{-s_0 t} \right) f(t)\, dt \right| \leq \left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| + \left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-s_0 t} f(t)\, dt \right|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Đối với tích phân đầu tiên

$$\int_0^{t_0} \left| e^{-st} - e^{-s_0 t} \right| \left| f(t) \right| dt \leq M \int_0^{t_0} \left| e^{-st} - e^{-s_0 t} \right| dt$$

do f là hàm liên tục từng khúc nên bị chặn trên $[0, t_0]$.

Đặt $g(s,t) = e^{-st}$. Khi đó, $g(s,t)$ liên tục đều trên $[a,b] \times [0, t_0]$, với $[a,b] \subset E$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|s - s'| < \delta,\ \ |t - t'| < \delta$ và $s, s' \in [a,b] \subset E\ \ t, t' \in [0, t_0]$ thì

$$\left| g(s,t) - g(s',t') \right| = \left| e^{st} - e^{s't'} \right| < \frac{\varepsilon}{M t_0}$$

Với $s, s_0 \in [a,b], |s - s_0| < \delta$, ta có

$$\int_0^{t_0} \left| e^{-st} - e^{-s_0 t} \right| \left| f(t) \right| dt < M \frac{\varepsilon}{M t_0} t_0 = \varepsilon.$$

Do đó

$$\lim_{s\to s_0}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-s_0 t} f(t)\,dt.$$

Suy ra $\overline{f}(s)$ là hàm liên tục trên E.

Định lý B.2

Nếu $f(x,t)$ là hàm số liên tục trên mỗi hình chữ nhật $a \le x \le b, 0 \le t \le T$, $T > 0$ ngoại trừ hữu hạn các bước nhảy gián đoạn qua các đường thẳng $t = t_i$, $i = 1, 2, ..., n$ và nếu $\int_0^{\infty} f(x,t)\,dt$ hội tụ đều với mọi $x \in [a,b]$ thì

$$\int_a^b \int_0^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx = \int_0^{\infty} \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt \qquad \text{(B.1.2)}$$

Chứng minh

Ta có

$$\int_0^{\tau} \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_0^{\tau} f(x,t)\,dt\,dx$$

Do đó

$$\int_0^{\infty} \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_a^b \int_0^{\tau} f(x,t)\,dt\,dx \qquad \text{(B.1.3)}$$

Ta lại có

$$\int_a^b \int_0^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx = \int_a^b \int_0^{\tau} f(x,t)\,dt\,dx + \int_a^b \int_{\tau}^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx. \qquad \text{(B.1.4)}$$

Do $\int_0^{\infty} f(x,t)\,dt$ hội tụ đều nên với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại $T > 0$ sao cho với mọi $\tau \ge T$

$$\left|\int_{\tau}^{\infty} f(x,t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

với mọi $x \in [a,b]$. Do đó với $\tau \ge T$

$$\left|\int_a^b \int_{\tau}^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx\right| < \varepsilon,$$

nghĩa là

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_a^b\int_\tau^\infty f(x,t)\,dt\,dx = 0.$$

Cho $\tau \to \infty$ trong (B.1.4) và từ (B.1.3) ta được

$$\int_a^b\int_0^\infty f(x,t)\,dt\,dx = \int_0^\infty\int_a^b f(x,t)\,dx\,dt\,.$$

Chú ý

- Hàm f có bước nhảy gián đoạn tại điểm t_0 nếu cả hai giới hạn

  $$\lim_{t\to t_0^-} f(t) = f(t_0^-) \text{ và } \lim_{t\to t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$$

  tồn tại và $f(t_0^+) \neq f(t_0^-)$.

- Các giả thiết trong định lý thì cũng thỏa mãn cho hàm dưới dấu tích phân là $e^{-xt} f(t)$, trong đó $f(t)$ là hàm gốc.

Định lý B.3 (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Giả sử với mọi $x \in [b,\infty)$, với mọi $y \in Y$ ta có

$$|f(x,y)| \le g(x),$$

ở đây b là một số thực nào đó và $\int_a^\infty g(x)\,dx$ hội tụ. Khi đó tích phân $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ hội tụ đều trên Y.

Ta chấp nhận định lý này mà không chứng minh.

Định lý B.4

Giả sử rằng $f(x,t)$ và $\partial f(x,t)/\partial x$ là liên tục trên mỗi hình chữ nhật $a \le x \le b$, $0 \le t \le T, T > 0$ ngoại trừ hữu hạn các bước nhảy gián đoạn qua các đường thẳng $t = t_i, i = 1,2,...,n$ và hai tích phân

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,dt \text{ và } \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt, \qquad (\text{B.1.5})$$

trong đó tích phân thứ nhất hội tụ và tích phân thứ hai hội tụ đều. Khi đó

$$\frac{d}{dx}F(x)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt \qquad a\le x\le b. \tag{B.1.6}$$

Chứng minh

Đặt

$$G(u)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} f(u,t)\,dt.$$

Khi đó G là hàm liên tục [Định lý B.1 – Trang 100] và theo định lý B.2 ta có

$$\begin{aligned}\int_a^x G(u)\,du &= \int_a^x\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} f(u,t)\,dt\,du\\ &= \int_0^\infty\int_a^x \frac{\partial}{\partial u} f(u,t)\,du\,dt\\ &= \int_0^\infty \left[f(x,t)-f(a,t)\right]dt\\ &= F(x)-F(a)\end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x)=G(x)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt\,.$$

Định lý B.5

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-rt}\sin\left(a\sqrt{r}\right)\frac{dr}{r}=erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right), \qquad a>0$$

Chứng minh

Ta kí hiệu vế trái bởi $y(a,t)$ sao cho với $r=u^2$ ta có

$$y(a,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-tu^2}\sin au}{u}\,du.$$

Đạo hàm hai vế theo a ta được

$$\frac{\partial y}{\partial a}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-tu^2}\cos(au)\,du=\frac{2}{\pi}Y(a,t). \tag{B.1.7}$$

Khi đó

$$Y(a,t) = \int_0^\infty e^{-tu^2} \cos(au)\, du$$
$$= \left. \frac{e^{-tu^2} \sin au}{a} \right|_{u=0}^{\infty} + \frac{2t}{a} \int_0^\infty e^{-tu^2} u \sin(au)\, du$$
$$= -\frac{2t}{a} \frac{\partial Y}{\partial a},$$

Do đó

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = -\frac{a}{2t} Y, \tag{B.1.8}$$

và

$$Y(0,t) = \int_0^\infty e^{-tu^2} du = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}},$$

trong đó $x = u\sqrt{t}$.

Giải phương trình $(\mathrm{B}.1.8)$ ta được

$$Y(a,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

Do đó, từ $(\mathrm{B}.1.7)$ ta có

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

và do $y(0,t) = 0$ nên

$$y(a,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{\omega^2}{4t}} d\omega$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2} du = erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right), \tag{B.1.9}$$

trong đó $u^2 = \omega^2 / 4t$.

KẾT LUẬN

Để nhấn mạnh vai trò của biến đổi Laplace, ta hãy nhắc đến những ưu điểm chính của nó khi giải phương trình vi phân. Trước hết nó cho phép giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với vế phải là hàm gián đoạn hay hàm suy rộng. Một lợi thế nữa là dùng biến đổi Laplace ta giải trực tiếp phương trình không thuần nhất mà không qua việc giải phương trình thuần nhất rồi mới tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất như nhiều phương pháp khác. Cũng vậy, các bài toán điều kiện đầu sẽ được giải trực tiếp, không qua bước tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân rồi mới xác định hằng số để được nghiệm riêng.

Đặc biệt, phương trình đạo hàm riêng, phương trình tích phân, phương trình sai phân và vi sai phân cũng có thể giải bằng biến đổi Laplace mà ta thấy trong mục 2.2; mục 2.3; mục 2.4.

Bên cạnh đó, trong luận văn này chúng tôi cũng có giới thiệu đến các bài toán giá trị biên xuất hiện trong lý thuyết chuyển vị của dầm. Cuối cùng trong mục 2.6 chúng tôi đã đưa ra các khái niệm về hàm chuyển và đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính. Đây là các khái niệm thường gặp trong lý thuyết điều khiển tự động.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đặng Đình Áng, *Biến đổi Tích phân*, NXB Giáo Dục, 2007.

[2] Ravi P.Agarwal – Donal O'Regan, *Ordinary and Partial Differential Equations*, Springer, 2009.

[3] Wiliam A. Adkins – Mark G. Davidson, *Ordinary Differential Equations*, Springer, 2009.

[4] Alan M.Cohen, *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*, Springer, 2007.

[5] Lokenath Debnath – Dambaru Bhatta, *Integral Transforms and Their Applications*, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2007.

[6] P.P.Dyke, *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer, 1999.

[7] Steven J. Desjardins – Remi Vaillancourt, *Ordinary Differential Equations Laplace transforms and Numerical Methods for Engineers*, Springer, 2011.

[8] Gustav Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*, Springer, 1974.

[9] Phan Quốc Khánh, *Toán Chuyên Đề*, NXB Đại Học Quốc Gia TP.HCM, 2000.

[10] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons. Inc, 2011.

[11] A.D. Mykis, *Advanced Mathematics for Engineers Special Courses*, Mir Publishers Moscow, 1975.

[12] Peter V. O'Neil, *Advanced Engineering Mathematics*, Thomson, 2007.

[13] R. Pandey, *A Text Book of Engineering Mathematics (Volume II)*, Word - Press, 2010.

[14] Joel L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Springer, 1999.

[15] Nguyễn Công Tâm, *Phương trình Vật Lí – Toán Nâng Cao*, NXB Đại Học Quốc Gia TP.HCM, 2002.

[16] K.T. Tang, *Mathematical Method for Engineers and Scientist 2*, Springer, 2007.