TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC

TS. BÙI XUÂN DIỆU

Bài Giảng

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

(lưu hành nội bộ)

TẬP HỢP - LOGIC - ÁNH XẠ - SỐ PHỨC, MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH, KHÔNG GIAN VÉCTƠ, ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG - KHÔNG GIAN EUCLIDE

Tóm tắt lý thuyết, các ví dụ, bài tập và lời giải

Hà Nội - 2019

(bản cập nhật Ngày 22 tháng 9 năm 2019)

Tập Bài giảng vẫn đang trong quá trình hoàn thiện và có thể chứa những lỗi đánh máy, những lỗi kí hiệu và những chỗ sai chưa được kiểm tra hết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp ý kiến để tập Bài giảng được hoàn thiện. Mọi ý kiến đóng góp xin vui lòng gửi về địa chỉ "dieu.buixuan@hust.edu.vn"

Warning: This lecture notes have not been reviewed and may contain errors or typos. Use at your own risk.

Hà Nội, Ngày 22 tháng 9 năm 2019.

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

TẬP HỢP - LOGIC - ÁNH XẠ - SỐ PHỨC

§1. LOGIC

1.1 Các phép toán logic

1. Phép phủ định

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

$$\overline{A} = 1 - A$$

2. Phép hội

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$$(A \wedge B) = \min\{A, B\}$$

3. Phép tuyển

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$(A \vee B) = \max\{A, B\}$$

4. Phép kéo theo

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$(A \to B) = \max\{1 - A, B\}$$

5. Phép tương đương

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Chú ý: Để đơn giản về mặt kí hiệu, khi viết A chúng ta có thể hiểu là mệnh đề A hoặc giá trị chân lý của mệnh đề A tuỳ theo hoàn cảnh phù hợp. Ví dụ như viết $\overline{A} = 1 - A$ thì ta hiểu là giá trị chân lý của mệnh đề $\overline{A}$ bằng 1 trừ đi giá trị chân lý của A.

1.2 Các tính chất

1. Tính giao hoán:
   $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

2. Tính kết hợp
   $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C), (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

3. Tính phân phối
   $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

4. Tính chất của phép kéo theo
   $A \to B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$

5. Tính chất của phép tương đương
   $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

Chú ý: Để chứng minh các mệnh đề logic, ta sử dụng khái niệm tương đương logic, thay cho "khái niệm bằng nhau" của các mệnh đề. Bài tập chủ yếu trong bài này là chứng minh hai mệnh đề tương đương logic hoặc chứng minh một mệnh đề logic luôn đúng. Có ba phương pháp chủ yếu để làm bài:

1. Lập bảng các giá trị chân lý.

2. Biến đổi tương đương các mệnh đề.

3. Chứng minh bằng phản chứng.

1.3 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Ta thường cần phải phát biểu những mệnh đề có dạng "Mọi phần tử x của tập hợp X đều có tính chất $\mathcal{P}(x)$". Người ta quy ước kí hiệu mệnh đề này như sau:

$$\forall x \in X, \mathcal{P}(x)$$

Kí hiệu $\forall$ được gọi là *lượng từ phổ biến*, nó là cách viết ngược lại của chữ cái đầu tiên của từ "All" trong tiếng Anh.
Tương tự ta cũng hay gặp mệnh đề có dạng " Tồn tại một phần tử x của X có tính chất $\mathcal{P}(x)$". Mệnh đề này được quy ước kí hiệu như sau:

$$\exists x \in X, \mathcal{P}(x)$$

Kí hiệu $\exists$ được gọi là *lượng từ tồn tại*, nó là cách viết ngược lại của chữ cái đầu tiên của từ "Exist"trong tiếng Anh.
Mệnh đề " Tồn tại duy nhất một phần tử x của X có tính chất $\mathcal{P}(x)$" được viết như sau:

$$\exists! x \in X, \mathcal{P}(x)$$

Lượng từ phổ biến và tồn tại có mối quan hệ quan trọng sau đây:

$$\overline{\forall x \in X, \mathcal{P}(x)} \equiv \exists x \in X, \overline{\mathcal{P}(x)}$$

$$\overline{\exists x \in X, \mathcal{P}(x)} \equiv \forall x \in X, \overline{\mathcal{P}(x)}$$

Bài tập 1.1. Chứng minh các mệnh đề sau đây là đúng.

a) $\left[\overline{A} \wedge (A \vee C)\right] \to C$.

b) $[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$.

c) $[A \wedge (A \to B)] \to B$.

d) $[(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)] \to C$.

Chứng minh. a) **Cách 1: Lập bảng giá trị chân lý**

A	C	$\overline{A}$	$A \vee C$	$\overline{A} \wedge (A \vee C)$	$[\overline{A} \wedge (A \vee C)] \to C$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

Cách 2: Biến đổi tương đương các mệnh đề

$$
\begin{aligned}
&[\overline{A} \wedge (A \vee C)] \to C \\
\Leftrightarrow &[(\overline{A} \wedge A) \vee (\overline{A} \wedge C)] \to C \\
\Leftrightarrow &[0 \vee (\overline{A} \wedge C)] \to C \\
\Leftrightarrow &[(\overline{A} \wedge C)] \to C \\
\Leftrightarrow &\overline{\overline{A} \wedge C} \vee C \\
\Leftrightarrow &A \vee \overline{C} \vee C \\
\Leftrightarrow &1.
\end{aligned}
$$

Cách 3: Chứng minh bằng phản chứng.
Giả sử mệnh đề đã cho là sai. Vì mệnh đề kéo theo chỉ sai khi giả thiết đúng và kết luận sai nên: $\overline{A} \wedge (A \vee C) = 1$ và $C = 0$. Nhưng vì $C = 0$ nên $\overline{A} \wedge (A \vee C) = \overline{A} \wedge (A \vee 0) = \overline{A} \wedge A = 0$, mâu thuẫn, chứng tỏ mệnh đề đã cho luôn đúng.
Các câu $b), c), d)$ chứng minh tương tự. ■

Bài tập 1.2. Chứng minh rằng:

a) $A \leftrightarrow B$ và $(A \wedge B) \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right)$ là tương đương logic.

b) $(A \to B) \to C$ và $A \to (B \to C)$ không tương đương logic.

c) $\overline{A \leftrightarrow B}$ và $\overline{A} \leftrightarrow B$ là tương đương logic.

Chứng minh. Cũng giống như bài toán chứng minh một mệnh đề nào đó luôn đúng, bài toán chứng minh hai mệnh đề nào đó tương đương logic cũng có 3 phương pháp chứng minh như trên. Riêng với bài toán chứng minh hai mệnh đề không tương đương logic thì ta chỉ cần chỉ ra một bộ giá trị chân lý nào đó của các mệnh đề con mà ở đó hai mệnh đề đã cho có hai giá chị chân lý khác nhau. ■

Bài tập 1.3. Cho A là tập hợp con của tập số thực, cận dưới đúng x_0 của A kí hiệu $\mathrm{Inf}(A) = x_0$ có thể xác định bởi mệnh đề sau: " Với mọi x trong A có $x_0 \leq x$ và với x_1 có tính chất là $x_1 \leq x$ với mọi x trong A thì suy ra $x_1 \leq x_0$ ". Hãy dùng các kí hiệu để diễn tả mệnh đề trên và mệnh đề phủ định của nó. Từ đó đưa ra cách chứng minh một số không phải là $\mathrm{Inf}(A)$.

Chứng minh.

$$x_0 = \mathrm{Inf}(A) \Leftrightarrow [\forall x \in A, (x_0 \leq x)] \wedge [\forall x_1, (x_1 \leq x, \forall x \in A) \rightarrow (x_1 \leq x_0)]$$

$$\begin{aligned}
\overline{x_0 = \mathrm{Inf}(A)} &\Leftrightarrow \overline{[\forall x \in A, (x_0 \leq x)] \wedge [\forall x_1, (x_1 \leq x, \forall x \in A) \rightarrow (x_1 \leq x_0)]} \\
&\Leftrightarrow \overline{[\forall x \in A : (x_0 \leq x)]} \vee \overline{[\exists x_1, (x_1 \leq x, \forall x \in A) \rightarrow (x_1 \leq x_0)]} \\
&\Leftrightarrow [\exists x \in A, x_0 > x] \vee [\exists x_1, \overline{\overline{(x_1 \leq x, \forall x \in A)} \vee (x_1 \leq x_0)}] \\
&\Leftrightarrow [\exists x \in A, x_0 > x] \vee [\exists x_1, (x_1 \leq x, \forall x \in A) \wedge (x_1 > x_0)]
\end{aligned}$$

■

Bài tập 1.4. [Đề thi ĐS K49] Xét xem các mệnh đề sau có tương đương logic không

a) $(A \vee B) \rightarrow C$ và $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

b) $A \rightarrow (B \wedge C)$ và $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$

Bài tập 1.5. [Đề thi ĐS K49] Xét xem các mệnh đề sau đây là đúng hay sai

a) "Nếu các số thực x và y thoả mãn $x \geq y$ và $y \geq x$ thì suy ra $x = y$.

b) "Nếu số tự nhiên n lẻ và n^2 chẵn thì suy ra n là số nguyên tố.

Bài tập 1.6. [Đề thi ĐS K51] Cho $(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C)$ và $(A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$ là các mệnh đề đúng. Chứng minh $B \rightarrow C$ là mệnh đề đúng.

§2. TẬP HỢP

Tập hợp là một khái niệm *nguyên thủy*, không được định nghĩa, mà được hiểu một cách trực giác như sau: Một tập hợp là một sự quần tụ các đối tượng có cùng một thuộc tính nào đó, những đối tượng này được gọi là các phần tử của tập hợp đó.

2.1 Các phép toán trên tập hợp

1. Phép hợp
$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \\ x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \end{cases}$$
2. Phép giao
$$\begin{cases} x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \\ x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \notin B \end{cases}$$
3. Phép trừ
$$\begin{cases} x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B \\ x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \in B \end{cases}$$
4. Phép lấy phần bù
Nếu $A \subset X$ thì $\overline{A} = X \setminus A$ được gọi là phần bù của A trong X.

2.2 Các tính chất

1. Tính giao hoán:
$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2. Tính kết hợp
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Tính phân phối
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Tính chất của phép trừ
Nếu $A, B \subset X$ thì $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
5. Công thức De Moorgan
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\cap A_i} = \cup \overline{A_i}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{\cup A_i} = \cap \overline{A_i}$$

Bài tập chủ yếu trong bài này là chứng minh hai tập hợp bằng nhau hoặc chứng minh một tập hợp A là tập con của tập B. Có 3 phương pháp chứng minh chủ yếu:

1. Phương pháp phần tử
2. Phương pháp biến đổi tập hợp
3. Phương pháp chứng minh bằng phản chứng

Bài tập 1.7. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Kí hiệu

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0\}\,, B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) = 0\}\,.$$

Xác định tập nghiệm phương trình:

a) $f(x)g(x) = 0$ b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$

[Đáp số]

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

Bài tập 1.8. Cho 3 tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 4x + 3 \leq 0\right\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\quad |x-1| \leq 1\}$, $C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 5x + 6 < 0\right\}$. Xác định tập hợp sau: $(A \cup B) \cap C$ và $(A \cap B) \cup C$.

[Đáp số] $(A \cup B) \cap C = [0,3], (A \cap B) \cup C = [1,3]$

Bài tập 1.9. Cho A, B, C là các tập hợp bất kì, chứng minh

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

Chứng minh. a) **Cách 1: Phương pháp phần tử**

$\boxed{\Rightarrow}$ Giả sử $x \in A \cap (B \setminus C)$, ta có $x \in A$ và $x \in B \setminus C$. Suy ra $x \in A, x \in B, x \notin C$. Vì $x \in A$ và $x \in B$ nên ta có $x \in A \cap B$. Mặt khác $x \notin C \supset A \cap C$ nên $x \notin A \cap C$. Vậy $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Giả sử $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$, ta có $x \in A, x \in B$ và $x \notin A \cap C$. Do $x \notin A \cap C$ nên hoặc $x \notin A$ hoặc $x \notin C$. Nhưng vì $x \in A$ nên ta có $x \notin C$. Vì vậy ta có $x \in A \cap (B \setminus C)$.

Cách 2: Phương pháp biến đổi tập hợp

Coi $A, B, C \subset X$ nào đó. Khi đó

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [A \cap B \cap \overline{C}] = A \cap (B \setminus C)$$

b)

$$A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap X = A \cup B$$

Bài tập 1.10. [Đề thi ĐS K51] Cho các tập hợp A, B, C thoả mãn $(A \cup B) \subset (A \cup C)$ và $(A \cap B) \subset (A \cap C)$. Chứng minh $B \subset C$.

Bài tập 1.11. [Đề thi tín chỉ hè 2009] Cho A, B, C là các tập hợp bất kì. Chứng minh rằng

a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

§3. ÁNH XẠ

3.1 Định nghĩa

3.2 Tập ảnh, tập nghịch ảnh

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Giả sử $A \subseteq X, B \subseteq Y$.

1. Tập ảnh
   Kí hiệu $f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) | x \in A\}$.

2. Tập nghịch ảnh
   Kí hiệu $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$. Vì vậy ta có

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B}$$

3.3 Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ

1. Đơn ánh
   Ánh xạ f được gọi là đơn ánh nếu
   i) Với mọi $x_1 \neq x_2 \in X$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$ hoặc
   ii) Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$.

2. Toàn ánh
   Ánh xạ f được gọi là toàn ánh nếu $f(X) = Y$, hay với mỗi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Nói cách khác, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm* với mọi $y \in Y$.

3. Song ánh.
   Ánh xạ f được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh. Nói cách khác, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm duy nhất* với mọi $y \in Y$.

Bài tập 1.12. Cho hai ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $g(\mathbb{R})$

b) Xác định ánh xạ $h = g \circ f$.

Chứng minh. a) f là đơn ánh, không phải là toàn ánh, g không phải đơn ánh, cũng không phải là toàn ánh.

b) $g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ ■

Bài tập 1.13. Chứng minh các tính chất sau của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ $f : X \to Y$

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $A, B \subset X$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, $A, B \subset X$. Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $A, B \subset Y$

d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $A, B \subset Y$

e) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$, $A, B \subset Y$

f) Chứng minh f là đơn ánh khi và chỉ khi $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $\forall A, B \subset X$

Chứng minh. a) $\boxed{\Rightarrow}$ Giả sử $y \in f(A \cup B)$,khi đó tồn tại $x \in A \cup B$ sao cho $f(x) = y$. Vì $x \in A \cup B$ nên $x \in A$ hoặc $x \in B$.
Nếu $x \in A$ thì $y = f(x) \in f(A) \subset f(A \cup B)$ nên $y \in f(A \cup B)$
Nếu $x \in B$ thì $y = f(x) \in f(B) \subset f(A \cup B)$ nên $y \in f(A \cup B)$
Trong mọi trường hợp ta đều có $y \in f(A \cup B)$
$\boxed{\Leftarrow}$ Ta có $f(A) \subset f(A \cup B), f(B) \subset f(A \cup B)$ nên $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

b) Do $A \cap B \subset A$ nên $f(A \cap B) \subset f(A)$ và $A \cap B \subset B$ nên $f(A \cap B) \subset f(B)$. Vậy ta có $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Để chỉ ra phản ví dụ điều ngược lại không đúng ta xét ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ và $A = \{-1\}, B = \{1\}$. Khi đó $f(A \cap B) = \emptyset$ và $f(A) \cap f(B) = \{1\}$.

c)

$$x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \in A \\ f(x) \in B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in f^{-1}(A) \\ x \in f^{-1}(B) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

d)

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in A \\ f(x) \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(A) \\ x \in f^{-1}(B) \end{cases} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

e)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \setminus B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in A \\ f(x) \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(A) \\ x \notin f^{-1}(B) \end{cases} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \end{aligned}$$

f) Ta đã có $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Ngược lại, nếu $y \in f(A) \cap f(B)$ thì $y \in f(A)$ và $y \in f(B)$. Do đó tồn tại $x_1 \in A$ sao cho $f(x_1) = y$ và tồn tại $x_2 \in B$ sao cho $f(x_2) = y$. Vì f là đơn ánh nên $x_1 = x_2 \in A \cap B$. Vậy $y = f(x_1) \in f(A \cap B)$. ■

Bài tập 1.14. Cho hai ánh xạ $f : A \to C$ và $g : B \to D$. Ta xác định ánh xạ $h : A \times B \to C \times D$ bởi $h(a, b) = (f(a), g(b)), a \in A, b \in B$

a) Chứng minh f, g đơn ánh thì h đơn ánh.

b) Chứng minh f, g toàn ánh thì h toàn ánh.

c) Các mệnh đề đảo của $a), b)$ có đúng không?

[Gợi ý] Dựa vào định nghĩa đơn ánh và toàn ánh dễ dàng chứng minh được các khẳng định trên. Chú ý rằng các mệnh đề đảo của mệnh đề $a)$ và $b)$ vẫn đúng.

Bài tập 1.15. [Đề thi ĐS K51] Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 + 1, 2x_1 + x_2)$. Chứng minh f là một song ánh.

Bài tập 1.16. [Đề thi ĐS K51] Cho các tập hợp X, Y, Z và các ánh xạ $f : X \to Y, g : Y \to Z$. Giả thiết f toàn ánh, $g \circ f$ đơn ánh. Chứng minh g là đơn ánh.

Bài tập 1.17. [Đề thi ĐS K52] Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2) = (4x_1, 5x_2)$. Chứng minh f là một song ánh. Xác định $f(A)$ với $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 9\}$.

§4. CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

4.1 Cấu trúc nhóm

Giả sử G là một tập hợp. Mỗi ánh xạ

$$\circ : G \times G \to G$$

được gọi là một *phép toán hai ngôi* (hay một *luật hợp thành*) trên G. Ảnh của cặp phần tử (x, y) được kí hiệu là $x \circ y$.

Định nghĩa 1.1. *Một nhóm là một tập hợp khác rỗng G được trang bị một phép toán hai ngôi $\circ$ thoả mãn ba điều kiện sau đây:*

(G1) *Phép toán có tính chất kết hợp:*

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in G$$

(G2) *Có một phần tử $e \in G$, được gọi là* phần tử trung lập *hay* phần tử trung hoà *với tính chất*

$$x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G$$

(G3) *Với mọi $x \in G$ tồn tại phần tử $x' \in G$ được gọi là* nghịch đảo *của x sao cho*

$$x \circ x' = x' \circ x = e$$

Nhóm G được gọi là nhóm giao hoán *hay* abel *nếu phép toán có tính chất giao hoán:*

$$x \circ y = y \circ x \forall x, y \in G.$$

Một số tính chất

1) Phần tử trung lập e là duy nhất.

2) Phần tử nghịch đảo x' của x là duy nhất.

3) Luật giản ước $\begin{cases} x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z, \\ x \circ z = y \circ z \Rightarrow x = y. \end{cases}$

Ví dụ 4.1 (Giữa kì, 20173). *Cho $G \neq \emptyset$ cùng với phép toán hai ngôi $*$ là một nhóm thỏa mãn $x * x = e$ với mọi $x \in G$, ở đó e là phần tử trung hòa của G. Hỏi $(G, *)$ có phải là môt nhóm giao hoán không? Vì sao?*

[Lời giải] Một mặt,
$$e = (x * y) * (x * y) = x * (y * x) * y.$$
Mặt khác,
$$e = e * e = (x * x) * (y * y) = x * (x * y) * y.$$
Do đó,
$$x * (y * x) * y = x * (x * y) * y \Rightarrow y * x = x * y, \forall x, y \in G \quad \text{(theo luật giản ước)}$$
Kết luận: $(G, *)$ là một nhóm giao hoán.

4.2 Cấu trúc vành

Định nghĩa 1.2. *Một vành là một tập hợp $R \neq \emptyset$ được trang bị hai phép toán hai ngôi, gồm phép cộng*
$$+ : R \times R \to R, (x, y) \mapsto x + y$$
và phép nhân
$$. : R \times R \to R, (x, y) \mapsto xy,$$
thoả mãn ba điều kiện sau:

(R1) *R là một nhóm abel với phép cộng.*

(R2) *Phép nhân có tính chất kết hợp:*
$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in R$$

(R3) *Phép nhân phân phối từ hai phía đối với phép cộng:*
$$\begin{aligned}(x+y)z &= xz + yz\\ z(x+y) &= zx + zy, \forall x, y, z \in R\end{aligned}$$

Vành R được gọi là giao hoán *hay* abel *nếu phép nhân có tính chất giao hoán:*
$$xy = yx \forall x, y \in R.$$
Vành R được gọi là có đơn vị nếu phép nhân có đơn vị, tức tồn tại phần tử $1 \in R$ sao cho
$$1x = x1 = x \forall x \in R.$$

Quy ước: Để thuận tiện về mặt kí hiệu, phần tử trung hoà của phép cộng sẽ được kí hiệu là 0, nếu vành có đơn vị thì phần tử đơn vị sẽ được kí hiệu là 1.

4.3 Cấu trúc trường

Định nghĩa 1.3. *Một vành giao hoán có đơn vị* $1 \neq 0$ *sao cho mọi phần tử khác 0 trong nó đều khả nghịch được gọi là một* trường.

4.4 Bài tập

Bài tập 1.18. Cho $X = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{-1}{3}\right\}$, trong đó $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ. Trên X ta định nghĩa phép toán $\times$ như sau:

$$\forall x, y \in X, \quad x \times y = x + y + 3xy.$$

a) $(X, \times)$ có là nhóm abel không? Tại sao?.

b) $(\mathbb{Q}, \times)$ có là nhóm không? Tại sao?

Bài tập 1.19. Cho $G\{1, 2\}$, trên G ta định nghĩa các phép toán như sau:

$$1 + 1 = 1, 1 + 2 = 2, 2 + 1 = 2, 2 + 2 = 1$$

Chứng minh rằng $(G, +)$ là một nhóm.

Bài tập 1.20. Cho $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ là tập các ánh xạ từ $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ xác định như sau:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{1-x}, f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}, f_4(x) = \frac{1}{x}, f_5(x) = 1 - x, f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

Chứng minh G cùng với phép toán là phép hợp thành tích ánh xạ lập thành một nhóm không abel.

Chứng minh. G0) Để kiểm tra một tập hợp cùng với các phép toán nào đó có phải là một cấu trúc đại số hay không, trước hết phải kiểm tra xem các phép toán trên tập hợp đó có phải là phép hợp thành không (có phải là phép toán đóng không), rồi sau đó mới đi kiểm tra các tiên đề của cấu trúc đại số đó. Đối với các tập hợp có hữu hạn phần tử người ta thường kiểm tra tính đóng của phép toán bằng phương pháp lập bảng.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

Nhìn vào bảng ta thấy phép hợp thành ánh xạ là phép toán đóng trên tập G.

G1) Phép hợp thành các ánh xạ có tính chất kết hợp.

G2) Phần tử trung hoà: f_1

G3) Phần tử đối:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Phần tử đối	f_1	f_3	f_2	f_4	f_5	f_6

Hơn nữa $f_4 \circ f_2 = f_5 \neq f_6 = f_2 \circ f_4$ nên G là một nhóm không abel. ■

Bài tập 1.21. Các tập sau với các phép toán thông thường có lập thành một vành, trường không?

a) Tập các số nguyên lẻ.

b) Tập các số nguyên chẵn.

c) Tập các số hữu tỉ.

d) $X = \left\{a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) $Y = \left\{a + b\sqrt{3} \,|a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

Chứng minh. a) Tập các số nguyên lẻ không đóng với phép toán cộng nên không phải là một vành (trường).

b) Tập các số nguyên chẵn là một vành giao hoán nhưng không có đơn vị nên không phải là một trường.

c) Tập các số hữu tỉ là một trường.

d) $X = \left\{a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ là một vành giao hoán, có đơn vị 1, nhưng không phải là một trường vì $\sqrt{2} \in X$ không có phần tử đối.

e) $Y = \left\{a + b\sqrt{3} \,|a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ là một trường. Chú ý rằng

$$\frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} \in Y$$

§5. SỐ PHỨC

Chúng ta biết rằng phương trình $X^2 = 2$ không có nghiệm hữu tỉ đã dẫn đến nhu cầu xây dựng một trường số thực $\mathbb{R}$ như là một sự bổ sung của trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, nhằm tìm nghiệm cho phương trình đó.

Một cách tương tự, phương trình $X^2 + 1 = 0$ không có nghiệm thực dẫn đến một nhu cầu cần mở rộng trường số thực bằng cách xây dựng thêm những số mới, trường các số phức.

5.1 Dạng chính tắc của số phức

Giả sử rằng tồn tại một số nào đó, mà ta kí hiệu là i, thỏa mãn tính chất $i^2 = -1$. Điều này dẫn đến việc chấp nhận các số mới có dạng $a + bi$, ở đó a, b là các số thực. Sử dụng hệ thức $i^2 = -1$ ta có:

Các phép toán trên dạng chính tắc của số phức

1. Phép cộng, trừ
$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

2. Phép nhân
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

3. Phép chia
$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi).(c + di)^{-1} = (a + bi).\left(\frac{-a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i\right)$$

Tuy nhiên, vẫn còn một câu hỏi: **Vậy thực sự i là cái gì, và nó có tồn tại không?**

Để tránh tình trạng khó xử này ta đồng nhất số phức $a + bi$ với cặp số thực (a, b) và dẫn tới định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.4. *Một cặp có thứ tự hai số thực (a, b) được gọi là một số phức. Tập hợp tất cả các số phức được kí hiệu bởi $\mathbb{C}$,*

$$\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ta định nghĩa các phép toán trên số phức như sau

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mệnh đề sau có thể được chứng minh một cách hoàn toàn tương tự như việc chứng minh $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ là một trường ở Bài tập 1.21.

Định lý 1.5. *Tập hợp các số phức cùng với hai phép toán cộng và nhân định nghĩa như trên lập nên một trường.*

Phần tử trung lập của phép cộng là $0 = (0,0)$, phần tử đơn vị của phép nhân là $1 = (1,0)$, và quan trọng nhất,

$$i = (0,1) \Rightarrow i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) \equiv -1.$$

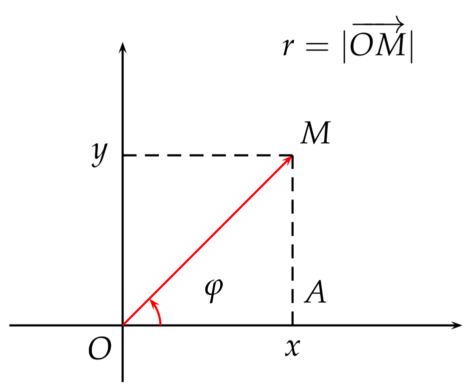
Như vậy, i thực sự tồn tại, nó chính là cặp có thứ tự $(0,1)$ và nó là "vật liệu" mới để xây dựng nên "ngôi nhà" số phức.

Mỗi số phức (a,b) khi đó có thể được viết dưới dạng

$$z = (a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi.$$

$z = a + bi$ được gọi là dạng chính tắc của số phức, $a = \operatorname{Re} z$ được gọi là phần thực của số phức và $b = \operatorname{Im} z$ được gọi là phần ảo của số phức.

5.2 Dạng lượng giác của số phức



Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm $M(a,b)$ trên mặt phẳng Oxy. Điểm M được gọi là ảnh của số phức z và (a,b) được gọi là toạ vị của số phức z. Khi đó đặt

$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM}| \\ \varphi = (Ox, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$$

Khi đó $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của số phức.

i) r được gọi là độ dài của số phức z, kí hiệu là $|z|$,

ii) φ được gọi là Argument của số phức, kí hiệu là $\operatorname{Arg} z$.

Các phép toán trên dạng lượng giác của số phức

1. Phép nhân

$$\text{Nếu } z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \text{ thì}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2.[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\text{Vậy } |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

2. Phép chia

$$\text{Nếu } z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \text{ thì}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$\text{Vậy } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

3. Phép luỹ thừa (Công thức Moirve)

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = r^n.(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\text{Vậy } |z^n| = |z|^n$$

4. Phép khai căn
   Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ thì $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}.\left[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right], k = \overline{0, n-1}$
   Nhận xét rằng mỗi số phức $z \neq 0$ đều có n số căn bậc n khác nhau.

5.3 Số phức liên hợp

Cho số phức $z = a + bi$, số phức $\overline{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số phức z. Ở dạng lượng giác, số phức liên hợp của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là $\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$. Một số tính chất của số phức liên hợp:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z + \overline{z} = 2a = 2\operatorname{Re} z$
3. $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
5. $|\overline{z}| = |z|$
6. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
7. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
8. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5.4 Bài tập

Bài tập 1.22. Viết các số phức sau dưới dạng chính tắc:

a) $(1+i\sqrt{3})^9$

b) $\sqrt[8]{1-i\sqrt{3}}$

c) $\frac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}$

d) $(2+i\sqrt{12})^5(\sqrt{3}-i)^{11}$

Chứng minh. Thông thường, ta nên chuyển các số phức về dạng lượng giác, rồi thực hiện các phép toán nhân, chia, luỹ thừa, khai căn, sau đó mới đưa kết quả về dạng chính tắc.

a)
$$(1+i\sqrt{3})^9 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^9 = -2^9$$

b) Ta có $(1-i\sqrt{3}) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$ nên
$$\sqrt[8]{1-i\sqrt{3}} = \left\{z_k = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{24}+k\frac{\pi}{4}\right)+i\sin(\left(\frac{-\pi}{24}+k\frac{\pi}{4}\right)\right], k=\overline{0,7}\right\}$$

c) Tương tự, $\frac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}} = 2^4 i$

d) $(2+i\sqrt{12})^5(\sqrt{3}-i)^{11} = (-2^{11})i$. ■

Bài tập 1.23. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $z^2+z+1=0$

b) $z^2+2iz-5=0$

c) $z^4-3iz^2+4=0$

d) $z^6-7z^3-8=0$

e) $\frac{(z+i)^4}{(z-i)^4}=1$

f) $z^8(\sqrt{3}+i)=1-i$

Bài tập 1.24. Chứng minh nếu $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ thì $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta, \forall n\in\mathbb{Z}$

Chứng minh. Với điều kiện $z\neq 0$ thì
$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Leftrightarrow z^2-2\cos\theta.z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=z_1=\cos\theta+i\sin\theta \\ z=z_2=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\end{array}\right.$$

Hơn nữa $z_1z_2=1$ nên
$$z^n+\frac{1}{z^n}=z_1^n+z_2^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+[\cos(-\theta+i\sin(-\theta)^n]=2\cos\theta$$

Bài tập 1.25. a) Tính tổng các căn bậc n của 1.

b) Tính tổng các căn bậc n của số phức z bất kỳ.

c) Cho $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, k=0,1,...,(n-1)$. Tính tổng $S=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k^m, (m\in\mathbb{Z})$.

Chứng minh. a) Gọi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ là các căn bậc n của 1. Các căn bậc n của đơn vị sẽ lập thành tập nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$ nên theo định lý Viet

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = 0$$

Ngoài ra

$$\sum_{0 \le i < j \le n-1} \varepsilon_i \varepsilon_j = 0, \quad \Pi_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = (-1)^{n-1}$$

b) Tương tự $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = 0$

c) $S = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n \not| m \\ n \text{ nếu } n | m \end{cases}$ ■

Bài tập 1.26. Cho phương trình $\frac{(x+1)^9 - 1}{x} = 0$.

a) Tìm các nghiệm của phương trình trên.

b) Tính môđun của các nghiệm.

c) Tính tích của các nghiệm từ đó tính $\prod\limits_{k=1}^{8} \sin \frac{k\pi}{9}$.

Chứng minh.

a) Phương trình $\frac{(x+1)^9 - 1}{x} = 0$ có 8 nghiệm là

$$x_k = -1 + \cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{9}\right), k = 1, 2, \ldots, 8$$

Chú ý rằng với $k = 0$ thì $x = 0 \notin$ TXD.

b) Ta có $|x_k| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{9}\right)$

c) Phương trình $\frac{(x+1)^9 - 1}{x} = \sum\limits_{i=1}^{9} C_9^i x^{i-1} = 0$ có 8 nghiệm là $x_k, k = 1, 2, \ldots, 8$ nên áp dụng định lý Viet ta có

$$\prod_{k=1}^{8} x_k = 9$$

Từ đó suy ra

$$\prod_{k=1}^{8} \sin \frac{k\pi}{9} = \frac{9}{2^8}$$

Bài tập 1.27. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $\overline{z^7} = \frac{1}{z^3}$ b) $z^4 = z + \overline{z}$.

Chứng minh. a) $\overline{z^7} = \frac{1}{z^3} \Rightarrow \overline{z^7}z^3 = 1 \Rightarrow |\overline{z^7}z^3| = 1 \Rightarrow |z|^{10} = 1 \Rightarrow |z| = 1$. Do đó $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}$. Từ đó $\overline{z^7} = \frac{1}{z^3} \Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow z = z_k = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}, k = 1, 2, 3$.

b) Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $z^4 = z + \overline{z} \Leftrightarrow (a+bi)^4 = (a+bi) + (a-bi)$. So sánh phần thực và phần ảo của hai vế ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^4 - 6a^2b^2 + b^4 = 2a \\ 4a^3b - 4ab^3 = 0 \end{cases}$$ ■

Giải hệ phương trình trên ta được các nghiệm của phương trình là

$$z_1 = 0, z_2 = \sqrt[3]{2}, z_3 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i, z_4 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i$$

Bài tập 1.28. Cho x, y, z là các số phức có môđun bằng 1. So sánh môđun của các số phức $x + y + z$và $xy + yz + zx$.

Chứng minh. Do $|z| = |y| = |z| = 1$ nên $x\overline{x} = y\overline{y} = z\overline{z} = 1$. Do đó

$$|xy + yz + zx| = |xyz\overline{z} + yzx\overline{x} + zxy\overline{y}| = |xyz(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})| = |xyz|.|\overline{x+y+z}| = |x+y+z|$$

CHƯƠNG 2

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. MA TRẬN

1.1 Các phép toán trên ma trận

1. Phép cộng, trừ hai ma trận
2. Phép nhân ma trận với một số
3. Phép nhân hai ma trận
4. Ma trận chuyển vị

1.2 Các tính chất

1. $$\begin{cases} A+B=B+A \\ A+0=0+A=A \\ A+(-A)=(-A)+A=0 \\ (A+B)+C=A+(B+C) \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} k(A+B)=kA+kB \\ (k+h)A=kA+hA=A \\ k(hA)=(kh)A \\ 1.A=A \\ 0.A=0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} (A.B).C=A.(B.C) \\ A.I=I.A=A \\ \text{Chú ý rằng } AB\neq BA \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} A.(B+C)=AB+AC) \\ (A+B)C=AC+BC \\ (AB)C=A(BC) \\ k(BC)=(kB)C=B(kC) \end{cases}$$

5. $(AB)^t = B^t A^t$

Bài tập 2.1. Tìm ma trận X thoả mãn:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{2}X - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

[Đáp số]

a) $X = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 12 \\ -4 & 18 & 4 \\ -8 & -16 & 12 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính $f(A)$.

Chứng minh. Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(A) = 3A^2 - 2A + 5E &= 3\begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 13 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & -23 & 24 \\ -5 & 34 & 13 \\ 0 & 7 & 38 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Bài tập 2.3. Tính A^n với

a) $A = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

Chứng minh. a) Chứng minh $A^n = \begin{bmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{bmatrix}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ bằng phương pháp qui nạp.

b) Với $n=1$, $A^1 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

Với $n \geq 2$ ta viết $A = B + E$, với E là ma trận đơn vị cấp 3 và $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ta có $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^3 = 0$ nên $B^k = 0$ với mọi $k \geq 3$. Áp dụng công thức khai triển Newton:

$$A^n = (B + aE_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (aE_3)^{n-k} = C_n^0 (aE_3)^n + C_n^1 B (aE_3)^{n-1} + C_n^2 B^2 (aE_3)^{n-2}$$
$$= a^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + na^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(n-1)n}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{(n-1)n}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Nhận xét: Ta cũng có thể chứng minh câu b) bằng quy nạp như câu a). Tuy nhiên, muốn dùng phương pháp quy nạp ta cần dự đoán được kết quả của bài toán. Điều này không phải lúc nào cũng dễ làm. ■

Bài tập 2.4. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn:

a) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Chứng minh. a) Giả sử $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ta có $X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$.

Vậy:

$$\begin{cases} a^2+bc & =0 \\ ab+bd & =0 \\ ca+dc & =0 \\ cb+d^2 & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc & =0 \\ b(a+d) & =0 \\ c(a+d) & =0 \\ cb+d^2 & =0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ hoặc $X = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$ với a, b, c là các số thực tùy ý và $b \neq 0$

b) Tương tự như câu a), ma trận X có thể có các dạng sau:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 1-\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ ■

Bài tập 2.5. [Cuối kì, K60] Cho ma trận A vuông cấp 2016 thỏa mãn $A^TA = 0$. Chứng minh rằng $A = 0$.

Chứng minh. Cấp 2016 của ma trận không quan trọng. Đặt

$$A^T = (a_{ij})_{n\times n}, \quad A = (a_{ji})_{n\times n}, \quad B = (b_{ij})_{n\times n} = A^TA.$$

Khi đó, theo định nghĩa của phép nhân ma trận,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}.$$

Cho $i = j$ và lấy tổng từ 1 đến n ta được

$$0 = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \Rightarrow a_{ik} = 0 \forall i,k \Rightarrow A = 0.$$ ■

Theo chứng minh trên, thực chất, chỉ cần giả thiết

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}(A^TA) = 0$$

là đủ để kéo theo $A = 0$, ở đó $\mathrm{tr}(A^TA)$ là vết của ma trận A^TA, tức là tổng các phần tử ở trên đường chéo của nó. Xem thêm vết của ma trận ở Phụ lục A 5.

§2. ĐỊNH THỨC

2.1 Định nghĩa

2.2 Các tính chất của định thức

1. $\det A = \det A^t$

2. Công thức khai triển một định thức theo một hàng hay cột bất kì:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

   Ở đó M_{ij} là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j.

3. Một định thức có hai hàng (hay cột) bằng nhau thì bằng không.

4. Nếu đổi chỗ hai hàng (hay cột) của một ma trận thì định thức của nó đổi dấu

5. Nếu thêm vào một hàng (hay cột) một tổ hợp tuyến tính của các hàng (hay cột) khác thì định thức không đổi.

6. Một định thức có một hành (hay cột) bằng 0 thì bằng 0.

7. Nếu nhân các phần tử của một hàng (hay cột) với một số k thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với k.

8. Định thức của một ma trận tam giác bằng tích của các phần tử trên đường chéo.

9. $\det(AB) = \det A \det B$

2.3 Các phương pháp tính định thức

Để tính một định thức, có thể khai triển định thức theo một hàng hay cột nào đó để đưa định thức về định thức có cấp nhỏ hơn (tất nhiên nên chọn hàng hay cột nào có nhiều số 0 nhất), cũng có thể tìm cách biến đổi sơ cấp để đưa định thức về dạng đơn giản hơn (không nhất thiết phải đưa định thức về dạng định thức của ma trận tam giác, đôi khi chỉ cần đưa định thức về dạng đơn giản rồi khai triển định thức).

2.4 Ma trận nghịch đảo

1. Định nghĩa

Định nghĩa 2.1. *Cho A là một ma trận vuông cấp n, nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho*

$$AB = BA = I$$

thì ta nói ma trận A khả đảo (khả nghịch) và gọi B là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Ma trận nghịch đảo của ma trận A được kí hiệu là A^{-1}.

2. Sự duy nhất của ma trận nghịch đảo

Định lý 2.2. *Ma trận nghịch đảo của ma trận A nếu có thì duy nhất.*

3. Sự tồn tại của ma trận nghịch đảo

Định lý 2.3. *Cho ma trận A vuông cấp n, nếu $\det A \neq 0$ thì ma trận A khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó được tính theo công thức:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.C^T,$$

trong đó $C = [c_{ij}]$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

4. Ma trận nghịch đảo của tích hai ma trận

Định lý 2.4. *Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n khả nghịch. Khi đó AB cũng khả nghịch và*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

5. Các tính ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss-Jordan

   (a) Viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A.

   (b) Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A về ma trận đơn vị I, đồng thời tác động phép biến đổi sơ cấp trên ma trận I.

   (c) Khi A đã biến đổi thành I thì I trở thành ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Bài tập 2.6. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, $\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

[Đáp số]

a) 40

b) $acb + bac + bac - c^3 - b^3 - a^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

c) Do ε là căn bậc 3 của đơn vị nên $\begin{cases} \varepsilon^3 = 1 \\ 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix} = 1 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - 1 - \varepsilon^3 = -3.$$

Bài tập 2.7. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức để chứng minh:

a) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

Chứng minh. a)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} 2a_1 & a_1-b_1x & c_1 \\ 2a_2 & a_1-b_1x & c_2 \\ 2a_3 & a_1-b_1x & c_3 \end{vmatrix} (C_2+C_1\to C_1) \\
=2&\begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2 & a_1-b_1x & c_2 \\ a_3 & a_1-b_1x & c_3 \end{vmatrix} (C_1\times\frac{1}{2}) \\
=2&\begin{vmatrix} a_1 & -b_1x & c_1 \\ a_2 & -b_2x & c_2 \\ a_3 & -b_3x & c_3 \end{vmatrix} ((-1)C_1+C_2\to C_2) \\
=-2x&\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+ab+bc+ca \\ 1 & b & b^2+ab+bc+ca \\ 1 & c & c^2+ab+bc+ca \end{vmatrix} (C_2\times(a+b+c)+C_3\to C_3) \\
=&\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} (C_1\times(-ab-bc-ca)+C_3\to C_3)
\end{aligned}
$$

Chú ý: Nếu $a, b, c \neq 0$ thì ta có thể chứng minh như sau:

$$
\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & a^2 & abc \\ b & b^2 & abc \\ c & c^2 & abc \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}abc\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}
$$

c)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} 1 & a & a^3+a^2b+a^2c \\ 1 & b & b^3+b^2a+b^2c \\ 1 & c & c^3+c^2a+c^2b \end{vmatrix} (C_1 \times (-abc) + C_2 \times (ab+bc+ca) + C_3 \to C_3) \\
=&\begin{vmatrix} 1 & a & a^2(a+b+c) \\ 1 & b & b^2(a+b+c) \\ 1 & c & c^2(a+b+c) \end{vmatrix} \\
=&(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

■

Bài tập 2.8. Tính các định thức sau:

a) $A = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & a^2+c^2 \end{vmatrix}$

c) $C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

b) $B = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

d) $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$

Chứng minh. a) $A = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & a^2+c^2 \end{vmatrix} = a^3(c^2-b^2) + b^3(a^2-c^2) + c^3(b^2-a^2)$

b)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} a+b+c+d & b+a+c+d & c+d+a+b & d+c+b+a \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} (R_1+R_2+R_3+R_4) \\
=&(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \\
=&(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & a-d \end{vmatrix} (C_2-C_1, C_3-C_1, C_4-C_1) \\
=&(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix} \\
=&(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a+d-c-b & a+d-c-b & 0 \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix} (R_2+R_1) \\
=&(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a+d-c-b & 0 & 0 \\ d-c & a-d & b-c \\ c-d & b-c & a-d \end{vmatrix} (C_2-C_1) \\
=&(a+b+c+d)(a+d-c-b)\begin{vmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{vmatrix} \\
=&(a+b+c+d)(a+d-b-c)(a+b-d-c)(a+c-b-d)
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2-x^2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 9-x^2 \end{vmatrix} (C_2 \leftrightarrow C_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2-x^2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 9-x^2 \end{vmatrix} (R_2 \leftrightarrow R_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3-x^2 \end{vmatrix} (R_2 - 2R_1, R_3 - R_1, R_4 - 2R_1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= -3.(1-x^2)(4-x^2)$$

d)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} (H_1 - H_2, H_3 - H_4) \qquad \blacksquare$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -z \end{vmatrix} (C_1 - C_2, C_3 - C_4)$$

$$= x^2z^2$$

Bài tập 2.9. Chứng minh nếu A là ma trận phản xứng cấp n lẻ thì $\det(A) = 0$.

Chứng minh. Do $A^T = -A$ nên $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Vậy $\det A = 0$. ∎

Xem thêm về ma trân đối xứng, phản đối xứng và các tính chất của nó ở Phụ lục A4.

Hệ quả 2.5 (Cuối kì, K61). *Cho ma trận thực A vuông cấp 2017. Chứng minh rằng*

$$\det(A - A^T)^{2017} = 2017(\det A - \det A^T).$$

Chứng minh. Nhận xét rằng $\det A = \det A^T$ nên vế trái của đẳng thức trên,

$$2017(\det A - \det A^T) = 0.$$

Như vậy, chỉ cần chứng minh $\det(A - A^T)^{2017} = 0 \Leftrightarrow \det(A - A^T) = 0$. Thật vậy, đặt $B = A - A^T$ ta có $B^T = A^T - A = -B$ nên B là một ma trận phản xứng cấp 2017 lẻ. Theo Bài tập 2.9 thì $\det B = 0$. ∎

Hệ quả 2.6 (Giữa kì, 20163). *Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2017 thỏa mãn $AB + B^T A^T = 0$. Chứng minh rằng một trong hai ma trận có định thức bằng 0.*

Chứng minh. Ta có

$$AB + B^T A^T = 0 \Leftrightarrow AB + (AB)^T = 0 \Leftrightarrow AB = -(AB)^T.$$

Như vậy, AB là một ma trận phản xứng cấp 2017 lẻ nên $\det(AB) = \det A \det B = 0$. Suy ra điều phải chứng minh. ∎

Bài tập 2.10. Cho $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là ma trận phức sao cho $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$. Chứng minh $\det(A)$ là một số thực.

Chứng minh. Theo bài ra, $A^T = \bar{A}$, vì định thức của một ma trận là tổng các số hạng trong đó mỗi số hạng là tích các phần tử của ma trận đó, nên từ tính chất của số phức liên hợp, ta có $\det \bar{A} = \overline{\det A}$. Từ đó ta có

$$\overline{\det A} = \det \bar{A} = \det A^T = \det A \Rightarrow \det A \in \mathbb{R}.$$

Tính chất $\det \bar{A} = \overline{\det A}$ rất hay. Nó có thể được sử dụng để chứng minh kết quả sau.

Bổ đề 2.7. *Cho A, B là các ma trận thực vuông cùng cấp. Chứng minh rằng*

$$\det(A^2 + B^2) \geq 0.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\det(A^2+B^2) &= \det(A-i^2B) = \det(A+iB)\det(A-iB)\\ &= \det(A+iB)\overline{\det(A+iB)} = |\det(A+iB)|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

■

Bài tập 2.11. [Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc 2018 - Bảng B] Cho a là một số thực và n là một số nguyên dương. Xét ma trận vuông cấp n sau

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

Tính định thức của A_n trong các trường hợp

a) $n = 4$,

b) $n = 2018$.

[Lời giải] Khai triển theo cột thứ nhất ta được

$$\det A_n = a \det A_{n-1} + (-1)^n (n-1) \det B,$$

ở đó

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ a & \cdots & 0 & n-2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2}.$$

Do đó,

$$\det A_n = a \det A_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2} = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = a^n - \frac{1}{6}a^{n-2}(n-1)(2n-1).$$

Thay $n = 4$ và $n = 2018$ vào để lần lượt thu được kết quả

Bài tập 2.12. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hướng dẫn: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A có $\det A \neq 0$ thường tiến hành theo hai cách:
Cách 1: Dùng ma trận phụ hợp.
Tính $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ trong đó M_{ij} là ma trận có được từ A bằng cách bỏ đi hàng i cột j. Xây dựng ma trận phụ hợp $C = [c_{ij}]$. Khi đó $A^{-1} = \frac{1}{\det A}.C^T$.
Cách 2: Phương pháp Gauss-Jordan. Viết vào sau ma trận A ma trận đơn vị E để được ma trận $[A|E]$, sau đó sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng đưa ma trận trên về ma trận $[E|B]$. Khi đó, B là ma trận nghịch đảo A^{-1}. [Đáp số]

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Tổng quát, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

b) $B^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 2 & -21 & 11 \\ 1 & -12 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.13. Giải các phương trình ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} + X\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Hướng dẫn: Việc giải các phương trình ma trận cũng giống như việc giải các phương trình đại số, nhưng cần lưu ý phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán nên

$$\begin{cases} AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \\ XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} \end{cases}$$

Bài tập 2.14. a) Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình sau: $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$.

b) Chứng minh với A là ma trận vuông cấp 2 thì $A^k = 0, (k > 2) \Leftrightarrow A^2 = 0$.

Chứng minh. b) Nhận xét rằng ta chỉ cần chứng minh nếu $A^k = 0 (k > 2)$ thì $A^2 = 0$. Thật vậy,

$$(\det A)^k = \det A^k = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow ac - bd = 0.$$

Do đó từ câu a) ta có $A^2 + (a+d)A = 0 \quad (1)$.
Nếu $a + d = 0$ thì $(1) \Rightarrow A = 0$.
Nếu $a + d \neq 0$ thì $(1) \Rightarrow A^{k-2}[A^2 + (a+d)A] = 0 \Rightarrow (a+d)A^{k-1} = 0 \Rightarrow A^{k-1} = 0$. Tiếp tục quá trình như vậy ta được $A^k = A^{k-1} = ... = A^2 = 0$. ■

Bài tập 2.15. Chứng minh rằng ma trận A vuông cấp n thoả mãn $a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = 0, (a_0 \neq 0)$ thì A là ma trận khả nghịch.

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
&a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = 0 \\
\Leftrightarrow &a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A = -a_0 E \\
\Leftrightarrow &A\left(-\frac{a_k}{a_0}A^k - \frac{a_{k-1}}{a_0}A^{k-1} - \cdots - \frac{a_1}{a_0}E\right) = E
\end{aligned}$$

■

Do đó A là ma trận khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó là

$$A^{-1} = -\frac{a_k}{a_0}A^k - \frac{a_{k-1}}{a_0}A^{k-1} - \cdots - \frac{a_1}{a_0}E$$

2.5 Đọc thêm: Về định nghĩa của ma trận nghịch đảo

Chúng ta biết rằng phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán, nghĩa là về cơ bản thì $AB \neq BA$. Tuy nhiên, trong hầu hết các sách về Đại số tuyến tính, ma trận nghịch đảo được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.8. *Cho A là một ma trận vuông cấp n, nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho*

$$AB = BA = I$$

thì ta nói ma trận A khả đảo (khả nghịch) và gọi B là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Nếu đọc kĩ định nghĩa này thì độc giả sẽ thấy là việc đòi hỏi "$AB = BA$" không được "tự nhiên". Một số sách Đại số tuyến tính khác né tránh việc này bằng cách như sau:

Định nghĩa 2.9. *Cho A là một ma trận vuông cấp n, nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho*

i) $AB = I$ thì ma trận B được gọi là ma trận nghịch đảo phải của ma trận A.

ii) $BA = I$ *thì ma trận* B *được gọi là ma trận nghịch đảo trái của ma trận* A.

Bổ đề 2.10. *Ma trận nghịch đảo phải và nghịch đảo trái của* A*, nếu tồn tại, là trùng nhau.*

Chứng minh. Giả sử B là ma trận nghịch đảo phải của A và C là ma trận nghịch đảo trái của A, nghĩa là

$$AB = I, \quad CA = I.$$

Ta cần chứng minh $B = C$. Thật vậy,

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C \Rightarrow B = C.$$

■

Cách tiếp cận này tuy tránh được đòi hỏi $AB = BA$ nhưng vẫn còn một vấn đề nữa. Đó là việc yêu cầu ma trận A phải có cả nghịch đảo trái lẫn nghịch đảo phải (thì khi đó chúng trùng nhau). Chuyện gì xảy ra nếu chúng ta chỉ giả thiết rằng A có nghịch đảo phải, chẳng hạn. Thực tế là,

Định lý 2.11. *Cho* A, B *là các ma trận vuông cấp* n*. Nếu* $AB = I$ *thì* $BA = I$.

Chứng minh. Có nhiều cách chứng minh định lý này. Sau đây là một chứng minh "thuần túy" ma trận và "sơ cấp", bằng quy nạp.

1) Nếu $n = 1$, định lý là hiển nhiên, vì với hai số thực a, b ta luôn có $ab = ba$.

2) Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, ta cần chứng minh nó đúng với $n = k + 1$. Giả sử P, Q là các ma trận vuông cấp $k + 1$ như sau:

$$P = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} E & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & h \end{pmatrix},$$

ở đó

   i) A, E là các ma trận vuông cấp k,

   ii) b, f là các ma trận cỡ $k \times 1$ (đã được in đậm để tránh nhầm lẫn),

   iii) c, g là các ma trận cỡ $1 \times k$ và

   iv) $d, h \in \mathbb{R}$.

Khi đó,

$$PQ = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + \mathbf{b}\mathbf{g} & A\mathbf{f} + \mathbf{b}h, \\ \mathbf{c}E + d\mathbf{g} & \mathbf{c}\mathbf{f} + dh \end{pmatrix} = I_{(k+1)\times(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AE + \mathbf{b}\mathbf{g} & = I_{k\times k}, \quad (1) \\ A\mathbf{f} + \mathbf{b}h & = 0, \quad (2) \\ \mathbf{c}E + d\mathbf{g} & = 0, \quad (3) \\ \mathbf{c}\mathbf{f} + dh & = 1. \quad (4) \end{cases}$$

Ta cần chứng minh

$$QP = \begin{pmatrix} E & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA + \mathbf{f}\mathbf{c} & E\mathbf{b} + \mathbf{f}d \\ \mathbf{g}A + h\mathbf{c} & \mathbf{g}\mathbf{b} + hd \end{pmatrix} = I_{(k+1)\times(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} EA + \mathbf{f}\mathbf{c} & = I_{k\times k}, \quad (5) \\ E\mathbf{b} + \mathbf{f}d & = 0, \quad (6) \\ \mathbf{g}A + h\mathbf{c} & = 0, \quad (7) \\ \mathbf{g}\mathbf{b} + hd & = 1. \quad (8) \end{cases}$$

Từ đây bạn đọc có thể chứng minh (5), (6), (7), (8) bằng cách chia thành các bước nhỏ sau:

i) $d \neq 0$,

ii) $d = 0, h \neq 0$,

iii) $h = h = 0$. ■

2.6 Đọc thêm: Về một số phép nhân ma trận có tính giao hoán

Tính chất giao hoán của phép nhân một ma trận với ma trận nghịch đảo của nó, $AA^{-1} = A^{-1}A$

Tính chất giao hoán của phép nhân một ma trận với ma trận nghịch đảo của nó được sử dụng, chẳng hạn như trong bài tập sau.

Bài tập 2.16. Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $AB = A + B$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

[Lời giải] Ta có

$$A + B = AB \Rightarrow (A + I)(B + I) = I \Rightarrow (B + I)(A + I) = I.$$

Từ đó dẫn đến $BA = A + B = AB$.

Bài tập 2.17. [Mở rộng kết quả Bài tập 2.16] Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $AB = mA + nB$ với $m, n \in \mathbb{R}, m, n \neq 0$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

[Lời giải] Ta có

$$AB = mA + nB \Rightarrow (A - nI)(B - mI) = mnI \Rightarrow (B - mI)(A - nI) = mnI.$$

Từ đó dẫn đến $(A - nI)(B - mI) = (B - mI)(A - nI) \Rightarrow AB = BA$.

Bài tập 2.18. [Mở rộng kết quả Bài tập 2.17] Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $AB = mA + nA + pI$ với $m, n, p \in \mathbb{R}, p + mn \neq 0$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

Hệ quả 2.12 (Cuối kì, 20153). *Cho* 2 *ma trận thực* A *và* B *vuông cấp* n *thỏa mãn* $AB - A - B = 0$. *Chứng minh rằng* $AB^k = B^kA$ *với mọi* k *nguyên dương.*

Chứng minh. Áp dụng kết quả Bài tập 2.16 ta có $AB = BA$. Do đó,

$$AB^k = (AB)B^{k-1} = (BA)B^{k-1} = B(AB)B^{k-2} = B(BA)B^{k-2} = \cdots = B^kA.$$ ■

Tính chất giao hoán của phép nhân một ma trận với ma trận đơn vị

Chúng ta biết là, phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán, $AB \neq BA$. Điều này dẫn đến

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

và

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA.$$

Một cách tổng quát, công thức khai triển nhị thức Newton

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

sẽ đúng nếu $AB = BA$.

Tuy nhiên, $AI = IA$ với mọi ma trận A nên ta có bảy hằng đẳng thức đáng nhớ:

1) $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$,
2) $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I$,
3) $A^2 - I = (A-I)(A+I)$,
4) $(A+I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$,
5) $(A-I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I$,
6) $A^3 - I = (A-I)(A^2 + A + I)$,
7) $A^3 + I = (A+I)(A^2 - A + I)$.

Hãy xem các ví dụ sau đây.

Bài tập 2.19. [Cuối kì, Học kì 20163] Cho A là ma trận vuông thực cấp n thỏa mãn $A^2 + 2017I = 0$. Chứng minh $\det A > 0$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} A^2 + 2017I = 0 &\Rightarrow (A + \sqrt{2017}I)^2 = 2\sqrt{2017}A \\ &\Rightarrow [\det(A + \sqrt{2017}I)]^2 = (2\sqrt{2017})^n \det A \\ &\Rightarrow \det A \geq 0. \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} A^2 + 2017I = 0 \Rightarrow A^2 &= -2017I \\ &\Rightarrow (\det A)^2 = (-2017)^n \\ &\Rightarrow \det A \neq 0. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $\det A > 0$. ■

Bài tập 2.20. [International Mathematical Competition] Chứng minh rằng nếu A là một ma trận thực vuông thỏa mãn $A^3 = A + I$ thì $\det A > 0$.

Chứng minh. Ta chia lời giải thành 3 bước.

i) Trước hết,

$$\begin{aligned} A^3 = A + I &\Rightarrow A^3 - A = I \\ &\Rightarrow A(A-I)(A+I) = I \\ &\Rightarrow \begin{cases} \det A \det(A-I)\det(A+I) = 1 \\ \det A \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ngoài ra, từ $A^3 = A + I$ ta có $(\det A)^3 = \det(A+I)$ nên $\det A$ cùng dấu với $\det(A+I)$.

ii) Mặt khác,

$$\begin{aligned} A^3 = A + I &\Rightarrow A^3 - I = A \\ &\Rightarrow (A-I)(A^2 + A + I) = A \\ &\Rightarrow \det(A-I)\det(A^2 + A + I) = \det A. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Áp dụng Bổ đề 2.7 ta có

$$\det(A^2 + A + I) = \det\left[\left(A + \frac{I}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I\right)^2\right] \geq 0.$$

Nên từ (2.2) ta có $\det A$ cùng dấu với $\det(A-I)$.

iii) Như vậy, $\det A$ cùng dấu với $\det(A+I)$ và cùng dấu với $\det(A-I)$. Từ phương trình (2.1) ta có $\det A \det(A-I)\det(A+I) = 1$ nên $\det A > 0$. ■

§3. HẠNG CỦA MA TRẬN

3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.13. *Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A, kí hiệu $r(A)$ hay $\rho(A)$ hay $\operatorname{rank}(A)$.*

Từ định nghĩa ta có:

1) Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thì $\operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.

2) Nếu A là ma trận vuông cấp n thì A khả nghịch khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = n$.

3.2 Phương pháp tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp về hàng

Định nghĩa 2.14. *Ma trận bậc thang là ma trận có hai tính chất:*

1. *Các hàng khác không luôn ở trên các hàng bằng không*

2. *Trên hai hàng khác không thì phần tử đầu tiên khác không ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.*

Định lý 2.15. *Hạng của một ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó.*

Với định lý 2.15 đã cho, muốn tìm hạng của ma trận A chỉ cần áp dụng các phương pháp biến đổi sơ cấp trên hàng đề đưa A về ma trận bậc thang và đếm số hàng khác không của nó.

Bài tập 2.21. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$. Biến đổi $A \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ nên $r(A) = 4$.

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$. Biến đổi $B \to \ldots \to \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nên $r(B) = 2$.

3.3 Các tính chất của hạng của ma trận

Bổ đề 2.16 (Cuối kì, K61). *Nếu A, B là các ma trận vuông cấp $n \geq 1$ thì*

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B).$$

Chứng minh. Một chứng minh "thuần túy ma trận" của Bổ đề này là phức tạp. Thay vì đó, chứng minh thông qua ánh xạ tuyến tính dễ hơn nhiều. Xem chứng minh ở Hệ quả 4.12. ■

Định lý 2.17 (Bất đẳng thức Sylvester). *Cho A, B là các ma trận cỡ $m \times n$ và $n \times p$ tương ứng. Khi đó*

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \leq \operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$$

Định lý 2.18 (Bất đẳng thức Frobenius).

$$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(ABC)$$

Việc chứng minh các bất đẳng thức Sylvester và Frobenius "thuần túy ma trận" đòi hỏi các phép biến đổi trên ma trận khối, xem Phụ lục A6. Các chứng minh dựa vào ánh xạ tuyến tính độc giả có thể xem ở các Hệ quả 4.13, 4.15,4.14.

Định lý 2.19. *i) Nếu A là một ma trận thực thì*

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(AA^T) = \operatorname{rank}(A^T A).$$

ii) Nếu A là một ma trận phức, đặt $A^* = (\overline{A})^T$, tức là lấy liên hợp rồi chuyển vị của ma trận A. Khi đó

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A^*) = \operatorname{rank}(AA^*) = \operatorname{rank}(A^* A).$$

Chứng minh. Xem chứng minh ở Hệ quả 4.16. ■

Ví dụ 3.1 (Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc 2018 - Bảng A). *Cho ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 8 & 12 & -10 \end{pmatrix}.$$

a) Tính A^4.

b) Tìm số nguyên dương N nhỏ nhất sao cho $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1})$ với mọi $k \geq N$.

[Lời giải]

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -8 & -8 & 8 \\ -16 & -16 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{pmatrix} -16 & -16 & 16 \\ -32 & -32 & 32 \\ -64 & -64 & 64 \end{pmatrix}$.

b) Tính trực tiếp $\operatorname{rank}(A) = 2, \operatorname{rank}(A^2) = 1$ và

$$A^k = (-2)^k \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Do đó, $\operatorname{rank}(A^k) = 1$ với mọi $k \geq 2$. Kết luận: $N = 2$.

3.4 Bài tập

Bài tập 2.22. Cho A là một ma trận vuông cấp n. CMR tồn tại $k \leq n$ sao cho $r(A^k) = r(A^m)$ với mọi $m \geq k$. Nói riêng $r(A^n) = r(A^{n+1})$.

Bài tập 2.23. Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ thỏa mãn Cho $a_{ij} = x_i + y_j$. Chứng minh rằng $\operatorname{rank} A \leq 2$.

Bài tập 2.24. Cho A là một ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng nếu $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A$ thì $D = CA^{-1}B$.

Bài tập 2.25. Chứng minh rằng nếu A và B là các ma trận có cùng cỡ và $B^T A = 0$ thì $\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

Bài tập 2.26. Cho A và B là các ma trận vuông cấp lẻ. Chứng minh rằng nếu $AB = 0$ thì ít nhất một trong hai ma trận $A + A^T$ và $B + B^T$ là suy biến.

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

4.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Đó là hệ m phương trình đại số bậc nhất đối với n ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.3}$$

Nếu đặt $A = [a_{ij}]$ là ma trận hệ số của hệ và $b = [b_1 b_2 \dots b_m]^t$ là ma trận cột vế phải, $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^t$ là ma trận ẩn thì ta có dạng ma trận của hệ được viết đơn giản như sau

$$Ax = b$$

4.2 Hệ Cramer

Định nghĩa 2.20. *Hệ 2.3 gọi là hệ Cramer nếu* $m = n$ *và* $\det A \neq 0$

Định lý 2.21 (Định lý Cramer). *Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được tính bằng công thức* $x = A^{-1}b$*, tức là*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

trong đó A_j *là ma trận suy từ* A *bằng cách thay cột thứ* j *bởi cột vế phải* b*.*

4.3 Định lý Kronecker-Capelli

Định lý 2.22 (Định lý Kronecker-Capelli). *Hệ 2.3 có nghiệm khi và chỉ khi*

$$r\left(\overline{A}\right) = r(A),$$

trong đó $\overline{A}$ *là ma trận bổ sung tức là ma trận* A *thêm cột* b*,* $\overline{A} = [Ab]$*.*

Hệ quả 2.23.

1. *Nếu* $r\left(\overline{A}\right) \neq r(A)$ *thì hệ 2.3 vô nghiệm*
2. *Nếu* $r\left(\overline{A}\right) = r(A) = n$ *thì hệ 2.3 có nghiệm duy nhất*
3. *Nếu* $r\left(\overline{A}\right) = r(A) < n$ *thì hệ 2.3 có vô số nghiệm*

4.4 Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

B1. Viết ma trận A cạnh véctơ cột b ta được ma trận bổ sung $\overline{A}$.

B2. Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đề đưa ma trận A về ma trận bậc thang.

B3. Biện luận theo kết quả thu được.

Bài tập 2.27. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= -10. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 1. \end{cases}$

Chứng minh. a) Ta có $D = 7, D_x = 7, D_y = -7, D_z = 7$ nên hệ phương trình đã cho là hệ Cramer nên nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$

b) Tương tự như câu $a)$ với $D = 41, D_{x_1} = 41, D_{x_2} = -41, D_{x_3} = 41$ và nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$.

c) $r(A) = 2 \neq r(\overline{A}) = 3$. Hệ vô nghiệm.

d) Hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = \left(0, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)$.

e) Hệ có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = \left(-7t + \frac{7}{11}, -10t - \frac{1}{11}, 11t\right)$ với t là tham số. ■

Bài tập 2.28. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss.

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 6 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3 &= 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 &= -1. \end{cases}$

Hướng dẫn: Các phép biến đổi tương đương trên các phương trình của hệ tuyến tính tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp theo hàng trên ma trận $\bar{A}$. Hơn nữa, việc xác định tính có nghiệm hay vô nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính theo định lí Kronecker-Capelli, đòi hỏi phải tìm hạng của ma trận $\bar{A}$. Nội dung chính của phương pháp Gauss chính là việc sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để biến đổi ma trận $\bar{A}$ về dạng bậc thang, sau đó dùng định lí Kronecker-Capelli để xác định việc có nghiệm và mô tả các nghiệm của hệ phương trình.

Chứng minh. a) $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & -7 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 \end{array}\right]$

Vậy $r(A) = r(\overline{A}) = 4$. Do đó, hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 2, 0)$.

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Vậy $r(A) = 3 < 4$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số $\begin{cases} x_1 = 14\alpha \\ x_2 = 21\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases}$

c) $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$

Suy ra $r(A) = r(\overline{A}) = 2$, nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 3 tham số

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + 2m - 4n \\ x_2 = \frac{1}{6} + 5m - n + t \\ x_3 = 2t, \\ x_4 = 2n, \\ x_5 = 6m. \end{cases}$$

Bài tập 2.29. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - ax_2 + a^2x_3 = a \\ ax_1 - a^2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 - a^3x_3 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2-a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-a)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-a)x_3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$

Chứng minh. a) Ta có

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a^2 \end{array}\right]$$
$$\to \ldots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a-a^2 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 1-a & (1-a)(a+1)^2 \end{array}\right]$$

(i) Nếu $a \neq 1$, ta có $r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 4$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số $\begin{cases} x_1 = t - a - 1 \\ x_2 = t - a \\ x_3 = t \\ x_4 = (1+a)^2 - (a+2)t \end{cases}$

(ii) Nếu $a = 1$ thì $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Ta có $r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 4$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 3 tham số $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - \alpha - \beta - \gamma, \beta, \alpha, \gamma)$

b) Ta có $A = \begin{bmatrix} 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & 2-a \end{bmatrix}$, $\det A = (4-a)(1-a)^2$.

(i) Nếu $(4-a)(1-a)^2 \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

(ii) Nếu $a = 4$ thì $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Vì $r(A) = 2 < 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 1 tham số $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \alpha, \alpha)$

(iii) Nếu $a = 1$ thì $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Suy ra $r(A) = 1 < 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 2 tham số: $(x_1, x_2, x_3) = (-\alpha - \beta, \beta, \alpha)$.

c) Ta có $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ a & -a^2 & a & 1 \\ a & 1 & -a^3 & 1 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ 0 & 1+a^2 & -2a^3 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a(1-a^2) & 1-a^2 \end{array}\right]$

(i) Nếu $a \neq 0, \pm 1$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{1}{a} \end{cases}$

(ii) Nếu $a = 0$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ nên $r(A) = 2 \neq r(\overline{A}) = 3$, do đó hệ đã cho vô nghiệm.

(iii) Nếu $a = 1$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

nên $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$, hệ đã cho có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số $(x_1, x_2, x_3) = (1, \alpha, \alpha)$

(iv) Nếu $a = -1$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

nên $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$, hệ đã cho có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số $(x_1, x_2, x_3) = (1, -\alpha, \alpha)$

d) Ta có

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a)(a+1)^2 \end{array}\right] = B$$

(i) Nếu $a \neq 1, -2$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$, hệ có nghiệm duy nhất

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-1-a}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(1+a)^2}{a+2}\right)$$

(ii) Nếu $a = -2$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$, $r(A) = 2 < 3 = r(\overline{A})$, hệ đã cho vô nghiệm.

(iii) Nếu $a = 1$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 3$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số $(x_1, x_2, x_3) = (1 - \alpha - \beta, \beta, \alpha)$ ■

Bài tập 2.30. Tìm đa thức bậc 3 : $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thoả mãn $p(1) = 0, p(-1) = 4, p(2) = 5, p(-2) = -15$.

[Đáp số] $a = \frac{7}{3}, b = \frac{-7}{3}, c = \frac{-13}{3}, d = \frac{13}{3}$.

Bài tập 2.31. Cho phương trình ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 7 & 2a+1 \\ 3 & 9 & 4a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Giải phương trình khi $a = 0$.

b) Tìm a để phương trình có vô số nghiệm.

Chứng minh. a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -1 \\ 2 & 7 & 2a+1 & 2 \\ 3 & 9 & 4a & 1 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right]$

Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A}) < 3 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ■

Bài tập 2.32. [Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc 2018 - Bảng A]

a) Giả sử X, A là các ma trận vuông với hệ số thực thỏa mãn $X^2 = A$. Chứng minh rằng $AX = XA$.

b) Tìm số các ma trận vuông X với hệ số thực thỏa mãn $X^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

[Lời giải]

a) Ta có $XA = X^3 = AX$.

b) Giả sử $X = (x_{ij})_{3\times 3}$. Theo câu a) ta có $AX = XA$, ta được hệ phương trình của x_{ij}, rút gọn lại là

$$\begin{cases} x_{21} = x_{31} = x_{32} = x_{12} & = 0, \\ x_{22} + 6x_{23} - x_{33} & = 0, \\ x_{11} + 15x_{13} - x_{33} & = 0. \end{cases}$$

Kết hợp với $X^2 = A$ ta được $x_{11}^2 = 1, x_{22}^2 = 4, x_{33}^2 = 16$. Từ đó suy ra có tất cả $2^3 = 8$ ma trận thỏa mãn đề bài.

Bài tập 2.33. [Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc 2018 -Bảng B] Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Tính A^4.

b) Chứng minh rằng hai hệ phương trình sau có cùng tập hợp nghiệm trong $\mathbb{R}^4$,

$$Ax = 0, \qquad (A + A^2 + A^3 + A^4)x = 0.$$

[Lời giải]

a) $A^4 = 0$.

b) $Ax = 0 \Rightarrow (A + A^2 + A^3 + A^4)x = 0$. Ngược lại, nếu $(A + A^2 + A^3 + A^4)x = 0$ thì

$$(A + A^2 + A^3)x = 0 \Rightarrow (I + A + A^2)Ax = 0.$$

Vì $A^4 = 0$ nên $I = I - A^4 = (I - A)(I + A + A^2) \Rightarrow I + A + A^2$ là ma trận khả nghịch $\Rightarrow Ax = 0$.

CHƯƠNG 3

KHÔNG GIAN VÉCTƠ.

§1. KHÁI NIỆM

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.1. *Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là một* không gian véctơ *trên $\mathbb{R}$ nếu nó được trang bị hai phép toán gồm:*

a) Phép cộng véctơ

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta \end{aligned}$$

b) Phép nhân véctơ với vô hướng

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times V &\to V \\ (a, \alpha) &\mapsto a\alpha \end{aligned}$$

thoả mãn các tiên đề sau:

(V1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(V2) $\exists 0 \in V : 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha \forall \alpha \in V$

(V3) $\forall \alpha \in V, \exists \alpha' \in V : \alpha' + \alpha = \alpha + \alpha' = 0$

(V4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \forall \alpha, \beta \in V$

(V5) $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha \forall a, b \in \mathbb{R}, \alpha \in V$

(V6) $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta \forall a \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in V$

(V7) $a(b\alpha) = (ab)\alpha \forall a, b \in \mathbb{R}, \alpha \in V$

(V8) $1\alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in V$

Các phần tử của V được gọi là các véctơ, các phần tử của $\mathbb{R}$ được gọi là các vô hướng. Bốn tiên đề đầu nói rằng $(V, +)$ là một nhóm abel. Tiên đề $(V5, 6)$ nói rằng phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng véctơ và cộng vô hướng. Tiên đê $(V8)$ nói rằng phép nhân đã được chuẩn hoá.

1.2 Một số tính chất ban đầu của không gian véctơ

1.3 Bài tập

Bài tập 3.1. Tập V với các phép toán kèm theo có phải là không gian véctơ không?

a) $V = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ với các phép toán xác định như sau

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$k(x, y, z) = (|k| x, |k| y, |k| z)$$

b) $V = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ với các phép toán xác định như sau:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

$$k(x_1, x_2) = (x_1^k, x_2^k)$$

trong đó k là số thực bất kỳ

Chứng minh. a) V không phải là một không gian véctơ vì các phép toán cộng và nhân với vô hướng của V vi phạm tiên đề số 5.

$$(1 + (-1))(x, y, z) = 0 \neq 1(x, y, z) + (-1)(x, y, z) = 2(x, y, z)$$

b) Tập V đã cho là một không gian véctơ. ∎

§2. KHÔNG GIAN VÉCTƠ CON

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.2. *Cho V là một không gian véctơ, W là một tập con của V. Nếu W cùng với hai phép toán thừa hưởng từ V cũng là một không gian véctơ thì W được gọi là không gian véctơ con của V.*

2.2 Điều kiện cần và đủ để $W \subset V$ là không gian véctơ con

Định lý 3.3. *Tập con khác rỗng $W \subset V$ là không gian véctơ con của V nếu và chỉ nếu W khép kín với hai phép toán trên V, nghĩa là*

$$\begin{cases} \alpha + \beta \in W, & \forall \alpha, \beta \in W \\ a\alpha \in W, & \forall a \in \mathbb{R}, \alpha \in W \end{cases}$$

2.3 Không gian con sinh bởi một họ véctơ

Định nghĩa 3.4. *Cho V là một không gian véctơ. $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một họ các véctơ của V. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véctơ của S được gọi là bao tuyến tính của S, kí hiệu* $\operatorname{span}(S)$.

$$\operatorname{span}(S) = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots c_n v_n | c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

Định lý 3.5. $W = \operatorname{span}(V)$ *là một không gian véctơ con của V.*

2.4 Hệ sinh của một không gian véctơ

Định nghĩa 3.6. *Cho V là một không gian véctơ.$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một họ các véctơ của V. Nếu* $\operatorname{span}(S) = V$ *thi ta nói họ S sinh ra V hay không gian V sinh bởi họ S.*

2.5 Bài tập

Bài tập 3.2. Chứng minh các tập hợp con của các không gian véc tơ quen thuộc sau là các không gian véc tơ con của chúng:

a) Tập $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,|2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0\right\}$.

b) Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 (hệ số của x) của KGVT $P_n\,[x]$.

c) Tập các ma trận tam giác trên của tập các ma trận vuông cấp n.

d) Tập các ma trận đối xứng của tập các ma trận vuông cấp n.

e) Tập các ma trận phản xứng của tập các ma trận vuông cấp n.

f) Tập các hàm khả vi trong không gian các hàm số xác định trên $[a, b]$.

Bài tập 3.3. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Chứng minh:

a) $V_1 \cap V_2$ là KGVT con của V.

b) Cho $V_1 + V_2 := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$. Chứng minh $V_1 + V_2$ là KGVT con của V.

Chứng minh.

a) (i) Giả sử $x, y \in V_1 \cap V_2$. Khi đó $x, y \in V_1$ và $x, y \in V_2$. Vì V_1 và V_2 là các không gian véctơ con của V nên $x + y \in V_1$, và $x + y \in V_2$. Vậy $x + y \in V_1 \cap V_2$.

(ii) Tương tự nếu $x \in V_1 \cap V_2$ thì $kx \in V_1 \cap V_2$.

b) (i) Giả sử $x, y \in V_1 + V_2$. Khi đó $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ với $x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$. Khi đó $x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in V_1 + V_2$.

(ii) Tương tự, nếu $x \in V_1 + V_2$ thì $kx \in V_1 + V_2$. ■

Bài tập 3.4. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Ta nói V_1, V_2 là bù nhau nếu $V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Chứng minh rằng V_1, V_2 bù nhau khi và chỉ khi mọi véc tơ x của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = x_1 + x_2$, $(x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$.

Chứng minh. $\boxed{\Rightarrow}$ Vì $V = V_1 + V_2$ cho nên mỗi véctơ $x \in V$ có biểu diễn $x = x_1 + x_2 (x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$. Ta chỉ cần chứng minh biểu diễn này là duy nhất, thật vậy, giả sử $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ với $x_1, x_1' \in V_1, x_2, x_2' \in V_2$. Khi đó ta có $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$. Nhưng vì V_1, V_2 là các không gian véctơ con của V nên $x_1 - x_1' \in V_1, x_2' - x_2 \in V_2$. Do đó $x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$ Vậy $x_1 = x_1', x_2 = x_2'$ và ta có biểu diễn đã cho là duy nhất.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nếu mọi véc tơ x của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = x_1 + x_2$, $(x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$ thì đương nhiên $V = V_1 + V_2$. Ta chỉ cần chứng minh $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Thật vậy, giả sử $x \in V_1 \cap V_2$, khi đó

$$x = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{x}_{\in V_2} = \underbrace{x}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2}$$

Vì tính duy nhất của biểu diễn nên $x = 0$, hay $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. ■

Bài tập 3.5. Cho V là KGVT các hàm số xác định trên $[a, b]$. Đặt

$$V_1 = \{f(x) \in V \mid f(x) = f(-x), \forall x \in [a, b]\}, V_2 = \{f(x) \in V \mid f(x) = -f(-x), \forall x \in [a, b]\}$$

Chứng minh V_1, V_2 là bù nhau.

Chứng minh. Đương nhiên $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ (chú ý rằng véctơ 0 ở đây là hàm số đồng nhất bằng 0 trên $[a, b]$). Mặt khác với mỗi hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, b]$ bất kì, đặt

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

thì $g(x) \in V_1, h(x) \in V_2$ và $f(x) = g(x) + h(x)$, nghĩa là $V = V_1 + V_2$. Ta có điều phải chứng minh. ■

§3. CƠ SỞ VÀ TOẠ ĐỘ

3.1 Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 3.7 (Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính).

a) *Hệ* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *được gọi là* độc lập tuyến tính *nếu hệ thức*

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots a_n\alpha_n = 0$$

chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

b) *Hệ* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *được gọi là* phụ thuộc tuyến tính *nếu nó không độc lập tuyến tính.*

3.2 Cơ sở và số chiều của không gian véctơ

Định nghĩa 3.8. *Một hệ véctơ của V được gọi là một cơ sở của V nếu mỗi véctơ của V đều biểu thị duy nhất qua hệ này.*

Như vậy mỗi cơ sở đều là một hệ sinh.

Định lý 3.9. *Cho hệ véctơ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ của V. Khi đó S là một cơ sở của V khi và chỉ khi nó là một hệ sinh độc lập tuyến tính.*

Định nghĩa 3.10. *Không gian véctơ V được gọi là hữu hạn sinh nếu nó có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử.*

Định lý 3.11. *Giả sử $V \neq \emptyset$ là một không gian véctơ hữu hạn sinh. Khi đó V có một cơ sở gồm hữu hạn phần tử. Hơn nữa mọi cơ sở của V đều có số phần tử bằng nhau.*

Trên cơ sở định lý trên, ta đi đến định nghĩa sau

Định nghĩa 3.12. a) *Số phần tử của mỗi cơ sở của không gian véctơ hữu hạn sinh $V \neq \{0\}$ được gọi là* số chiều hay thứ nguyên *của không gian véctơ V, kí hiệu là* $\dim V$. *Nếu* $V = \{0\}$ *thì* $\dim V = 0$.

b) *Nếu V không có một cơ sở nào gồm hữu hạn phần tử thì nó được gọi là một không gian véctơ* vô hạn chiều.

Định nghĩa 3.13 (Toạ độ). *Bộ vô hướng $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ xác định bởi điều kiện $\alpha = \sum_i a_i\alpha_i$ được gọi là toạ độ của véctơ α trong cơ sở $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$*

3.3 Bài tập

Bài tập 3.6. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V, $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ là hệ sinh của V_1, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của V_2. Chứng minh $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của $V_1 + V_2$.

Chứng minh. Mỗi $x \in V_1 + V_2$ ta có $x = x_1 + x_2 (x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$. Vì $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ là hệ sinh của V_1, nên $x_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của V_2 nên $x_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$. Vậy

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$$

Vậy $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của $V_1 + V_2$. ∎

Bài tập 3.7. Trong KGVT V, cho hệ véctơ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

Chứng minh. Vì hệ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại ràng buộc tuyến tính không tầm thường

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n+1} u_{n+1} = 0$$

(i) Nếu $\lambda_{n+1} = 0$ thì $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$. Vì $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính nên từ ràng buộc tyến tính trên ta suy ra $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Điều này mâu thuẫn với $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ không đồng thời bằng 0.

(ii) Vậy $\lambda_{n+1} \neq 0$. Khi đó

$$u_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}} (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n)$$

Bài tập 3.8. Trong $\mathbb{R}^3$ xét xem các hệ véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 6, 7)$.

b) $v_1 = (4, -2, 6), v_2 = (-6, 3, -9)$.

c) $v_1 = (2, 3, -1), v_2 = (3, -1, 5), v_3 = (-1, 3, -4)$.

Chứng minh. a) Xét ràng buộc tuyến tính

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ $\{v_1, v_2\}$ độc lập tuyến tính.

b) Tương tự, hệ đã cho độc lập tuyến tính.

c) Xét ràng buộc tuyến tính

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 5\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho độc lập tuyến tính. ■

Bài tập 3.9. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,2), v_3 = (1,2,3)$ lập thành một cơ sở. Cho $x = (6,9,14)$, tìm toạ độ của x đối với cơ sở trên.

[Gợi ý] Ta đã biết $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ nên muốn chứng minh hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ ta chỉ cần chứng minh nó độc lập tuyến tính hoặc là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

§4. SỐ CHIỀU VÀ CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN CON SINH BỞI HỌ VÉCTƠ - HẠNG CỦA HỌ VÉCTƠ

4.1 Mở đầu

Giả sử V là một không gian véctơ và

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \subset V$$

Theo định lý 3.5 thì span$S$ là một không gian con của V. Hãy tìm số chiều và cơ sở của span$S$.

4.2 Hạng của một họ véctơ

Định nghĩa 3.14. *Xét họ $S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \subset V$. Số véctơ độc lập tuyến tính tối đa có thể rút ra từ họ S được gọi là hạng của họ S và kí hiệu là $r(S)$ hay $\rho(S)$.*

4.3 Cách tính hạng của một họ véctơ bằng biến đổi sơ cấp

Bổ đề 3.15. *Hạng của họ véctơ S bằng hạng của ma trận toạ độ của nó trong bất kì cơ sở nào của không gian V.*

Theo bổ đề 3.15 trên, muốn tìm hạng của họ véctơ S, chỉ cần tìm ma trận toạ độ của nó trong một cơ sở bất kì của V (thông thường ta chọn cơ sở chính tắc). Sau đó áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận đã cho về ma trận bậc thang.

4.4 Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi họ véctơ

Định lý 3.16. *Cho V là một không gian véctơ và $S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ là một họ các véctơ của V. Khi đó* $\dim \operatorname{span}(S) = r(S)$ *và mọi họ r véctơ độc lập tuyến tính rút từ S đều là một cơ sở của* $\operatorname{span}(S)$.

Chú ý: Có thể tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{span}(S)$ theo phương pháp sau, viết các tọa độ của các véctơ của S theo hàng, sau đó dùng phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận đã cho về dạng bậc thang. Khi đó một cơ sở của $\operatorname{span}(S)$ chính là các véctơ có toạ độ là các hàng khác không của ma trận bậc thang thu được.

4.5 Bài tập

Bài tập 3.10. Tìm cơ sở và số chiều của KGVT sinh bởi hệ véc tơ sau:

a) $v_1 = (2, 1, 3, 4), v_2 = (1, 2, 0, 1), v_3 = (-1, 1, -3, 0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $v_1 = (2, 0, 1, 3, -1), v_2 = (1, 1, 0, -1, 1), v_3 = (0, -2, 1, 5, -3), v_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Chứng minh. a) Ta có

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2H_3 + H_1]{2H_2 - H_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_3 - H_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vậy $r(\{v_1, v_2, v_3\}) = 3$ nên số chiều của không gian véctơ sinh bởi hệ véctơ đã cho là 3, và một cơ sở của nó chính là $\{v_1, v_2, v_3\}$ hoặc $\{(2, 1, 3, 4), (0, 3, -3, 2), (0, 0, 0, 6)\}$.

b) Tương tự

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy số chiều của không gian véctơ sinh bởi hệ véctơ đã cho là 2 và một cơ sở của nó là $\{(2, 0, 1, 3, -1), (0, -2, -1, -5, 3)\}$. ■

Bài tập 3.11. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ:

$$v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (0, 1, -1, 1), v_3 = (1, 1, 1, 2), v_4 = (0, 0, 1, 1).$$

Đặt $V_1 = \operatorname{span}(v_1, v_2), V_2 = \operatorname{span}(v_3, v_4)$.
Tìm cơ sở và số chiều của các KGVT $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Chứng minh. Chú ý rằng nếu $V_1 = \operatorname{span}(v_1, v_2), V_2 = \operatorname{span}(v_3, v_4)$ thì

$$V_1 + V_2 = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $\dim(V_1 + V_2) = 3$ và một cơ sở của nó là $\{(1,0,1,0),(0,1,-1,1),(0,0,1,1)\}$.
Giả sử $x \in V_1 \cap V_2$ thì $x = x_1v_1 + x_2v_2 = x_3v_3 + x_4v_4$. Từ đẳng thức $x_1v_1 + x_2v_2 = x_3v_3 + x_4v_4$ dẫn chúng ta tới hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

■

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp Gauss ta thấy hệ phương trình trên có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, t, t, -t), t \in \mathbb{R}$. Vậy $x = x_1v_1 + x_2v_2 = t(v_1 + v_2) = t(1,1,0,1)$.
Vậy $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ và một cơ sở của nó là $\{(1,1,0,1)\}$.
Chú ý:

$$\boxed{\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$$

Bài tập 3.12. Cho KGVT $P_3[x]$ tìm hạng của hệ véc tơ sau: $v_1 = 1 + x^2 + x^3$, $v_2 = x - x^2 + 2x^3$, $v_3 = 2 + x + 3x^3$, $v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3$.

Chứng minh. Nhận xét rằng hạng của hệ véctơ bằng hạng của ma trận toạ độ của nó trong bất kì cơ sở nào của không gian V nên

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy hạng của họ véctơ trên bằng 3 và một cơ sở của không gian véctơ sinh bởi nó là $\{1 + x^2 + x^3, x - x^2 + 2x^3, -x^2 - x^3\}$. ■

Bài tập 3.13. Xét tính chất độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, tìm hạng của các hệ véc tơ sau trong không gian các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$:

a) $1, 2\sin^2 x, 3\cos^2 x$.

b) $1, \sin 2x, \sin 3x$.

c) $1 + x^2, (1+x)^2, (2+x)^2$.

d) $e^x, e^{-x}, 1 + e^x, 2 + e^{-x}$.

Chứng minh. a) Hệ véctơ đã cho phụ thuộc tuyến tính vì có một ràng buộc không tầm thường

$$1 - \frac{1}{2}.\left(2\sin^2 x\right) - \frac{1}{3}.\left(3\cos^2 x\right) = 0$$

b) Giả sử có ràng buộc tuyến tính $\lambda_1.1 + \lambda_2.\sin 2x + \lambda_3.\sin 3x = 0$. Chú ý rằng véctơ không của không gian $C(\mathbb{R})$ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ là hàm số đồng nhất bằng 0 nên:

   (i) Cho $x = 0$ thì $\lambda_1 = 0$. Vậy ta có $\lambda_2.\sin 2x + \lambda_3.\sin 3x = 0$.

   (ii) Cho $x = \frac{\pi}{6}$ thì $\lambda_2 = 0$. Vậy ta có $\lambda_3.\sin 3x = 0$.

   (iii) Cho $x = \frac{\pi}{2}$ thì $\lambda_3 = 0$.

   Vậy hệ véctơ đã cho độc lập tuyến tính.

c) Hệ véctơ đã cho độc lập tuyến tính

d) Hệ véctơ đã cho độc lập tuyến tính ■

Bài tập 3.14. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Định lý 3.17. *Nếu A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $Ax = 0$ bằng n trừ đi hạng của A.*

§5. BÀI TOÁN ĐỔI CƠ SỞ

5.1 Đặt vấn đề

Trong không gian véctơ n chiều V giả sử có hai cơ sở

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ và } \mathcal{B}' = \left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right)$$

Kí hiệu $[v]_{\mathcal{B}} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^t$ là toạ độ cột của véctơ $v \in V$ trong cơ sở $\mathcal{B}$. Hãy tìm mối liên hệ giữa $[v]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$

5.2 Ma trận chuyển

Định nghĩa 3.18. *Nếu tồn tại ma trận P thoả mãn*

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \text{ với mỗi } v \in V$$

thì ma trận P được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Bổ đề 3.19. *Với mỗi cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ của V thì ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ tồn tại duy nhất và được xác định theo công thức*

$$P = \left[[e'_1]_{\mathcal{B}}[e'_2]_{\mathcal{B}} \ldots [e'_n]_{\mathcal{B}}\right]$$

Định lý 3.20. *Nếu P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$ thì*

(a) P khả đảo (tức là P không suy biến, $\det P \neq 0$)

(b) P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$

5.3 Bài tập

Bài tập 3.15. Trong $P_3[x]$ cho các véc tơ $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$.

a) Chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là một cơ sở của $P_3[x]$.

b) Tìm toạ độ của véc tơ $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở trên.

c) Tìm toạ độ của véc tơ $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ đối với cơ sở trên.

Bài tập 3.16. Cho KGVT $P_3[x]$ với cơ sở chính tắc $E = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ và cở sở khác $B = \left\{1, a + x, (a + x)^2, (a + x)^3\right\}$. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang B và ngược lại từ B sang E. Từ đó tìm tọa độ của véc tơ $v = 2 + 2x - x^2 + 3x^3$ đối với cơ sở B.

CHƯƠNG 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

§1. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1 Khái niệm

Định nghĩa 4.1. *Ánh xạ $T : V \to W$ từ không gian véctơ V tới không gian véctơ W được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu*

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$

(ii) $T(ku) = kT(u), \forall k \in \mathbb{R}, u \in V$

Một số tính chất ban đầu của ánh xạ tuyến tính:

Định lý 4.2. *Cho $T : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ V tới không gian véctơ W. Khi đó*

a) $T(0) = 0$.

b) $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$.

c) $T(u-v) = T(u) - T(v), \forall u, v \in V$.

1.2 Bài tập

Bài tập 4.1. Cho V là KGVT, $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{f : V \to R, f$ là ánh xạ tuyến tính$\}$. Giả sử V có cơ sở $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Xét tập hợp $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ trong đó $f_i(e_j) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$.
Chứng minh $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là cơ sở của V^*, được gọi là cơ sở đối ngẫu ứng với $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Chứng minh. Muốn chứng minh $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là một cơ sở của V^*, ta sẽ chứng minh nó là một hệ sinh của V^* và độc lập tuyến tính.

1. Chứng minh $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là một hệ véctơ độc lập tuyến tính.

   Giả sử có ràng buộc tuyến tính

   $$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0 \tag{1}$$

   Tác động hai vế lên véctơ e_1 ta được

   $$\lambda_1 f_1(e_1) + \lambda_2 f_2(e_1) + \ldots + \lambda_n f_n(e_1) = 0 \tag{2}$$

   Theo định nghĩa thì $f_1(e_1) = 1, f_2(e_1) = 0, \ldots, f_n(e_1) = 0$ nên từ (2) suy ra $\lambda_1 = 0$. Tương tự như vậy, nếu tác động hai vế của (1) lên e_2 ta được $\lambda_2 = 0, \ldots$, tác động hai vế của (1) lên e_n ta được $\lambda_n = 0$. Vậy $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, hệ véctơ đã cho độc lập tuyến tính.

2. Chứng minh $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là hệ sinh của V^*.

   Giả sử $f \in V^*$, khi đó $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ là các số thực xác định. Ta sẽ chứng minh

   $$f = f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \ldots + f(e_n)f_n$$

   Thật vậy, với mỗi $x \in V, x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$ thì

   $$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \ldots + \lambda_n f(e_n)$$

   Mặt khác

   $$\begin{aligned}
   &[f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \ldots + f(e_n)f_n]\,(x) \\
   =&[f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \ldots + f(e_n)f_n]\,(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n) \\
   =&\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i f(e_j) f_j(e_i) \\
   =&\sum_{i=j=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \\
   =&f(x)
   \end{aligned}$$

■

§2. HẠT NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 4.3. *Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ V tới không gian véctơ W. Khi đó*

$$\mathrm{Ker}(T) := \{x | x \in V, T(x) = 0\}$$

được gọi là hạt nhân của T.

$$\mathrm{Im}(T) := \{y | y \in W, \exists x \in V, T(x) = y\} = \{T(x) | x \in V\}$$

được gọi là ảnh của T.

2.1 Các tính chất của hạt nhân và ảnh

Định lý 4.4. *Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

(i) $\mathrm{Ker}(T)$ *là một không gian véctơ con của V.*

(ii) $\mathrm{Im}(T)$ *là một không gian véctơ con của W.*

Bổ đề 4.5. *Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ V tới không gian véctơ W và $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó*

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{span}\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}.$$

Nói cách khác, muốn tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\mathrm{Im}(T)$, ta đi tìm số chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi họ véctơ $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$, xem mục 4.4 và Định lý 3.16.

2.2 Hạng của ánh xạ tuyến tính - Định lý về số chiều

Định nghĩa 4.6. *Nếu $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì số chiều của không gian $\mathrm{Im}(T)$ được gọi là hạng của T, kí hiệu là $\mathrm{rank}(T)$:*

$$\mathrm{rank}(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$$

Định lý 4.7 (Định lý về số chiều). *Nếu $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ n chiều V tới không gian W thì*

$$n = \dim V = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T)$$

hay

$$n = \dim V = \dim \mathrm{rank}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T)$$

2.3 Bài tập

Bài tập 4.2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_3)$.

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

c) Tìm một cơ sở của Ker$f$.

Chứng minh. c) Theo định nghĩa $\text{Ker}f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | f(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ nên Ker$f$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 & = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm với $\begin{cases} x_1 \text{ bất kì} \\ x_3 = -2x_1 \\ x_2 = -5x_1. \end{cases}$

Vậy $\dim \text{Ker}f = 1$ và một cơ sở của nó là $(1, -5, -2)$. ■

Bài tập 4.3. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng

a) f là đơn ánh khi và chỉ khi $\text{Ker}f = \{0\}$.

b) f là toàn ánh khi và chỉ khi $\text{Im}\, f = W$.

Chứng minh. a) $\boxed{\Rightarrow}$ Giả thiết f là đơn ánh. Nếu $x \in \text{Ker}f$ thì $f(x) = 0 = f(0)$. Do f đơn ánh nên $x = 0$ hay $\text{Ker}f = \{0\}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Giả sử có $f(x_1) = f(x_2)$, khi đó $f(x_1 - x_2) = 0$ nên $x_1 - x_2 \in \text{Ker}f$ hay $x_1 - x_2 = 0$. Vậy $x_1 = x_2$ và theo định nghĩa f là đơn ánh.

b) Một hệ quả trực tiếp của khái niệm toàn ánh. ■

Bài tập 4.4. Cho V, V' là 2 KGVT n chiều và $f : V \to V'$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:

a) f là đơn ánh. b) f là toàn ánh. c) f là song ánh.

Chứng minh. Thực chất chỉ cần chứng minh $a) \Rightarrow b)$ và $b) \Rightarrow a)$.
$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Theo định lý về số chiều 4.7

$$n = \dim \operatorname{Im} f + \dim\operatorname{Ker} f \tag{1}$$

Do f là đơn ánh nên theo bài tập 4.3 ta có $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, hay $\dim\operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n$. Mặt khác $\operatorname{Im} f$ là một không gian véctơ con của V' và $\dim V' = n$ nên $\operatorname{Im} f = V'$ hay f là toàn ánh.
$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Ngược lại, nếu f là toàn ánh thì $\operatorname{Im} f = V' \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n$. Từ (1) ta suy ra $\dim\operatorname{Ker} f = 0$ hay $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, tức f là đơn ánh. ∎

§3. MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

3.1 Khái niệm

Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ n chiều V tới không gian véctơ m chiều W. Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V và $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của W với

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

Hãy tìm mối liên hệ giữa $[T(x)]_{\mathcal{B}'}$ (toạ độ cột của véctơ $T(x)$ trong cơ sở $\mathcal{B}'$) với $[x]_{\mathcal{B}}$ (toạ độ của véctơ x trong cơ sở $\mathcal{B}$).

Định nghĩa 4.8. *Ma trận A cỡ $m \times n$ thoả mãn tính chất*

$$[T(x)]_{\mathcal{B}'} = A.[x]_{\mathcal{B}}, \forall x \in V$$

nếu tồn tại, được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ trong V và $\mathcal{B}'$ trong W.

Định lý 4.9. *Đối với mỗi cặp cơ sở $\mathcal{B}$ của V và $\mathcal{B}'$ của W, ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ tồn tại duy nhất và được xác định theo công thức:*

$$A = [[T(u_1)]_{\mathcal{B}'}, [T(u_2)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [T(u_n)]_{\mathcal{B}'},]$$

Định lý 4.10 (Ma trận của ánh xạ hợp). *Cho U, V, W là các không gian véc tơ,* $\dim U = p, \dim V = n, \dim W = m$ *và các ánh xạ tuyến tính*

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W.$$

i) g có ma trận là B trong cặp cơ sở $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ của U và V,

ii) f có ma trận là A trong cặp cơ sở $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ của V và W.

Khi đó, $f \circ g$ có ma trận là AB trong cặp cơ sở $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$ của U và W.

Ý nghĩa của ma trận của ánh xạ tuyến tính:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\text{Tính trực tiếp}"] \arrow[d, "(1)"'] & T(x) \\
{[x]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{Nhân } A[x]_{\mathcal{B}}", "\text{Tính gián tiếp (2)}"'] & {[T(x)]_{\mathcal{B}'}} \arrow[u, "(3)"']
\end{tikzcd}$$

Theo sơ đồ này, khi đã biết $x \in V$, muốn tính $T(x)$ có hai cách: cách thứ nhất là tính trực tiếp, cách thứ hai là tính gián tiếp qua 3 bước:

1. Tìm ma trận toạ độ $[x]_{\mathcal{B}}$.
2. Tính $[T(x)]_{\mathcal{B}'} = [T(x)]_{\mathcal{B}'}$.
3. Từ $[T(x)]_{\mathcal{B}'}$ ta suy ra $T(x)$.

Có hai lý do để thấy tầm quan trọng của cách tính gián tiếp. Thứ nhất là nó cung cấp một phương tiện để tính toán các ánh xạ tuyến tính trên máy tính điện tử. Thứ hai là chúng ta có thể chọn các cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ sao cho ma trận A càng đơn giản càng tốt. Khi đó có thể cung cấp những thông tin quan trọng về ánh xạ tuyến tính.

Mệnh đề 4.11. *Cho A là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ trong bất kì cặp cơ sở nào. Khi đó,*

$$\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(A).$$

Hệ quả 4.12 (Cuối kì, K61). *Nếu A, B là các ma trận vuông cấp $n \geq 1$ thì*

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

Chứng minh. Giả sử A là ma trận của toán tử $f : V \to V$ và B là ma trận của toán tử $g : V \to V$ trong cùng một cơ sở nào đó của không gian véc tơ V. Khi đó,

$$\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g.$$

Thật vậy, nếu $u \in \operatorname{Im}(f+g)$ thì tồn tại $v \in V$ sao cho $u = (f+g)(v) = f(v) + g(v) \Rightarrow u \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Do đó,

$$\operatorname{rank}(f+g) = \dim \operatorname{Im}(f+g) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \leq \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g. \qquad \blacksquare$$

Một cách tương đương,

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

Hệ quả 4.13 (Định lý Sylvester). *Cho A là ma trận kích thước $m \times n$, B là ma trận kích thước $n \times p$. Chứng minh $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.*

Chứng minh. Giả sử U, V, W là các không gian véc tơ, $\dim U = p, \dim V = n, \dim W = m$ và các ánh xạ tuyến tính

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$$

thỏa mãn

i) g có ma trận là B trong cặp cơ sở $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ của U và V,

ii) f có ma trận là A trong cặp cơ sở $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ của V và W.

Ta có

1) $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} f$. Thật vậy, nếu $u \in \operatorname{Im}(f \circ g)$ thì tồn tại $v \in U$ sao cho

$$u = (f \circ g)(v) \Rightarrow u = f(g(v)) \in \operatorname{Im} f.$$

Vậy

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(f \circ g) = \dim \operatorname{Im}(f \circ g) \leq \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A.$$

2) $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f \circ g)$. Thật vậy, ta có

$$v \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(v) = 0 \Rightarrow f(g(v)) = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{Ker}(f \circ g).$$

Do đó, $\dim \operatorname{Ker} g \leq \dim \operatorname{Ker}(f \circ g)$. Mặt khác, theo định lý về số chiều

$$p = \dim U = \dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Im}(f \circ g) + \dim \operatorname{Ker}(f \circ g).$$

Điều này dẫn đến

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(f \circ g) = \dim \operatorname{Im}(f \circ g) \leq \dim Ig = \operatorname{rank} g = \operatorname{rank} B.$$

■

Tóm lại ta có $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} A, \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ dẫn đến điều phải chứng minh.

Hệ quả 4.14 (Bất đẳng thức Frobenius).

$$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank} B + \operatorname{rank}(ABC),$$

với các ma trận A, B, C bất kì sao cho các phép nhân ma trận trên có nghĩa.

Chứng minh. Giả sử U, V, W, Z là các không gian véc tơ và các ánh xạ tuyến tính

$$U \xrightarrow{h} V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{f} Z,$$

ở đó

i) f có ma trận là A,

ii) g có ma trận là B,

iii) h có ma trận là C

trong các cặp cơ sở tương ứng của các không gian véc tơ trên. Trước hết,

$$X = \operatorname{Im}(g \circ h) \subset \operatorname{Im} g = Y \subset W.$$

Xét các ánh xạ hạn chế $f|_X : X \to Z, \quad f|_Y : Y \to Z$. Ta có

1) Vì $X \subset Y$ nên $\text{Ker} f|_X \subset \text{Ker} f|_Y$. Thật vậy, nếu $v \in \text{Ker} f|_X$ thì $f|_X(v) = 0 \Rightarrow f|_Y(v) = 0$. Do đó, $\dim\text{Ker} f|_X \leq \dim\text{Ker} f|_Y$.

2) Theo định lý về số chiều,

$$\dim \text{Im}(g \circ h) = \dim X = \dim \text{Im}\, f|_X + \dim\text{Ker} f|_X = \dim \text{Im}(f \circ g \circ h) + \dim\text{Ker} f|_X.$$

và

$$\dim \text{Im}\, g = \dim Y = \dim \text{Im}\, f|_Y + \dim\text{Ker} f|_Y = \dim \text{Im}(f \circ g) + \dim\text{Ker} f|_Y.$$

Bất đẳng thức $\dim\text{Ker} f|_X \leq \dim\text{Ker} f|_Y$ tương đương với

$$\begin{aligned} &\dim \text{Im}(g \circ h) - \dim \text{Im}(f \circ g \circ h) \leq \dim \text{Im}\, g - \dim \text{Im}(f \circ g) \\ \Leftrightarrow &\dim \text{Im}(f \circ g) + \dim \text{Im}(g \circ h) \leq \dim \text{Im}\, g + \dim \text{Im}(f \circ g \circ h) \\ \Leftrightarrow &\,\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}\, B + \text{rank}(ABC). \end{aligned}$$

■

Hệ quả 4.15 (Bất đẳng thức Sylvester). *Cho* $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times p}$*. Khi đó*

$$\text{rank}\, A + \text{rank}\, B \leq n + \text{rank}(AB),$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Frobenius ta có

$$\text{rank}(AI_n) + \text{rank}(I_nB) \leq \text{rank}\, I_n + \text{rank}(AI_nB) \Leftrightarrow \text{rank}\, A + \text{rank}\, B \leq n + \text{rank}(AB),$$

với I_n là ma trận đơn vị cấp n. ■

Hệ quả 4.16. *i) Nếu A là một ma trận thực thì*

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(AA^T) = \text{rank}(A^TA).$$

ii) Nếu A là một ma trận phức, đặt $A^* = (\overline{A})^T$, tức là lấy liên hợp rồi chuyển vị của ma trận A. Khi đó

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A^*) = \text{rank}(AA^*) = \text{rank}(A^*A).$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp A là ma trận thực, trường hợp A là ma trận phức được chứng minh hoàn toàn tương tự. Theo Định lý Sylvester, $\text{rank}(A^TA) \leq \text{rank}\, A$. Do đó, chỉ cần chứng minh $\text{rank}\, A \leq \text{rank}(A^TA)$. Coi A và A^TA như là các phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$. Nếu $x \in \text{Ker}(A^TA)$ thì

$$A^TAx = 0 \Rightarrow x^TA^TAx = 0 \Rightarrow (Ax)^T(Ax) = 0 \Rightarrow |Ax|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}A.$$

Vậy $\text{Ker}(A^TA) \subset \text{Ker}A$. Theo định lý về số chiều

$$n = \dim \text{Im}\, A + \dim\text{Ker}A = \dim \text{Im}(A^TA) + \dim\text{Ker}(A^TA)$$

dẫn đến điều phải chứng minh. ■

3.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính thông qua phép đổi cơ sở

Định nghĩa 4.17 (Ma trận đồng dạng). *Giả sử A và B là hai ma trận vuông cùng cấp n. Ta nói B đồng dạng với A, kí hiệu $B \sim A$ nếu tồn tại một ma trận không suy biến P sao cho*

$$B = P^{-1}AP$$

Định lý 4.18. *Giả sử $T : V \to V$ là một toán tử tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều V. Nếu A là ma trận của T trong cơ sở $\mathcal{B}$ và A' là ma trận của T đối với cơ sở $\mathcal{B}'$ thì*

$$A' = P^{-1}BP$$

trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

3.3 Bài tập

Bài tập 4.5. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1 + x_2 + x_3)$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

Bài tập 4.6. Cho ánh xạ đạo hàm $D : P_n[x] \to P_n[x]$ xác định bởi

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

a) Chứng minh D là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của D đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$.

c) Xác định Ker$f$ và Im f

Bài tập 4.7. Cho ánh xạ $f : P_2[x] \to P_4[x]$ xác định như sau: $f(p) = p + x^2p, \forall p \in P_{2.}$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $E_1 = \{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1' = \{1 + x, 2x, 1 + x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

Bài tập 4.8. Xét $\mathbb{R}^2$ giống như tập các véctơ thông thường trong mặt phẳng có gốc ở gốc tọa độ. Cho f là phép quay một góc α.Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Bài tập 4.9. Cho ánh xạ $f: M_2 \to M_2$ xác định như sau:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix}.$$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của M_2 :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 4.10. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong đó: $v_1 = 3x + 3x^2, v_2 = -1 + 3x + 2x^2, v_3 = 3 + 7x + 2x^2$.

a) Tìm $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$.

b) Tìm $f(1 + x^2)$.

Bài tập 4.11. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3).$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$.

Bài tập 4.12. Cho A là ma trận vuông cấp n. Ta xác định ánh xạ $f_A: M_n \to M_n$ như sau $f_A(X) = AX$.

a) Chứng minh f_A là biến đổi tuyến tính.

b) Giả sử $\det A \neq 0$. Chứng minh f_A là đẳng cấu tuyến tính.

c) Cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Tìm ma trận của f_A đối với cơ sở chính tắc của M_2 là

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 4.13. Cho A là ma trận kích thước $m \times n$, B là ma trận kích thước $n \times p$. Chứng minh $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$, với $\operatorname{rank}(A)$ = hạng của ma trận A.

§4. TRỊ RIÊNG VÀ VÉCTƠ RIÊNG

4.1 Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Định nghĩa 4.19. *Giả sử A là một ma trận vuông cấp n. Số thực λ gọi là trị riêng của A nếu phương trình*

$$Ax = \lambda x, x \in \mathbb{R}^n$$

có nghiệm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Để tìm trị riêng của ma trận vuông A cấp n, ta viết $Ax = \lambda x$ dưới dạng phương trình

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{4.2}$$

Đây là một hệ phương trình thuần nhất, muốn cho λ là trị riêng của A, điều kiện cần và đủ là hệ trên có không tầm thường, tức

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{4.3}$$

Định nghĩa 4.20. *Phương trình 4.31 được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận vuông A, còn đa thức $\det(A - \lambda I)$ được gọi là đa thức đặc trưng của A.*

Như vậy muốn tìm trị riêng của ma trận A ta chỉ cần lập phương trình đặc trưng và giải phương trình phương trình đặc trưng đã cho. Còn các véctơ riêng ứng với trị riêng λ chính là các véctơ khác không trong không gian nghiệm của hệ phương trình 4.2. Không gian nghiệm của hệ phương trình 4.2 được gọi là không gian riêng ứng với trị riêng λ.

Định lý 4.21. *Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Khi đó đa thức đặc trưng của AB và BA là trùng nhau.*

Chứng minh. Nếu A là khả nghịch thì

$$|\lambda I - AB| = |A^{-1}(\lambda I - B)A| = |\lambda I - BA|.$$

Nếu A suy biến thì 0 là một giá trị riêng của A. Chọn m đủ lớn sao cho $A_k = A - \frac{1}{k}I$ không suy biến với mọi $k \geq m$. (kể từ m đủ lớn nào đó, $\frac{1}{k}, k \geq m$ không phải là giá trị riêng của A). Khi đó $A_k B$ và BA_k có cùng đa thức đặc trưng. Cho $k \to \infty$ ta có điều phải chứng minh. ∎

Hệ quả 4.22 (Cuối kì, 20171). *Giả sử rằng A, B là các ma trận thực vuông cấp n. Kí hiệu $\sigma_{\mathbb{R}}(AB)$ là tập các giá trị riêng của AB. Chứng minh rằng $\sigma_{\mathbb{R}}(AB) = \sigma_{\mathbb{R}}(BA)$.*

Chứng minh. Vì đa thức đặc trưng của AB và BA là trùng nhau, nên $\sigma_{\mathbb{R}}(AB) = \sigma_{\mathbb{R}}(BA)$. Ngoài cách chứng minh trên, Hệ quả này có thể được chứng minh một cách trực tiếp như sau:

Giả sử λ là một trị riêng của AB ứng với véc tơ riêng $X \in M_{n\times 1}$. Khi đó,

$$ABX = \lambda X \Rightarrow (BA)BX = \lambda(BX). \tag{4.4}$$

1) Nếu $BX \neq 0$ thì phương trình (4.4) chứng tỏ rằng BX là một véc tơ riêng ứng với trị riêng λ của BA. Do đó, $\lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(BA)$.

2) Nếu $BX = 0$ thì từ $ABX = \lambda X$ ta có $\lambda X = 0$, mà $X \neq 0$ nên $\lambda = 0$. Hơn nữa,
$$\det(AB - 0.I) = \det(AB) = \det BA = \det(BA - 0.I) \Rightarrow 0 = \lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(BA).$$

Trong mọi tình huống ta đều có $\lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(AB) \Rightarrow \lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(BA)$.
Hiển nhiên, điều ngược lại cũng đúng. ■

Ví dụ 4.1 (Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc 2018 - Bảng A). *Một ma trận được gọi là dương nếu tất cả các hệ số của nó đều là các số thực dương.*

a) Chứng minh rằng mỗi ma trận dương cấp hai đều có hai trị riêng là các số thực khác nhau và trị riêng có giá trị lớn hơn là một số thực dương.

b) Cho A là một ma trận thực dương cấp hai. Giả sử $v = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ là một véc tơ riêng ứng với trị riêng lớn nhất của A. Chứng minh rằng hai thành phần x, y của v có cùng dấu.

[Lời giải]

a) Đặt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $a, b, c, d > 0$. Đa thức đặc trưng của A là
$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc).$$
Do đó, $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$ nên A có hai trị riêng thực phân biệt, giả sử, là λ_1 và λ_2. Hơn nữa, $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d > 0$ nên trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất phải là số dương.

b) Gọi λ là trị riêng lớn nhất. Ta có
$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0, \\ cx + (d-\lambda)y = 0. \end{cases}$$
Nếu x và y không cùng dấu thì $a - \lambda$ và b cùng dấu, $d - \lambda$ và c cùng dấu. Do đó, $a - \lambda > 0$ và $d - \lambda > 0$. Từ đó suy ra $\lambda < \frac{a+d}{2}$. Điều này mâu thuẫn với λ là trị riêng lớn nhất, vì tổng các trị riêng bằng $a + d$.

4.2 Trị riêng và véctơ riêng của toán tử tuyến tính

Định nghĩa 4.23. *Giả sử V là một không gian véctơ. Số λ gọi là trị riêng của của toán tử tuyến tính $T : V \to V$ nếu tồn tại véctơ $x \neq 0$ sao cho $T(x) = \lambda x$.*

Định lý 4.24. *Giả sử T là một toán tử tuyến tính trong không gian véctơ hữu hạn chiều V và A là ma trận của T đối với một cơ sở nào đó $\mathcal{B}$ của V. Thế thì*

1. *Những trị riêng của T là những trị riêng của A.*
2. *Véctơ x là véctơ riêng của T ứng với trị riêng λ khi và chỉ khi véctơ cột $[x]_{\mathcal{B}}$ là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ.*

4.3 Chéo hoá ma trận

Đặt bài toán:

Bài toán 1: Cho V là một không gian véctơ hữu hạn chiều, $T : V \to V$ là một toán tử tuyến tính. Ta đã biết rằng ma trận của T phụ thuộc vào cơ sở đã chọn trong V. Hỏi có tồn tại một cơ sở trong V trong V sao cho ma trận của T đối với cơ sở đó là ma trận chéo.

Bài toán 2: (Dạng ma trận). Cho A là một ma trận vuông. Hỏi có tồn tại hay không một ma trận P khả đảo sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo.

Định nghĩa 4.25 (Ma trận chéo hoá được). *Cho ma trận vuông A. Nếu tồn tại ma trận khả đảo P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo thì ta nói ma trận A chéo hoá được và ma trận P làm chéo hoá ma trận A.*

Định lý 4.26. *Giả sử A là một ma trận vuông cấp n. Điều kiện cần và đủ để A chéo hoá được là nó có n véctơ riêng độc lập tuyến tính.*

Định lý 4.27 (Điều kiện cần và đủ cho sự chéo hoá). *Tự đồng cấu f của không gian véctơ n chiều V chéo hoá được nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau đây được thoả mãn:*

(i) Đa thức đặc trưng của f có đủ nghiệm trong $\mathbb{R}$:

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{s_1} (X - \lambda_2)^{s_2} \dots (X - \lambda_m)^{s_m}$$

(ii) $\operatorname{rank}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V) = n - s_i$ *(với $i = 1, 2, \dots, m$), ở đây s_i là bội của λ_i xem như nghiệm của đa thức đặc trưng.*

Hệ quả 4.28. *Nếu ma trận A vuông cấp n có n trị riêng khác nhau thì A chéo hoá được.*

Quy trình chéo hoá một ma trận

1. Tìm n véctơ riêng độc lập của A:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

2. Lập ma trận P có $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các cột.

3. Khi đó ma trận P sẽ làm chéo hoá ma trận A, hơn nữa

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$$

trong đó $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ là các trị riêng ứng với véctơ riêng p_i.

Bổ đề 4.29. *Nếu A, B là các ma trận đồng dạng thì* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $B = P^{-1}AP$ với P là một ma trận khả nghịch. Khi đó,

$$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(P^{-1}AP) \leq \operatorname{rank}(A).$$

Mặt khác, $A = PBP^{-1}$ nên

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(PBP^{-1}) \leq \operatorname{rank} B.$$

Do đó, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$. ■

Ví dụ 4.2 (Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc 2018 - Bảng A). *Cho ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 8 & 12 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tìm số nguyên dương N *nhỏ nhất sao cho* $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1})$ *với mọi* $k \geq N$.

[Lời giải] Chéo hóa ma trận A ta được

$$A \sim B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Do đó,

$$A^k \sim B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$$

với mọi $k \geq 2$. Nói riêng, $\operatorname{rank}(A^k) = 1$ với mọi $k \geq 2$. Vậy $N = 2$.

Ví dụ 4.3 (Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc 2018 - Bảng A). *a) Giả sử X, A là các ma trận vuông với hệ số thực thỏa mãn $X^2 = A$. Chứng minh rằng $AX = XA$.*

b) Tìm số các ma trận vuông X với hệ số thực thỏa mãn $X^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

[Lời giải]

a) Ta có $XA = X^3 = AX$.

b) Ta có $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 16)$. Như vậy A có ba trị riêng phân biệt là $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 16$ nên có thể chéo hóa A bằng ma trận P khả nghịch,

$$A = P^{-1}DP, \quad \text{ở đó } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow PX^2P^{-1} = PAP^{-1} = D.$$

Đặt $Y = PXP^{-1}$ thì phương trình ban đầu trở thành

$$Y^2 = D. \tag{4.5}$$

Theo câu a) ta có $DY = YD \Rightarrow Y$ phải là một ma trận đường chéo. Gọi y_1, y_2, y_3 lần lượt là các hệ số trên đường chéo của Y. Ta có

$$(4.5) \Leftrightarrow y_1^2 = 1, y_2^2 = 4, y_3^2 = 16 \Leftrightarrow (y_1, y_2, y_3) = (\pm 1, \pm 2, \pm 4).$$

Phương trình (4.5) có đúng 8 nghiệm nên phương trình ban đầu cũng có đúng 8 nghiệm.

Bài tập 4.14. [Cuối kì, K61] Cho ma trận vuông A thỏa mãn $A^2 = I$. Chứng minh rằng A chéo hóa được.

Ma trận có tính chất $A^2 = I$ được gọi là ma trận đối hợp. Xem thêm về ma trận đối hợp và chứng minh của Bài tập 4.14 ở Phụ lục A3.

Bài tập 4.15. Cho ma trận vuông A thỏa mãn $A^2 = A$. Chứng minh rằng A chéo hóa được.

Ma trận có tính chất $A^2 = A$ được gọi là ma trận lũy đẳng. Xem thêm về ma trận lũy đẳng và chứng minh của Bài tập 4.15 ở Phụ lục A2.

4.4 Đa thức tối tiểu

Định nghĩa 4.30. *Đa thức có bậc nhỏ nhất triệt tiêu ma trận A và có hệ số cao nhất bằng 1 được gọi là* đa thức tối tiểu *của A.*

Chú ý 4.31. *Đa thức tối tiểu của toán tử tuyến tính được định nghĩa bằng đa thức tối tiểu của ma trận của nó trong một cơ sở nào đó, và không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian.*

Định lý 4.32. *Mọi đa thức triệt tiêu A đều chia hết cho đa thức tối tiểu của nó.*

Định nghĩa 4.33. *Đa thức p được gọi là triệt tiêu véctơ $v \in V$ ứng với toán tử tuyến tính $A : V \to V$ nếu $p(A)v = 0$. Đa thức triệt tiêu véctơ v có bậc nhỏ nhất và có hệ số cao nhất bằng 1 được gọi là đa thức tối tiểu của v.*

Định lý 4.34. *Với mọi toán tử tuyến tính $A : V \to V$, tồn tại một véctơ $v \in V$ sao cho đa thức tối tiểu của nó ứng với A trùng với đa thức tối tiểu của toán tử A.*

Định lý 4.35 (Cayley - Hamilton). *Mỗi ma trận đều là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó.*

Hệ quả 4.36. *Nếu A, B là các ma trận vuông cấp n đồng dạng thì đa thức tối tiểu của chúng là trùng nhau.*

Thật vậy, giả sử $B = P^{-1}AP$ và $q_A(X), q_B(X)$ là các đa thức tối tiểu của A và B tương ứng. Khi đó,
$$q_A(B) = q_A(P^{-1}AP) = P^{-1}q_A(A)P = 0.$$
Do đó, $q_A(X)$ chia hết cho $q_B(X)$. Tương tự, ta có điều ngược lại, dẫn tới điều phải chứng minh.

Định lý 4.37. *Với mọi đa thức bậc n,*
$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$
tồn tại một ma trận $A \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho đa thức tối tiểu của A là $p(x)$.

4.5 Bài tập

Bài tập 4.16. Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.17. Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_2[x]$ xác định như sau:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$$

a) Tìm giá trị riêng của f.

b) Tìm các véctơ riêng ứng với các giá trị riêng tìm được.

Bài tập 4.18. Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$ khi đó với:

a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.19. Ma trận A có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có , tìm ma trận chéo đó:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.20. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau: $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2 + 2x_3)$. Hãy tìm cơ sở để f có dạng chéo.

Bài tập 4.21. Tìm cở sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có dạng chéo trong đó $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$

Bài tập 4.22. Cho $f : V \to V$ là biến đổi tuyến tính. Giả sử $f^2 = f \circ f : V \to V$ có giá trị riêng λ^2. Chứng minh một trong 2 giá trị λ hoặc $-\lambda$ là giá trị riêng của f.

Bài tập 4.23. Cho $D : P_n[x] \to P_n[x]$ là ánh xạ đạo hàm, còn $g : P_n[x] \to P_n[x]$ xác định bởi $g(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = (2x + 3)(a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1})$. Tìm các giá trị riêng của D và g.

4.6 Một số tính chất sâu hơn về trị riêng của ma trận

Bài tập 4.24. Chứng minh rằng các hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận A có thể được mô tả như sau:

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + c_n$$

trong đó c_k là tổng của tất cả các định thức con chính cấp k của ma trận A. (Một định thức con được gọi là *chính* nếu các chỉ số hàng và chỉ số cột của nó trùng nhau).

Bài tập 4.25. Giả sử λ là nghiệm bội p của đa thức đặc trưng của ma trận A vuông cấp n.

a. Chứng minh rằng số chiều của không gian riêng ứng với giá trị riêng λ không lớn hơn p.

b. Đặt $r = \text{rank}(A - \lambda I)$. Chứng minh rằng $1 \leq n - r \leq p$.

Bài tập 4.26. Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận A^{-1} bằng bằng nghịch đảo của các giá trị riêng của A (kể cả bội).

Chứng minh.

$$\det(A^{-1} - \lambda I) = (-\lambda)^n . \det(A^{-1}) . \det\left(A - \frac{1}{\lambda} I\right).$$

Bài tập 4.27. Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận A^2 bằng bằng bình phương của các giá trị riêng của A (kể cả bội).

Chứng minh. Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A (kể cả bội). Khi đó

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$$

$$\det(A + \lambda I) = (\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda) \ldots (\lambda_n + \lambda)$$

Nhân hai vế của các đẳng thức trên với nhau ta có

$$\det(A^2 - \lambda^2 I) = (\lambda_1^2 - \lambda^2)(\lambda_2^2 - \lambda^2) \ldots (\lambda_n^2 - \lambda^2)$$

thay λ^2 bởi λ trong đẳng thức trên ta có

$$\det(A^2 - \lambda I) = (\lambda_1^2 - \lambda)(\lambda_2^2 - \lambda) \ldots (\lambda_n^2 - \lambda)$$

suy ra điều phải chứng minh. ∎

Bài tập 4.28. Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận A^p bằng luỹ thừa p của các giá trị riêng của A (kể cả bội).

Chứng minh. Tương tự như bài tập trên, gọi $1, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1}$ là các căn bậc p khác nhau của 1 $\left(\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}\right)$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)\\
&\det(A - \lambda\epsilon_1 I) = (\lambda_1 - \lambda\epsilon_1)(\lambda_2 - \lambda\epsilon_1)\ldots(\lambda_n - \lambda\epsilon_1)\\
&\vdots\\
&\det(A - \lambda\epsilon_{p-1} I) = (\lambda_1 - \lambda\epsilon_{p-1})(\lambda_2 - \lambda\epsilon_{p-1})\ldots(\lambda_n - \lambda\epsilon_{p-1})
\end{aligned}$$

Nhân các vế của p phương trình trên với nhau ta được

$$\det(A^n - \lambda^p I) = (\lambda_1^p - \lambda^p)(\lambda_2^p - \lambda^p)\ldots(\lambda_n^p - \lambda^p)$$

Thay λ^p bởi λ trong đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh. ∎

Bài tập 4.29. Cho A là một ma trận vuông cấp n với các phần tử trong một trường đóng đại số $\mathcal{K}$. Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng (kể cả bội) của ma trận A. Chứng minh rằng nếu $f(X)$ là một đa thức với các hệ số trong $\mathcal{K}$ thì

$$\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_n).$$

Chứng minh. Theo bài ra,

$$\det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda).$$

Giả sử $f(\lambda) = a_0 \prod\limits_{j=1}^{s}(\lambda - \mu_i)$, khi đó $f(A) = a_0 \prod\limits_{j=1}^{s}(A - \mu_i I)$. Vậy

$$\begin{aligned}
\det f(A) &= a_0^n \prod_{j=1}^{s} \det(A - \mu_j I)\\
&= a_0^n \prod_{j=1}^{s}\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - mu_j)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left[a_0 \prod_{j=1}^{s}(\lambda_i - \mu_j)\right]\\
&= \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i)
\end{aligned}$$ ∎

Để bạn đọc có thể hình dung ra ý nghĩa của Bài tập 4.29, chúng ta xét bài tập sau.

Bài tập 4.30. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tính $\det(A^{2018} + A^2 + A + I)$.

[Lời giải] Tác giả tin rằng việc đi tính $(A^{2018} + A^2 + A + I)$ rồi tính $\det(A^{2018} + A^2 + A + I)$ như thường lệ là không thú vị lắm. Thay vì đó, ta đi tìm các trị riêng λ_1, λ_2 của A rồi thay vào công thức $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)$.

Bài tập 4.31. Chứng minh rằng nếu $P_A(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{s_i}$ là đa thức đặc trưng của A thì đa thức đặc trưng của $f(A)$ với f là một đa thức là $P_{f(A)}(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{k} (f(\lambda_i - \lambda))^{s_i}$.

Chứng minh. Áp dụng bài tập 4.29 với hàm số $g(x) = f(x) - \lambda$, giả sử $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$. (kể cả bội), ta có

$$\det g(A) = \prod_{i=1}^{n} g(\lambda_i)$$

hay

$$P_{f(A)}(\lambda) = \det(f(A) - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n} (f(\lambda_i) - \lambda)$$

Bài tập 4.32. Chứng minh rằng nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A và $f(X)$ là một đa thức thì $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ là các trị riêng của ma trận $f(A)$.

Chứng minh. Là một hệ quả trực tiếp của bài tập 4.31. ■

Bài tập 4.33. Chứng minh rằng nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A và $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ là một phân thức hữu tỷ xác định khi $x = A$ (nghĩa là $\det h(A) \neq 0$), khi đó $\det f(A) = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n)$ và $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của ma trận $f(A)$.

Chứng minh. Áp dụng đẳng thức $\det f(A) = \dfrac{\det(g(A)}{\det(h(A)}$ và sử dụng các kết quả của bài tập 4.29, 4.31, 4.32. ■

4.7 Một ứng dụng của phép chéo hóa ma trận

Một trong những ứng dụng của phép chéo hóa ma trận là đi tính lũy thừa của ma trận đó, A^n. Chúng ta biết rằng, nếu ma trận P làm chéo hóa ma trận A thì

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \lambda_2 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \lambda_2 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Do đó,

$$A^n = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \lambda_2 & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \lambda_2^n & \cdots & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Chẳng hạn như,

Bài tập 4.34. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}$. Tính A^n.

[Lời giải] Ta chia làm các bước sau.

1) Trước hết, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 20, \lambda_2 = -5$.

2) Ứng với $\lambda_1 = 20$ ta tìm được một véc tơ riêng $(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

3) Ứng với $\lambda_1 = -5$ ta tìm được một véc tơ riêng $(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

4) $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}, \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ và $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

5)

$$\begin{aligned} A = PBP^{-1} \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}, \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}, \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}, \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9.20^n + 12.(-5)^n & -12.20^n + 12.(-5)^n \\ -12.20^n + 12.(-5)^n & -16.20^n + 9.(-5)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bài tập 4.35. Cho dãy số Fibonacci được định nghĩa như sau: $F_0 = 0, F_1 = 1$ và $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ nếu $n \geq 1$. Chứng minh công thức Cauchy-Binet sau:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Chứng minh. Công thức $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ được viết lại dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nên theo công thức truy hồi,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bài toán đã cho được đưa về bài toán tính $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$. Ta chia thành các bước sau.

1) $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2) Ứng với λ_1 ta tìm được véc tơ riêng $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Ứng với λ_2 ta tìm được véc tơ riêng $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = B$ nên

$$\begin{aligned} A = PBP^{-1} \Rightarrow A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5) Cuối cùng, điều này dẫn đến công thức Cauchy-Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

■

Bài tập 4.36. [Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc 2018 - Bảng A] Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số vùng đô thị chuyển về nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu ($x, y > 0$).

a) Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và đô thị là bao nhiêu?

b) Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị bằng nhau. Có thể đến một lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá 80% tổng số dân của cả vùng không? Giải thích.

[Lời giải]

a) Giả sử x_k, y_k tương ứng là số dân tại các vùng nông thôn và thành thị sau k năm và $x_0 = x, y_0 = y$. Theo giả thiết ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, \quad y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Nói cách khác,
$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$
Từ đó suy ra
$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \text{ở đó } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$
Chéo hóa ma trận A ta được
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = D, \quad \text{ở đó } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
Do đó,
$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3.4^k} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3.4^k} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3.4^k} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3.4^k} \end{pmatrix}.$$
Từ đó,
$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3.4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.4^k}\right)y, \quad y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3.4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3.4^k}\right)y.$$

b) Nếu $y_k > 4x_k$ thì thay vào phương trình trên ta được
$$\left(2 + \frac{10}{4^k}\right)x + \left(2 - \frac{5}{4^k}\right)y < 0 \Rightarrow \left(4 + \frac{5}{4^k}\right)x < 0 \Rightarrow x < 0.$$
Điều này trái với giả thiết. Vậy câu trả lời là không.

CHƯƠNG 5

DẠNG TOÀN PHƯƠNG, KHÔNG GIAN EUCLIDE

§1. KHÁI NIỆM

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 5.1. *Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ được gọi là một* dạng song tuyến tính *trên V nếu nó tuyến tính với mỗi biến khi cố định biến còn lại, tức là:*

$$\begin{cases} \varphi\left(hx_1 + kx_2, y\right) = h\varphi\left(x_1, y\right) + k\varphi\left(x_2, y\right) \forall x_1, x_2, y \in V, \forall h, k \in \mathbb{R} \\ \varphi\left(x, hy_1 + ky_2\right) = h\varphi\left(x, y_1\right) + k\varphi\left(x, y_2\right) \forall x, y_2, y_2 \in V, \forall h, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dạng song tuyến tính φ được gọi là đối xứng nếu

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \text{ với mọi } x, y \in V$$

(bằng cách tương tự chúng ta có thể định nghĩa được một dạng đa tuyến tính *trên V).*

Định nghĩa 5.2. *Giả sử φ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V. Khi đó ánh xạ $H : V \to \mathbb{R}$ xác định bởi*

$$H(x) = \varphi(x, x)$$

được gọi là một dạng toàn phương trên V ứng với dạng song tuyến tính đối xứng φ.

1.2 Phân loại dạng toàn phương

Ta nói dạng toàn phương $\varphi(x, x)$ là

1. Xác định dương nếu $\varphi(x,x) > 0$ với mọi $x \in V, x \neq 0$.

2. Nửa xác định dương (hay xác định không âm) nếu $\varphi(x,x) \geq 0$ với mọi $x \in V, x \neq 0$.

3. Xác định âm nếu $\varphi(x,x) < 0$ với mọi $x \in V, x \neq 0$.

4. Nửa xác định âm (hay xác định không dương) nếu $\varphi(x,x) \leq 0$ với mọi $x \in V, x \neq 0$.

5. Không xác định dấu nếu tồn tại $x, y \in V$ sao cho $\varphi(x,x) < 0, \varphi(y,y) > 0$.

1.3 Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương trên không gian hữu hạn chiều.

Cho $\varphi : V_n \times V_n \to R$ là một dạng song tuyến tính, trong đó V_n là một KGVT có số chiều là $n.S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V_n . Khi đó ta có:

$$\varphi\left(x,y\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi\left(e_i, e_j\right) x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = [x]_S^t A\,[y]_S = [y]_S^t A\,[x]_S$$

Như vậy φ hoàn toàn xác định bởi bộ các giá trị $\left(\varphi(e_i, e_j)\right)_{i,j=1}^{n}$. Xét ma trận $A = \left[a_{ij}\right] = \left[\varphi\left(e_i, e_j\right)\right]$. Dạng song tuyến tính φ đối xứng khi và chỉ khi A là một ma trận đối xứng.

Định nghĩa 5.3. *Ma trận $A = \left[a_{ij}\right] = \left[\varphi\left(e_i, e_j\right)\right]$ được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính φ (hay ma trận của dạng toàn phương H) trong cơ sở S, biểu thức $\varphi\left(x,y\right) = [x]_S^t A\,[y]_S = [y]_S^t A\,[x]_S$ được gọi là dạng ma trận của dạng song tuyến tính φ trong cơ sở S.Tương tự như vậy $H\left(x,x\right) = [x]_S^t A\,[x]_S$ được gọi là dạng ma trận của dạng toàn phương H trong cơ sở S.*

1.4 Bài tập

Bài tập 5.1. Cho f là dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ 3 chiều V có ma trận đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Cho $h : V \to V$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. Chứng minh ánh xạ $g(x,y) = f\left(x, h(y)\right)$ là dạng song tuyến tính trên V. Tìm ma trận của nó đối với cơ sở $\mathcal{B}$.

Chứng minh. Để chứng minh g là dạng song tuyến tính ta cần chứng mình:

$$\begin{cases} g\left(hx_1 + kx_2, y\right) = hg\left(x_1, y\right) + kg\left(x_2, y\right) \\ g\left(x, hy_1 + ky_2\right) = hg\left(x, y_1\right) + kg\left(x, y_2\right) \end{cases}$$

, dễ kiểm tra. Do f là dạng song tuyến tính trên V nên ta có $f\left(x, h\left(y\right)\right) = [x]_{\mathcal{B}}^t A \left[h\left(y\right)\right]_{\mathcal{B}}$ với mọi $x, y \in V$. Hơn nữa $h : V \to V$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là B nên ta có $\left[h\left(y\right)\right]_{\mathcal{B}} = B.\left[y\right]_{\mathcal{B}}$. Tóm lại ta có:

$$g(x, y) = f\left(x, h(y)\right) = [x]_{\mathcal{B}}^t A \left[h\left(y\right)\right]_{\mathcal{B}} = [x]_{\mathcal{B}}^t A.B.\left[y\right]_{\mathcal{B}}$$

với mọi $x, y \in V$ nên ma trận của nó đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là ma trận AB. ∎

§2. Rút gọn một dạng toàn phương

Định nghĩa 5.4 (Dạng chính tắc của dạng toàn phương trên KG n chiều). *Biểu thức của dạng toàn phương trong cơ sở S chỉ chứa các số hạng bình phương*

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$$

được gọi là dạng chính tắc của nó trong cơ sở S. Ma trận của dạng chính tắc này là ma trận chéo $A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

2.1 Phương pháp Lagrange

Xét dạng toàn phương $Q(x,x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, a_{ij} = a_{ji}$. Giả sử $a_{11} \neq 0$, ta nhóm các số hạng có chứa x_1:

$$\begin{aligned} Q &= \left(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n\right) + ... + a_{nn}x_n^2 \\ &= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n\right)^2 + Q_1, \end{aligned}$$

trong đó Q_1 không chứa x_1 nữa. Đặt $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, y_i = x_i, i = 2, 3, ..., n$, thì $Q = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + Q_1$, trong đó Q_1 không chứa y_1. Tiếp tục thực hiện quá trình trên với Q_1 chỉ còn chứa các biến $y_2, y_3, ..., y_n$ như với Q trước. Cứ thế, cho đến khi thu được biểu thức không chứa số hạng chéo nữa.

Nếu $_{11} = 0$, ta tìm trong các số hạng $a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ xem có số nào khác 0, chẳng hạn nếu $a_{kk} \neq 0$ thì ta đổi vai trò của a_{kk} cho a_{11}.

Nếu tất cả các $a_{ii} = 0$ thì tồn tại ít nhất một số hạng $2a_{ij}x_ix_j$ với $a_{ij} \neq 0$. Lúc đó ta đặt:

$$x_i = y_i + y_j, x_j = y_i - y_j, x_k = y_k, k \neq i, j$$

thì $2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}\left(y_i^2 - y_j^2\right)$ nghĩa là trong biểu thức của dạng toàn phương đã xuất hiện số hạng bình phương, tiếp tục làm lại từ đầu.

2.2 Phương pháp Jacobi

Định lý 5.5 (Jacobi). *Dạng toàn phương $\varphi(x,x)$ có ma trận trong cơ sở nào đó của không gian n chiều V là ma trận đối xứng A. φ xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của A đều dương.*

2.3 Phương pháp chéo hoá trực giao

Phương pháp chéo hoá trực giao sẽ được học ở bài sau, sau khi đã nghiên cứu không gian Euclide. Tuy vậy, một hệ quả của nó sẽ được nêu ra ngay sau đây để giúp sinh viên có thêm một tiêu chuẩn để kiểm tra dấu của một dạng toàn phương (tất nhiên là không cần đến kiến thức về không gian Euclide).

Định lý 5.6. *Dạng toàn phương $\varphi(x,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là ma trận đối xứng A. Khi đó φ xác định dương khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng của A đều dương*

2.4 Bài tập

Bài tập 5.2. Trên $\mathbb{R}^3$ cho các dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ: $\omega_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$, $\omega_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3$, $\omega_3 = 5x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$.

a) Bằng phương pháp Lagrange, đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

b) Xét xem các dạng toàn phương xác định dương, âm không?

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
\omega_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - 9x_3^2 \\
&= y_1^2 + y_2^2 - 9y_3^2
\end{aligned}$$

Suy ra ω_1 không xác định dấu.

Đối với ω_2, đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ ta được:

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= y_1^2 - y_2^2 + 5y_1y_3 - 3y_2y_3 \\
&= \left(y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - \left(y_2 + \frac{3}{2}y_3\right)^2 - 4y_3^2 \\
&= Z_1^2 - Z_2^2 - 4Z_3^2
\end{aligned}$$

Suy ra ω_2 không xác định dấu.

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 5x^2+2y^2+z^2-6xy+2xz-2yz\\ &= 5\left[x^2+2x\left(-\frac{3}{5}y+\frac{6}{15}z\right)+\left(-\frac{3}{5}y+\frac{6}{15}z\right)^2\right]+\frac{1}{5}\left(y^2+2yz+z^2\right)\\ &= 5\left(x-\frac{3}{5}y+\frac{6}{15}z\right)^2+\frac{1}{5}\left(y+z\right)^2\end{aligned}$$

hoặc

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 5x^2+2y^2+z^2-6xy+2xz-2yz\\ &= z^2+2z\left(x-y\right)+\left(x-y\right)^2+4x^2-4xy+y^2\\ &= \left(z+x-y\right)^2+\left(2x-y\right)^2\end{aligned}$$

Suy ra ω_3 nửa xác định dương. ■

Bài tập 5.3. Xác định a để các dạng toàn phương xác định dương:

a) $5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

b) $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$.

c) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

Chứng minh. **Cách 1:** Sử dụng phương pháp Lagrange

$$\begin{aligned}\omega &= 5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3\\ &= 5\left[x_1^2+2.\frac{1}{5}x_1\left(2x_2-x_3\right)+\frac{1}{25}\left(2x_2-x_3\right)^2\right]+\frac{1}{5}x_2^2-\frac{6}{5}x_2x_3+\left(a-\frac{1}{5}\right)x_3^2\\ &= 5\left(x_1+\frac{1}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3\right)^2+\frac{1}{5}\left(x_2^2-2x_2.3x_3+9x_3^2\right)+\left(a-2\right)x_3^2\\ &= 5\left(x_1+\frac{1}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3\right)^2+\frac{1}{5}\left(x_2-3x_3\right)^2+\left(a-2\right)x_3^2\end{aligned}$$

Vậy ω xác định dương khi và chỉ khi $a>2$.

Cách 2: Sử dụng định lý Jacobi 5.5

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & a\end{bmatrix}$$

nên

$$\Delta_1=|5|=5, \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1, \Delta_3=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & a\end{vmatrix}=a-2$$

Vậy ω xác định dương khi và chỉ khi $a>2$.

Cách 3: Sử dụng định lý 5.6 ■

2.5 Kết luận

1. Phương pháp Lagrange để rút gọn một dạng toàn phương là phương pháp khá đơn giản về mặt kĩ thuật biến đổi.

2. Phương pháp Jacobi chỉ áp dụng được trong trường hợp ma trận A của dạng toàn phương có tất cả các định thức con chính đều khác 0. Tuy nhiên trong các bài toán biện luận, tìm các tham số đề một dạng toàn phương xác định dương thì phương pháp Jacobi lại khá hiệu quả (bài tập 5.3).

3. Có nhiều cách khác nhau để đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc, điều đó có nghĩa một dạng toàn phương có thể có nhiều dạng chính tắc khác nhau (trong những cơ sở khác nhau). Tuy nhiên chúng ta có định luật quán tính sau: *"Khi một dạng toàn phương được đưa về dạng chính tắc bằng hai cách khác nhau (tức là trong những cơ sở mới khác nhau) thì số các hệ số dương và số các hệ số âm bằng nhau, và chúng lần lượt được gọi là chỉ số quán tính dương và chỉ số quán tính âm của dạng toàn phương đã cho"*.

§3. KHÔNG GIAN EUCLIDE

3.1 Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

Định nghĩa 5.7. *Cho V là một không gian vectơ, một tích vô hướng trên V là một ánh xạ* $< .,. >: V \times V \to R$ *thoả mãn các tiên đề sau:*

TVH1: $< u,v >$ *xác định với mọi* $u,v \in V$

TVH2: $< u,v >=< v,u >$

TVH3: $< u+v,w >=< u,w > + < v,w >$

TVH4: $< ku,v >= k < u,v >$

TVH5: $< u,u >\geq 0, < u,u >= 0$ *khi và chỉ khi* $u = 0$.

Nhận xét: Tích vô hướng là một dạng song tuyến tính, đối xứng, và dạng toàn phương sinh bởi nó xác định dương.

Định nghĩa 5.8 (Độ dài của vectơ). *Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó* độ dài *(hay* chuẩn*) của vectơ $\alpha \in V$ là số thực không âm $\|\alpha\| = \sqrt{< \alpha,\alpha >}$.*

Định nghĩa 5.9 (Khoảng cách). *Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó khoảng cách giữa hai vectơ u và v là số thực không âm $d(u,v) = \|u - v\|$.*

Định nghĩa 5.10 (Sự vuông góc). *Hai vectơ u và v được gọi là* vuông góc *hay* trực giao *với nhau và được kí hiệu là $u \perp v$ nếu*

$$< u,v >= 0$$

Định nghĩa 5.11 (Họ vectơ trực giao, trực chuẩn).

a) *Hệ vectơ $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ của không gian vectơ Euclide E được gọi là một hệ* trực giao *nếu các vectơ của hệ đôi một vuông góc với nhau, tức là*

$$< e_i, e_j >= 0 \text{ nếu } i \neq j$$

b) *Hệ vectơ $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ của không gian vectơ Euclide E được gọi là một hệ* trực chuẩn *nếu nó là một hệ trực giao và mỗi vectơ của hệ đều có độ dài bằng 1, tức là*

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i \neq j \\ 1 \text{ nếu } i = j \end{cases}$$

Mệnh đề 5.12.

(i) *Mỗi hệ trực giao không chứa vectơ* 0 *đều độc lập tuyến tính.*

(ii) *Nếu hệ vectơ* $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ *là trực giao và không chứa vectơ* 0 *thì hệ vectơ* $\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \ldots, \frac{e_k}{\|e_k\|}\right)$ *là một hệ trực chuẩn.*

3.2 Phép trực giao hoá Schmidt

Định lý 5.13. *Cho* V *là một không gian vectơ có tích vô hướng,* $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *là một họ vectơ độc lập tuyến tính của* V. *Ta có thể thay* S *bởi họ trực chuẩn* $S' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, *sao cho* $\operatorname{span}\{u_1, u_2, ..., u_k\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *với mọi* $k = 1, 2, ..., n$.

Bước 1: Đặt $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

Bước 2: Đặt $\overline{v_2} = u_2 + tv_1$ sao cho $< \overline{v_2}, v_1 >= 0$ tức là $t = - < u_2, v_1 >$. Sau đó chọn $v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$ Giả sử sau $k-1$ bước ta đã xây dựng được họ trực chuẩn $S'_{k-1} = \{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$ sao cho $\operatorname{span}\{u_1, u_2, ..., u_{k-1}\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$. Ta thực hiện đến bước thứ k sau:

Bước k: Đặt $\overline{v_k} = u_k + t_1v_1 + ... + t_{k-1}v_{k-1}$ sao cho $< \overline{v_k}, v_j >= 0, j = 1, 2, ..., k-1$ Tức là ta có $t_j = - < u_k, v_j >, j = 1, 2, ..., k-1$. Sau đó chọn $v_k = \frac{\overline{v_k}}{\|\overline{v_k}\|}$. Tiếp tục thực hiện đến khi $k = n$ ta thu được hệ trực chuẩn $S' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Nhận xét: Về mặt lý thuyết, chúng ta vừa chuẩn hoá, vừa trực giao các vectơ như ở trên, tuy nhiên trong thực hành nếu gặp phải các phép toán phức tạp khi sau mỗi bước phải chuẩn hoá véctơ $v_k = \frac{\overline{v_k}}{\|\overline{v_k}\|}$, người ta thường chia làm hai phần: trực giao hệ vectơ S trước rồi chuẩn hoá các vectơ sau.

Bước 1: Đặt $v_1 = u_1$

Bước 2: Đặt $v_2 = u_2 + tv_1$ sao cho $< v_2, v_1 >= 0$, tức là $t = \frac{-<u_2,v_1>}{<v_1,v_1>}$.
Giả sử sau $k-1$ bước ta đã xây dựng được họ trực giao $S'_{k-1} = \{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$ sao cho $\operatorname{span}\{u_1, u_2, ..., u_{k-1}\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$. Ta thực hiện đến bước thứ k sau:

Bước k: Đặt $v_k = u_k + t_1v_1 + ... + t_{k-1}v_{k-1}$ sao cho $< v_k, v_j >= 0, j = 1, 2, ..., k-1$ Tức là ta có $t_j = \frac{-<u_k,v_j>}{<v_j,v_j>}, j = 1, 2, ..., k-1$. Tiếp tục thực hiện đến khi $k = n$ ta thu được hệ trực giao $S' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Bước n+1: Chuẩn hoá các vectơ trong hệ trực giao $S' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ta thu được hệ trực chuẩn cần tìm.

3.3 Hình chiếu của một vectơ lên một không gian vectơ con

Định nghĩa 5.14. *Giả sử U, V là các không gian vectơ con của không gian Euclide E.*

(a) *Ta nói vectơ $\alpha \in E$* vuông góc *(hay* trực giao *) với U và viết $\alpha \perp U$, nếu $\alpha \perp u$ với mọi $u \in U$.*

(b) *Ta nói U* vuông góc *(hay* trực giao *) với V và viết $U \perp V$, nếu $u \perp v$ với mọi $u \in U, v \in V$.*

Định nghĩa 5.15. *Giả sử U là một không gian vectơ con của không gian Euclide E. Khi đó*

$$U^{\perp} = \{\alpha \in E | \alpha \perp U\}$$

được gọi là phần bù trực giao *của U trong E.*

Dễ thấy rằng $U^{\perp}$ cũng là một không gian vectơ con của E.

Định lý 5.16. *Giả sử U là một không gian vectơ con của không gian Euclide E. Khi đó với mỗi vectơ $x \in E$ đều thừa nhận sự phân tích duy nhất*

$$x = u + u^{\perp}$$

trong đó $u \in U$ và $u^{\perp} \in U^{\perp}$.

Định nghĩa 5.17. *Với các giả thiết như trong định lý 5.16 trên, u được gọi là hình chiếu của x lên không gian vectơ U và $u^{\perp}$ được gọi là thành phần của x trực giao với U.*

Định lý 5.18. *Giả sử U là một không gian vectơ con của không gian Euclide E và U có một cơ sở trực chuẩn là $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Khi đó hình chiếu của vectơ $x \in E$ bất kì được xác định theo công thức*

$$u = < x, v_1 > .v_1 + < x, v_2 > .v_2 + \ldots < x, v_n > .v_n$$

3.4 Bài tập

Bài tập 5.4. Cho V là không gian Euclide. Chứng minh:

a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

b) $u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2, \forall u, v \in V$.

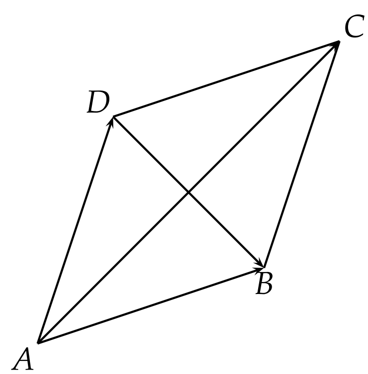
Chứng minh. a) Ta có

$$\begin{cases} \|u+v\|^2 =< u+v, u+v >= \|u\|^2 + 2 < u,v > + \|v\|^2 \\ \|u-v\|^2 =< u-v, u-v >= \|u\|^2 - 2 < u,v > + \|v\|^2 \end{cases}$$

nên

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

Ý nghĩa hình học: Đẳng thức hình bình hành

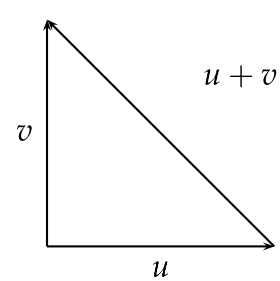


$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{DB}\right|^2 = 2\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2\right)$$

b)

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 &\Leftrightarrow \|u\|^2 + 2 < u,v > + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow < u,v >= 0 \Leftrightarrow u \perp v \end{aligned}$$

Ý nghĩa hình học: Định lý Pitago.



■

Bài tập 5.5. Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Với u, v là các véc tơ của V ta có $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n, v = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$. Đặt $< u, v >= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

a) Chứng minh $< u, v >$ là một tích vô hướng trên V.

b) Áp dụng cho trường hợp $V = \mathbb{R}^3$, với $e_1 = (1,0,1), e_2 = (1,1,-1), e_3 = (0,1,1), u = (2,-1,-2), v = (2,0,5)$. Tính $< u, v >$.

c) Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, u = 2 + 3x^2, v = 6 - 3x - 3x^2$. Tính $< u, v >$.

d) Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $\mathcal{B} = \{1 + x, 2x, x - x^2\}, u = 2 + 3x^2, v = 6 - 3x - 3x^2$. Tính $< u, v >$.

Bài tập 5.6. Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra các dạng $< p, q >$ sau có phải là tích vô hướng hay không?

a) $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

b) $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$

c) $< p, q >= \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ Trong trường hợp là tích vô hướng tính $< p, q >$ với $p = 2 - 3x + 5x^2 - x^3, q = 4 + x - 3x^2 + 2x^3$

Chứng minh. a) Dễ dàng kiểm tra các tiên đề TVH 1,2,3,4. Riêng đối với tiên đề TVH 5, tồn tại vectơ $p = x(x-1)(x-2) \neq 0$ mà:

$$< p, p >= p^2(0) + p^2(1) + p^2(2) = 0$$

Do đó biểu thức đã cho không phải là một tích vô hướng.

b) $< p, q >$ đã cho là một tích vô hướng, dễ dàng kiểm tra các tiên đề TVH1,2,3,4. Riêng tiên đề TVH5, ta có:

$$< p, p >= p^2(0) + p^2(1) + p^2(2) + p^2(3) \geq 0$$

và

$$< p, p >= 0 \Leftrightarrow p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0.$$

Giả sử $p = a + bx + cx^2 + dx^3$, giải hệ phương trình từ các điều kiện $p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0$, ta được $a = b = c = d = 0$, nghĩa là $p = 0$.

c) Biểu thức đã cho là một TVH ∎

Bài tập 5.7. Dùng phương pháp trực chuẩn hóa Gram - Schmidt xây dựng hệ trực chuẩn từ hệ véctơ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (0,1,1,1), u_3 = (0,0,1,1), u_4 = (0,0,0,1)$ trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc

Bài tập 5.8. Trong $P_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $< p, q >= \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ với $p, q \in P_2[x]$.

a) Trực chuẩn hoá Gram - Schmidt cơ sở $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ để nhân được cơ sở trực chuẩn $\mathcal{A}$.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{A}$

c) Tìm $[r]_{\mathcal{A}}$ biết $r = 2 - 3x + 3x^2$

Chứng minh. Đặt $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2$

Bước 1: Đặt $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, trong đó $\|u_1\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} 1dx = 2$, nên $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bước 2: Đặt $\overline{v_2} = u_2 + tv_1$, trong đó $t = - < u_2, v_1 >= - \int\limits_{-1}^{1} x.\frac{1}{\sqrt{2}}d\mathrm{x} = 0$, vậy $\overline{v_2} = u_2 = x$.

Chọn $v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$, trong đó $\|\overline{v_2}\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$, vậy $v_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$.

Bước 3: Đặt $\overline{v_3} = u_3 + t_1v_1 + t_2v_2$, trong đó $\begin{cases} t_1 = - < u_3, v_1 >= - \int\limits_{-1}^{1} x^2.\frac{1}{\sqrt{2}}d\mathrm{x} = -\frac{2}{3\sqrt{2}} \\ t_2 = - < u_3, v_2 >= - \int\limits_{-1}^{1} x^2.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}xd\mathrm{x} = 0 \end{cases}$

Vậy $\overline{v_3} = x^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$. Chọn $v_3 = \frac{\overline{v_3}}{\|\overline{v_3}\|}$ trong đó $\|\overline{v_3}\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}$.
Do đó, $v_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$. Tóm lại ta nhận được cơ sở trực chuẩn

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}$$

■

Bài tập 5.9. Cho không gian Euclide V hữu hạn chiều, W là không gian con của V và u là một véctơ của V. Chứng minh:

a) Tồn tại véc tơ u' của W sao cho $(u - u') \perp W$

b) Khi đó $\|u - u'\| \leq \|u - w\|, \forall w \in W$

Chứng minh. a) **Cách 1:** Do W là không gian con của V hữu hạn chiều nên W có một cơ sở trực chuẩn là $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Khi đó với mọi $u \in V$, ta đặt $u' =< u, v_1 > v_1+ < u, v_2 > v_2 + ...+ < u, v_m > v_m$. Ta sẽ chứng minh $(u - u') \perp$W. Thật vậy, vì hệ $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ trực chuẩn nên:

$$\begin{aligned} < u - u', v_i > &=< u, v_i > - < u', v_i > \\ &=< u, v_i > - \langle < u, v_1 > v_1+ < u, v_2 > v_2 + ...+ < u, v_m > v_m, v_i\rangle \\ &=< u, v_i > - < u, v_i > \\ &= 0 \end{aligned}$$

Suy ra $(u - u') \perp v_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$ nên $(u - u') \perp W$

Cách 2: Do W là không gian con của V hữu hạn chiều nên W có một cơ sở là $S' = \{v'_1, v'_2, ..., v'_m\}$, và chúng ta có thể bổ sung thêm các véctơ để được cơ sở của không gian V là $S'' = \{v'_1, v'_2, ..., v'_m, v'_{m+1}, ..., v'_n\}$. Thực hiện quá trình trực giao hoá Gram-Smidt vào hệ S ta thu được cơ sở trực chuẩn $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ của W và $\{v_1, v_2, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ của V. Khi đó:

$$\forall u \in V, u = \underbrace{a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_mv_m}_{u'} + \underbrace{a_{m+1}v_{m+1} + ...a_nv_n}_{u-u'}$$

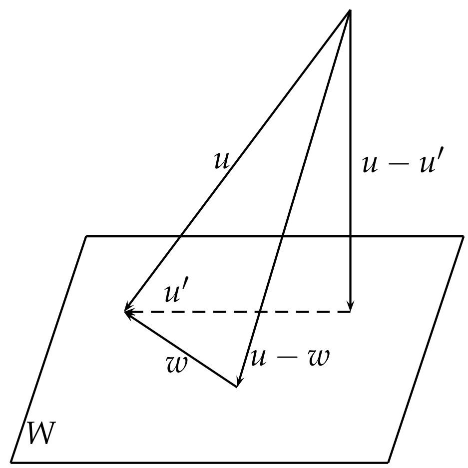
Rõ ràng $u' \in W$ và $(u - u') \perp W$.

b) Ta có

$$\|u - \mathrm{w}\|^2 = \|(u - u') + (u' - \mathrm{w})\|^2 = \|u - u'\|^2 + \|u' - \mathrm{w}\|^2 \geq \|u - u'\|^2$$

do $(u - u') \perp$W nên $(u - u') \perp (u' - w) \in W$

Ý nghĩa hình học: Nếu gọi u là một véctơ trong không gian $\mathbb{R}^3$ và W là mặt phẳng bất kì thì u' chính là hình chiếu của véctơ u lên mặt phẳng W, còn khẳng định của câu $b)$ của bài toán nói lên rằng độ dài của đường vuông góc bao giờ cũng ngắn hơn độ dài của đường xiên bất kì (xem hình vẽ).



$$\|u - u'\| \leq \|u - w\|$$

■

Bài tập 5.10. Tìm hình chiếu của véc tơ này lên véc tơ kia

a) $u = (1, 3, -2, 4)\,, v = (2, -2, 4, 5)$

b) $u = (4, 1, 2, 3, -3)\,, v = (-1, -2, 5, 1, 4)$

Chứng minh. Yêu cầu bài toán tương đương với tìm hình chiếu của u lên $W = \text{span}\,(v)$.

a) **Cách 1:** W có một cơ sở trực chuẩn là $S = \left\{ v_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{7}(2, -2, 4, 5) \right\}$. Do đó:

$$w_1 = < u, v_1 > v_1 = \left\langle (1, 3, -2, 4)\,, \frac{1}{7}(2, -2, 4, 5) \right\rangle . \frac{1}{7}(2, -2, 4, 5) = \frac{8}{49}(2, -2, 4, 5)$$

là hình chiếu của u lên v.
Cách 2: Phân tích $u = w_1 + w_2$, trong đó $w_1 \in W, w_2 \perp W$. Vì $w_1 \in W$ nên $w_1 = x.v = (2x, -2x, 4x, 5x)$, khi đó $w_2 = u - w_1 = (1 - 2x, 3 + 2x, -2 - 4x, 4 - 5x)$. Do $w_2 \perp W$ nên $w_2 \perp v$, ta có phương trình $2(1 - 2x) - 2(3 + 2x) + 4(-2 - 4x) + 5(4 - 5x) = 0$. Suy ra $x = \frac{8}{49}$ và $w_1 = \frac{8}{49}(2, -2, 4, 5)$.

Nhận xét: Hình chiếu của véctơ u lên véctơ v được xác định theo công thức:

$$w_1 = \frac{1}{\|v\|^2} < u, v > .v$$

■

Bài tập 5.11. Cho $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc. Cho $u_1 = (6, 3, -3, 6)\,, u_2 = (5, 1, -3, 1)$. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian W sinh bởi $\{u_1, u_2\}$. Tìm hình chiếu của $v = (1, 2, 3, 4)$ lên W.

Chứng minh. **Cách 1:** Trước hết ta đi trực giao hoá Gram-Smidt hệ $\{u_1, u_2\}$ đề thu được cơ sở trực chuẩn của W. $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{3\sqrt{10}}u_1$ Đặt $\overline{v_2} = u_2 + tv_1$ trong đó,

$$t = -< u_2, v_1 >= -\left\langle u_2, \frac{1}{3\sqrt{10}}u_1 \right\rangle = -\frac{1}{3\sqrt{10}} < u_2, u_1 >= -\frac{16}{\sqrt{10}}$$

Suy ra

$$\overline{v_2} = u_2 - \frac{16}{\sqrt{10}}.\frac{1}{3\sqrt{10}}u_1 = (5, 1, -3, 1) - \frac{8}{15}(6, 3, -3, 6) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{11}{5}\right)$$

$$v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{260}}(9, -3, -7, -11) = \frac{1}{\sqrt{260}}v'$$

Cuối cùng ta có

$$\begin{aligned}
w_1 &= < v, v_1 > v_1 + < v, v_2 > v_2 \\
&= \left\langle v, \frac{1}{3\sqrt{10}}u_1 \right\rangle \frac{1}{3\sqrt{10}}u_1 + \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{260}}v' \right\rangle \frac{1}{\sqrt{260}}v' \\
&= \frac{1}{90}\langle (1, 2, 3, 4), (6, 3, -3, 6) \rangle (6, 3, -3, 6) \\
&\quad + \frac{1}{260}\langle (1, 2, 3, 4), (9, -3, -7, -11) \rangle (9, -3, -7, -11) \\
&= \frac{3}{10}(6, 3, -3, 6) - \frac{31}{130}(9, -3, -7, -11) \\
&= \left(\frac{-9}{26}, \frac{21}{13}, \frac{10}{13}, \frac{115}{26}\right)
\end{aligned}$$

Cách 2: Phân tích $v = w_1 + w_2$ trong đó $w_1 \in W, w_2 \perp W$.
Vì $w_1 \in W$ nên $w_1 = x.u_1 + y.u_2 = (6x + 5y, 3x + y, -3x - 3y, 6x + y)$,
khi đó $w_2 = v - w_1 = (1 - 6x - 5y, 2 - 3x - y, 3 + 3x + 3y, 4 - 6x - y)$. Do $w_2 \perp W$ nên $w_2 \perp u_1, w_2 \perp u_2$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6(1 - 6x - 5y) + 3(2 - 3x - y) - 3(3 + 3x + 3y) + 6(4 - 6x - y) = 0 \\ 5(1 - 6x - 5y) + (2 - 3x - y) - 3(3 + 3x + 3y) + (4 - 6x - y) = 0 \end{cases}$$

Suy ra $x = \frac{73}{78}, y = \frac{-31}{26}$ và $w_1 = \left(\frac{-9}{26}, \frac{21}{13}, \frac{10}{13}, \frac{115}{26}\right)$. ∎

§4. Chéo hoá trực giao ma trận - Phương pháp chéo hoá trực giao

4.1 Chéo hoá trực giao ma trận

Định nghĩa 5.19. *Ma trận vuông P được gọi là ma trận trực giao nếu $PP^t = I$.*

Định nghĩa 5.20. *Cho ma trận vuông A, nếu tồn tại ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo thì ta nói ma trận A chéo hoá trực giao được và P là ma trận làm chéo hoá ma trận trực giao A.*

Định lý 5.21 (Điều kiện cần và đủ để một ma trận chéo hoá trực giao được). *Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A chéo hoá trực giao được là A đối xứng.*

Quy trình chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng:

Bước 1: Tìm một cơ sở cho mỗi không gian riêng của ma trận đối xứng A

Bước 2: Áp dụng quá trình trực giao hoá Gram-Smidt vào mỗi cơ sở đó đề được cơ sở trực chuẩn cho mỗi không gian riêng, ta thu được n vectơ riêng trực chuẩn $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

Bước 3: Lập ma trận P mà các cột là các vectơ xây dựng ở bước 2, ma trận P này sẽ làm chéo hoá ma trận A, tức

$$A' = P^{-1}AP = P^tAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

4.2 Phương pháp chéo hoá trực giao để rút gọn một dạng toàn phương

Giả sử dạng toàn phương Q có ma trận là ma trận đối xứng A trong một cơ sở trực chuẩn $\mathcal{S}$ của nó.

Bước 1: Chéo hoá trực giao ma trận A bởi ma trận trực giao P, trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở trực chuẩn $\mathcal{S}$ sang cơ sở trực chuẩn $\mathcal{S}'$ mới.

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

khi đó Q có dạng chính tắc

$$Q = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + ... + \lambda_n\xi_n^2$$

trong cơ sở $\mathcal{S}'$ mới.

4.3 Nhận dạng đường cong phẳng

Xét phương trình một đường cong bậc 2 tổng quát sau:

$$ax_1^2 + 2bx_1 + cx_2^2 + 2gx_1 + 2hx_2 + d = 0$$

Vế trái của phương trình là tổng của hai hàm, một hàm bậc nhất p và một dạng toàn phương q với $q = ax_1^2 + 2bx_1 + cx_2^2, p = 2gx_1 + 2hx_2 + d$. Muốn nhận dạng được đường cong trên thuộc dạng đường cong nào chúng ta thực hiện phép đổi biến trực giao để đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc rồi biện luận theo kết quả thu được. Chú ý rằng bắt buộc phải dùng phương pháp trực giao để nhận dạng một đường cong bậc hai, vì chỉ có phép biến đổi trực giao mới là phép biến đổi bảo toàn khoảng cách. Phép biến đổi Lagrange và Jacobi không có tính chất này, vì vậy nếu sử dụng các phép biến đổi Lagrange và Jacobi thì có thể dẫn đến việc nhận **nhầm** một đường tròn với một ellipse chẳng hạn.

4.4 Nhận dạng mặt bậc hai

Xét phương trình một mặt bậc hai tổng quát:

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2rx_1x_2 + 2sx_1x_3 + 2tx_2x_3 + 2ex_1 + 2gx_2 + 2hx_3 + d = 0$$

Vế trái là tổng của hai hàm, một dạng toàn phương q và một hàm bậc nhất p với:

$$\begin{cases} q = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2rx_1x_2 + 2sx_1x_3 + 2tx_2x_3 \\ p = 2ex_1 + 2gx_2 + 2hx_3 + d \end{cases}$$

Muốn nhận dạng được mặt cong trên thuộc dạng mặt bậc hai nào chúng ta thực hiện phép đổi biến trực giao để đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc rồi biện luận theo kết quả thu được. Cũng tương tự như nhận dạng đường cong, bắt buộc phải sử dụng phép biến đổi trực giao khi nhận dạng mặt bậc hai. Nếu sử dụng phép biến đổi Lagrange hoặc Jacobi thì có thể dẫn đến việc nhận **nhầm** một hình cầu và ellipsoid chẳng hạn.

4.5 Ứng dụng của phép biến đổi trực giao vào bài toán tìm cực trị có điều kiện

Cho dạng toàn phương $Q = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ có ma trận là $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn của V. Hãy tìm cực trị của Q với điều kiện $x^tx = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. Bằng phép biến đổi trực giao $x = P\xi$ ta đưa Q về dạng chính tắc:

$$Q = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + ... + \lambda_n\xi_n^2$$

Giả sử $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$, khi đó

$$\lambda_1\xi^t\xi = \lambda_1\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \leq Q \leq \lambda_n\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 = \lambda_n\xi^t\xi$$

Vì $x = P\xi$ nên $x^tx = (P\xi)^t(P\xi) = \xi^tP^tP\xi = \xi^t\xi = 1$ nên ta có

$$\lambda_1 \leq Q \leq \lambda_n$$

Vậy Q đạt giá trị lớn nhất là λ_n tại $\xi^M = (0, 0, ..., 1)$ tức là tại $x = P\xi^M$. Q đạt giá trị nhỏ nhất là λ_1 tại $\xi^m = (1, 0, ..., 0)$ tức là tại $x = P\xi^m$

4.6 Bài tập

Bài tập 5.12. Chéo hoá trực giao các ma trận sau

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.13. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$

b) $7x_1^2 - 7x_2^2 + 48x_1x_2$

c) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

d) $5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Chứng minh. a) Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ma trận A có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, ứng với nó ta tìm được 3 vectơ trực chuẩn là

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vậy thực hiện phép đổi biến

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

ta được

$$q = \xi_2^2 + 2\xi_3^2$$

■

Bài tập 5.14. Nhận dạng đường cong phẳng sau:

a) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

b) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$

c) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

d) $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 24$

e) $x^2 + xy - y^2 = 18$

f) $x^2 - 8xy + 10y^2 = 10.$

Chứng minh. b) Dùng phương pháp trực giao để rút gọn dạng toàn phương. Với ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ta có phương trình đặc trưng là

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 2$$

ứng với 2 trị riêng vừa tìm được ta tìm được 2 vectơ riêng trực chuẩn tương ứng là $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Thực hiện phép đổi biến $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ ta thu được

$$Q = 0\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[8\left(\xi_1 + \xi_2\right) + \left(-\xi_1 + \xi_2\right)\right]$$

Đường cong đã cho là một parabol. ■

Bài tập 5.15. Nhận dạng các mặt bậc 2 sau:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4$

b) $5x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 2yz = 1$

c) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 16$

d) $7x^2 - 7y^2 + 24xy + 50x - 100y - 175 = 0$

e) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$

f) $2xy + 2yz + 2xz - 6x - 6y - 4z = 0$

Chứng minh. a) Dùng phương pháp trực giao để rút gọn dạng toàn phương $q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ma trân A có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, ứng với nó ta tìm được 3 vectơ trực chuẩn là

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vậy thực hiện phép đổi biến $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$, ta được $q = \xi_2^2 + 2\xi_3^2$. Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow \xi_2^2 + 2\xi_3^2 = 4$, vậy mặt cong đã cho là một mặt trụ.

b) Dùng phương pháp trực giao để rút gọn dạng toàn phương $q = 5x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, ma trân A có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 + \sqrt{10}, \lambda_3 = 4 - \sqrt{10}$, giả sử ứng với nó ta tìm được 3 vectơ trực chuẩn là

$$v_1 = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix}$$

Vậy thực hiện phép đổi biến

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

ta được $q = \left(4+\sqrt{10}\right)\xi_2^2 + \left(4-\sqrt{10}\right)\xi_3^2$. Ta có

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow \left(4+\sqrt{10}\right)\xi_2^2 + \left(4-\sqrt{10}\right)\xi_3^2$$

Vậy mặt cong đã cho là một mặt trụ. ■

Bài tập 5.16. Cho $Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

a) Tìm $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}{Max} Q(x_1,x_2,x_3)$, $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}{Min} Q(x_1,x_2,x_3)$. Với giá trị nào thì $Q(x_1,x_2,x_3)$ đạt max, min.

b) Tìm $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{Max} Q(x_1,x_2,x_3)$, $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{Min} Q(x_1,x_2,x_3)$

Chứng minh. a) $A = \begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$, PTĐT $-\lambda^3 + 27\lambda^2 - 207\lambda + 405 = 0$, A có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 15$, và 3 vectơ riêng trực chuẩn tương ứng là:

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

ta được

$$Q = 3\xi_1^2 + 9\xi_2^2 + 15\xi_3^2$$

với điều kiện $x^t x = (P\xi)^t (P\xi) = \xi^t P^t P\xi = \xi^t\xi = 1$, nên ta có $3 \le Q \le 15$ Vậy Q đạt giá trị lớn nhất là 15 tại $\xi^M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tức là tại $x = P\xi^M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Q đạt giá trị nhỏ nhất là 3 tại $\xi^m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tức là tại $x = P\xi^m = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) Theo câu a) ta có $Q = 3\xi_1^2 + 9\xi_2^2 + 15\xi_3^2$, với điều kiện $x^t x = (P\xi)^t (P\xi) = \xi^t P^t P\xi = \xi^t \xi = 16$, nên ta có $48 \le Q \le 240$. Vậy Q đạt giá trị lớn nhất là 240 tại $\xi^M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ tức là tại $x = P\xi^M = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Q đạt giá trị nhỏ nhất là 48 tại $\xi^m = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tức là tại $x = P\xi^m = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ∎

Chú ý: Xét bài toán: cho dạng toàn phương $Q = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ có ma trận là $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn của V. Hãy tìm cực trị của Q với điều kiện $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$. Khi đó đặt $y_i = \frac{x_i}{a_i}$ thì $Q = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_i y_j$, và điều kiện trở thành $xy_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 = 1$, chúng ta quy về bài toán tìm cực trị đã xét ở trên.

Bài tập 5.17. Cho A, B là các ma trận vuông đối xứng cấp n có các trị riêng đều dương. Chứng minh $A + B$ cũng có các trị riêng dương

Chứng minh. Giả sử A, B là ma trận của các dạng toàn phương ψ, φ trong một cơ sở trực chuẩn nào đó của $\mathbb{R}^n$, tức là

$$\begin{cases} \psi(x,x) = x^t Ax \\ \varphi(x,x) = x^t Bx \end{cases}$$

Khi đó $(\psi + \varphi)(x,x) = x^t (A+B)x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, tức là $A + B$ là ma trận của dạng toàn phương $\psi + \varphi$ trong cơ sở trực chuẩn đó. Do các trị riêng của A, B đều dương nên ψ, φ là các dạng toàn phương xác định dương. Tổng của hai dạng toàn phương xác định dương là một dạng toàn phương xác định dương nên $\psi + \varphi$ xác định dương, và do đó $A + B$ cũng có các trị riêng dương. ∎

Bài tập 5.18. Trong không gian Ơclit n chiều V , với cơ sở trực chuẩn $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, cho f là biến đổi tuyến tính có ma trận A trực giao. Chứng minh $< f(x), f(y) >=< x, y >$ với mọi x, y của V.

Chứng minh. Lời giải: Giả sử $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n, y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$. Khi đó ta có biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong cơ sở trực chuẩn B của không gian Euclide V như sau:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = [x]_B^t \, [y]_B$$

Vậy

$$\begin{aligned} < f(x), f(y) > &= [f(x)]_B^t \, [f(y)]_B \\ &= (A\,[x]_B)^t \, (A\,[y]_B) \\ &= [x]_B^t \, A^t A \, [y]_B \\ &= [x]_B^t \, [y]_B \\ &=< x, y > \end{aligned}$$ ■

Bài tập 5.19. Trong không gian Ơclit n chiều V , với cơ sở trực chuẩn $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, cho f là biến đổi tuyến tính trên V có tính chất $\|f(x)\| = \|x\|$ với mọi véc tơ x của V. Chứng minh $< f(x), f(y) >=< x, y >$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh:

$$< f(e_i), f(e_j) >=< e_i, e_j >= \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$$

Thật vậy. Nếu $i = j$ thì $< f(e_i), f(e_i) >= \|f(e_i)\|^2 = \|e_i\|^2 = 1$.
Nếu $i \neq j$ thì $\|f(e_i) + f(e_j)\|^2 = \|f(e_i + e_j)\|^2 = \|e_i + e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = \|f(e_i)\|^2 + \|f(e_j)\|^2$ nên $< f(e_i), f(e_j) >= 0$.
Đến đây chúng ta có 2 cách lập luận:

Cách 1: Gọi $A = [[f(e_1)]_B, [f(e_2)]_B, ..., [f(e_n)]_B]$ là ma trận của ánh xạ f trong cơ sở B. Vì $< f(e_i), f(e_j) >=< e_i, e_j >= \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$ nên $A^{-1} = A^t$. Theo bài 18 ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Giả sử $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n, y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$ thì

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

$$\begin{aligned} &< f(x), f(y) > \\ &=< x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_n f(e_n), y_1 f(e_1) + y_2 f(e_1) + ... + y_n f(e_n) > \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \\ &=< x, y > \end{aligned}$$ ■

Bài tập 5.20. Cho V là không gian Ơclit n chiều, V_1 là không gian con m chiều của V. Gọi $V_2 = \{x \in V |\, x \perp v, \forall v \in V_1\}$.

a) Chứng minh V_2 là không gian véctơ con của V.

b) Chứng minh V_1 và V_2 bù nhau.

c) Tìm $\dim V_2$

Chứng minh. a) Ta cần chứng minh:

$$\begin{cases} \forall x, y \in V_2 & \text{thì } x + y \in V_2 \\ \forall k \in R, x \in V & \text{thì } kx \in V_2 \end{cases}$$

Dễ kiểm tra.

b) Ta cần chứng minh: $\begin{cases} V_1 + V_2 = V \\ V_1 \cap V_2 = \{0\} \end{cases}$. Thật vậy: Với mọi $u \in V$, gọi u_1 là hình chiếu trực giao của u lên V_1, u_2 là thành phần của u trực giao với V_1. Khi đó ta có $u = u_1 + u_2$, và do đó $V \subseteq V_1 + V_2$. Mặt khác V_1, V_2 là các không gian vectơ con của V nên $V_1 + V_2 \subseteq V$. Suy ra $V_1 + V_2 = V$.
Hơn nữa nếu $u \in V_1 \cap V_2$ thì $< u, u >= 0$, do đó $u = 0$. Vậy $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

c) Ta gọi $f : V \to V_1, f(u) = u_1$, trong đó u_1 là hình chiếu trực giao của u lên V_1, là ánh xạ chiếu trực giao. Dễ dàng chứng minh f là ánh xạ tuyến tính. Do f là toàn ánh nên $\operatorname{Im} f = V_1$, hơn nữa $u \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow u \in V_2$ nên $\operatorname{Ker} f = V_2$. Khi đó

$$n = \dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V_1 + \dim V_2$$

Suy ra $\dim V_2 = n - m$. ■

Bài tập 5.21. Cho V là không gian Ơclit n chiều, chứng minh điều kiện cần và đủ để ánh xạ $f : V \to \mathbb{R}$ tuyến tính là tồn tại véctơ a cố định của V để $f(x) =< a, x >, \forall x \in V$

Chứng minh. $\boxed{\Leftarrow}$ Điều kiện đủ: Dễ dàng chứng minh ánh xạ $f(x) =< a, x >, \forall x \in V$ là ánh xạ tuyến tính với mỗi vectơ a cố định đã được chọn trước.

$\boxed{\Rightarrow}$ Điều kiện cần: Giả sử $f : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính bất kỳ.

(a) Nếu $f \equiv 0$ thì ta chọn vectơ $a = 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

(b) Nếu $f \not\equiv 0$. Ta sẽ chứng minh $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$. Thật vậy, vì $f \not\equiv 0$ nên tồn tại ít nhất một vectơ $y \in V, y \notin \operatorname{Ker} f$. Cố định một vectơ y như vậy, khi đó với mỗi $x \in V$, đặt $\lambda = \frac{f(x)}{f(y)}, z = x - \lambda y = x - \frac{f(x)}{f(y)} y$ thì $f(z) = 0 \Rightarrow z \in \operatorname{Ker} f$. Ta có $x = z + \lambda y$, tức là mỗi vectơ $x \in V$ thừa nhận phân tích thành tổng của 2 vectơ, một vectơ thuộc $\operatorname{Ker} f$ và một vectơ thuộc $\operatorname{span} y$. Điều đó có nghĩa là $V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{span} y$ và suy ra $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$.
Bây giờ giả sử V có phân tích thành tổng trực giao $V = \operatorname{Ker} f + (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ thì

$\dim(\text{Ker}f)^{\perp} = 1$, tức $(\text{Ker}f)^{\perp} = \text{span}(y_0)$, trong đó $\|y_0\| = 1$. Đặt $a = f(y_0)\,y_0 \in (\text{Ker}f)^{\perp}$, ta sẽ chứng minh vectơ a thoã mãn yêu cầu bài ra, tức là $f(x) = < a, x >, \forall x \in V$. Thật vậy: Với mỗi $x \in V$, do $V = \text{Ker}f + (\text{Ker}f)^{\perp} = \text{Ker}f + \text{span}(y_0)$ nên $x = \lambda y_0 + y, y \in \text{Ker}f$. Khi đó:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda f(y_0) + f(y) \\ &= \lambda f(y_0) \\ &= \lambda < f(y_0)\,y_0, y_0 > \\ &= \lambda < a, y_0 > \\ &= < a, \lambda y_0 > \\ &= < a, \lambda y_0 + y > \left(< a, y > = 0 \text{ do } a \in (\text{Ker}f)^{\perp}, y \in (\text{Ker}f) \right) \\ &= < a, x > \end{aligned}$$

■

Bài tập 5.22. Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các véc tơ $v_1 = (1,1,0,0,0)\,, v_2 = (0,1,-1,2,1)\,, v_3 = (2,3,-1,2,1)$ .Gọi $V = \left\{ x \in R^5 \middle| \, x \perp v_i, i = 1,2,3 \right\}$

a) Chứng minh V là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^5$.

b) Tìm $\dim V$.

Chứng minh. **Cách 1.** Đặt $W = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, theo bài tập 5.20 ta đã chứng minh $V = W^{\perp}$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^5$, và

$$\dim V = 5 - \dim W = 5 - \text{rank}\{v_1, v_2, v_3\} = 5 - 2 = 3$$

Cách 2. Nhận xét rằng vì $V = \left\{ x \in R^5 \middle| \, x \perp v_i, i = 1,2,3 \right\}$ nên V chính là không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp Gauss ta được $\dim V = 3$ và một cơ sở của V là $\{(-1,1,1,0,0)\,, (2,-2,0,1,0)\,, (1,-1,0,0,1)\}$. ■

PHỤ LỤC A

MỘT SỐ MA TRẬN ĐẶC BIỆT

§1. MA TRẬN LUỸ LINH

1.1 Các định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1.1. *a) Ma trận A vuông cấp n được gọi là luỹ linh nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $A^k = 0$. Nếu có thêm $A^{k-1} \neq 0$ thì k được gọi là bậc lũy linh của ma trận A.*

b) Tự đồng cấu $\varphi : V \to V$ được gọi là lũy linh nếu có số nguyên dương k sao cho $\varphi^k = 0$. Nếu thêm vào đó $\varphi^{k-1} \neq 0$ thì k được gọi là bậc lũy linh.

Định lý 1.2. *Bậc luỹ linh của một ma trận lũy linh bằng cấp cao nhất của các khối Jordan của nó.*

Định lý 1.3. *Cho A là ma trận luỹ linh, vuông cấp n. Khi đó $A^n = 0$. Nghĩa là, bậc lũy linh của ma trận A luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng n.*

Định lý 1.4. *Đa thức đặc trưng của một ma trận vuông cấp n lũy linh bằng λ^n.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử A có bậc lũy linh bằng k. Khi đó, tồn tại véctơ $v \neq 0$ sao cho $A^k v = 0$ và $A^{k-1} v \neq 0$. Như thế, $\alpha = A^{k-1} v \neq 0$ chính là một véctơ riêng của A ứng với trị riêng $\lambda = 0$. Ta sẽ chứng minh $\lambda = 0$ này là trị riêng duy nhất của A. Giả sử λ_0 là một trị riêng của A. Khi đó, tồn tại véctơ $v \neq 0$ sao cho $Av = \lambda_0 v \Rightarrow A^k v = \lambda_0^k v = 0$. Vì $v \neq 0$ nên $\lambda_0^k = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$. ■

Định lý 1.5. *Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng A lũy linh khi và chỉ khi $\operatorname{tr}(A^p) = 0$ với mọi $p = 1, 2, \ldots, n$.*

Định lý 1.6. *Cho $A : V \to V$ là một toán tử tuyến tính và W là một không gian con bất biến của V. Đặt $A_1 : W \to W$ và $A_2 : V/W \to V/W$ là các toán tử cảm sinh bởi toán tử A. Chứng minh rằng nếu A_1 và A_2 là lũy linh thì A cũng là lũy linh.*

1.2 Bài tập

Bài tập 1.1. *A là ma trận lũy linh nếu và chỉ nếu tất cả giá trị riêng của A đều bằng 0.*

Bài tập 1.2. *Chứng minh rằng nếu A là ma trận lũy linh thì $I - A$ là ma trận khả nghịch.*

Chứng minh. Ta có

$$I = I - A^k = (I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})$$

Bài tập 1.3. *Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông A luôn có thể phân tích $A = B + C$ với C là một ma trận lũy linh và B là ma trận chéo hóa được và $BC = CB$.*

Bài tập 1.4. *Cho A và B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn B là ma trận lũy linh và $AB = BA$. Chứng minh rằng $\det(A + B) = \det A$*

Bài tập 1.5. *Cho A và B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $A^{2008} = I; B^{2009} = 0$ và $AB + 4A + 2009B = 0$. Chứng minh rằng $(A + B)$ là ma trận không suy biến.*

Bài tập 1.6. *(2000) Cho A và B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $A^{1999} = 0; B^{2000} = 0$ và $AB = BA$. Chứng minh rằng $(A + B + I)$ khả nghịch.*

Chứng minh. Nhận xét rằng $(A + B)^{3999} = 0$ nên $(A + B)$ là ma trận luỹ linh, suy ra điều phải chứng minh. ∎

Bài tập 1.7. *Cho A và B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $A^{1999} = I; B^{2000} = I$ và $AB = BA$. Chứng minh rằng $(A + B + I)$ khả nghịch.*

Chứng minh. Giả sử $(A + B + I)$ suy biến. Khi đó tồn tại vecto X khác 0 sao cho $(A + B + I)X = 0$. Hay $(A + I)X = -BX$ suy ra $(A + I)^{1999}X = -B^{1999}X = -X$, suy ra $((A + I)^{1999} + I)X = 0$. Theo giả thiết $(A^{2000} - I)x = 0$.
Ta sẽ chứng minh hai đa thức $(x + 1)^{1999} + 1$ và $x^{2000} - 1$ là nguyên tố cùng nhau. Thậy vậy, giả sử chúng có nghiệm chung là z. Khi đó $(z + 1)^{1999} = -1$ và $z^{2000} = 1$. Từ đó suy ra môđun của z và $(z + 1)$ đều là 1. Do đó, $\arg z = \pm\frac{2\pi}{3}$ và

$$z^{2000} = \cos\frac{\pm 4000\pi}{3} + \sin\frac{\pm 4000\pi}{3} = \cos\frac{\pm 4\pi}{3} + \sin\frac{\pm 4\pi}{3} \neq 1$$

Vậy tồn tại các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ để $P(x)[(x + 1)^{1999} + 1] + Q(x)(x^{2000} - 1) = 1$
Từ đó suy ra $[P(A)[(A + 1)1999 + 1] + Q(A)(A2000 - I)]X = X$ hay $X = 0$, mâu thuẫn với việc chọn X. Vậy ta có điều phải chứng minh ∎

Bài tập 1.8. *(IMC) Cho hai ma trận vuông cấp* n, A *và* B*. Giả sử tồn tại* $(n+1)$ *số* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *phân biệt sao cho các ma trận* $C_i = A + t_i B$ *là các ma trận lỹ linh với mọi* $i = 1, ..., n+1$*. Chứng minh rằng* A *và* B *cũng là các ma trận lũy linh*

Bài tập 1.9. *Tìm các ma trận* A, B *sao cho* $\lambda A + \mu B$ *là luỹ linh với mọi* λ, μ *nhưng không tồn tại ma trận* P *sao cho* $P^{-1}AP$ *và* $P^{-1}BP$ *là các ma trận tam giác.*

§2. Toán tử chiếu - Ma trận lũy đẳng

2.1 Các định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1.7. *i) Toán tử $f : V \to V$ được gọi là toán tử chiếu nếu $f^2 = f$.*

ii) Ma trận P được gọi là ma trận lũy đẳng nếu $P^2 = P$.

Giả sử λ là một trị riêng của P ứng với véc tơ riêng $v \neq 0$. Khi đó,

$$\lambda v = Pv = P^2 v = P(Pv) = P(\lambda v) = \lambda Pv = \lambda^2 v.$$

Vậy,

$$\lambda v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda(1 - \lambda)v = 0.$$

Vì $v \neq 0$ nên $\lambda = 0$ hoặc $\lambda = 1$. Tức là, một ma trận lũy đẳng chỉ có thể có trị riêng là 0 và 1 mà thôi. Hơn nữa, nó chéo hóa được theo định lý sau đây.

Định lý 1.8. *Tồn tại một cơ sở của không gian sao cho ma trận của toán tử chiếu có dạng* $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

Bổ đề 1.9. *Giả sử P là ma trận của toán tử chiếu $f : V \to V$. Khi đó,*

$$V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}),$$

ở đó id *là toán tử đồng nhất.*

Chứng minh. 1) Nếu $v \in \operatorname{Ker} f$ và $v \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id})$ thì

$$fv = 0, \quad (f - \operatorname{id})v = 0 \Rightarrow v = 0.$$

2) Mỗi $v \in V$ đều có phân tích

$$v = fv + (v - fv),$$

ở đó

i) $fv \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id})$, vì $(f - \operatorname{id})fv = (f^2 - f)v = 0$,

ii) $v - fv \in \operatorname{Ker} f$, vì $f(v - fv) = fv - f^2 v = 0$. ■

Vì $\dim V = n$ nên giả sử $e_1, e_2, \ldots, e_m$ là một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ và $e_{m+1}, \ldots, e_n$ là một cơ sở của $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id})$ thì

i) $fe_i = 0 \Rightarrow fe_i = 0e_i \Rightarrow \{e_i\}_{i=1}^m$ là các véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 0$.

ii) $(f - \operatorname{id})e_i = 0 \Rightarrow fe_i = e_i \Rightarrow \{e_i\}_{i=m}^n$ là các véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 1$.

Như vậy, tồn tại một cơ sở $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ của không gian véc tơ V gồm toàn các véc tơ riêng của f. Nói cách khác, f chéo hóa được, hay P chéo hóa được.

Hệ quả 1.10. *Có một tương ứng 1-1 giữa toán tử chiếu và phân tích $V = W_1 \oplus W_2$ của không gian V. Nói rõ hơn, với mỗi phân tích $V = W_1 \oplus W_2$, tồn tại toán tử chiếu P thỏa mãn $P(w_1 + w_2) = w_1$; và ngược lại, với mỗi toán tử chiếu P có một phân tích tương ứng $V = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$.*

Toán tử P khi đó có thể được gọi là toán tử chiếu lên W_1 theo hướng W_2.

Hệ quả 1.11. *Nếu P là toán tử chiếu thì $\operatorname{rank} P = \operatorname{tr} P$.*

Hệ quả 1.12. *Nếu P là toán tử chiếu thì $I - P$ cũng là một toán tử chiếu, hơn nữa $Ker(I - P) = \operatorname{Im} P$ và $\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P$.*

Định lý 1.13. *Toán tử chiếu P là Hermitian nếu và chỉ nếu $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P$.*

Định lý 1.14 (Djoković, 1971). *Cho $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, ở đó $V_i \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, k$. Đặt $P_i : V \to V_i$ là các phép chiếu trực giao và $A = P_1 + \ldots + P_k$. Khi đó $0 \leq |A| \leq 1$, và $|A| = 1$ nếu và chỉ nếu $V_i \perp V_j$ với mọi $i \neq j$.*

2.2 Bài tập

Bài tập 1.10. *Cho P là một toán tử chiếu và $V = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$. Chứng minh rằng nếu $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P$ thì Pv là hình chiếu trực giao của v lên $\operatorname{Im} P$.*

Bài tập 1.11. *Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương*

a. *A là ma trận lũy đẳng.*

b. $\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} A + \operatorname{Ker} A$ *với* $Ax = x$ *với mọi* $x \in \operatorname{Im} A$.

c. $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im}(I - A)$

d. $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - A) = n$

e. $\operatorname{Im}(A) \cap \operatorname{Im}(I - A) = \{0\}$

Bài tập 1.12. *Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng A là lũy đẳng khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{tr}(A)$ và $\operatorname{rank}(I - A) = \operatorname{tr}(I - A)$.*

Bài tập 1.13. *Cho P_1 và P_2 là các toán tử chiếu. Chứng minh rằng*

1. *$P_1 + P_2$ là toán tử chiếu khi và chỉ khi* $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.

2. *$P_1 - P_2$ là toán tử chiếu khi và chỉ khi* $P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$.

Bài tập 1.14 (Định lý ergodic). *Cho A là ma trận unita. Chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} A^i x = Px,$$

ở đó P là một phép chiếu Hermitian lên $\operatorname{Ker}(A - I)$.

Bài tập 1.15. *Cho A và B là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $AB = A$ và $BA = B$ thì A, B là các ma trận lũy đẳng.*

Bài tập 1.16. *Cho A và B là các ma trận vuông cấp n, lũy đẳng. Tìm điều kiện cần và đủ để $(A + B)$ là ma trận lũy đẳng.*

Bài tập 1.17. *Cho A là ma trận lũy đẳng. Chứng minh rằng $(A + I)^k = I + (2^k - 1)A$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.*

Bài tập 1.18. *(OL) Cho A, B là các ma trận cùng cấp, lũy đẳng và $AB + BA = 0$. Tính* $\det(A - B)$.

Bài tập 1.19. *Cho A, B là các ma trận cùng cấp, lũy đẳng và $I - (A + B)$ khả nghịch. CMR* $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Bài tập 1.20. *Cho $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các toán tử tuyến tính trên không gian véctơ n chiều V sao cho $A_1 + A_2 + \ldots + A_k = I$. Chứng minh rằng nếu các điều kiện sau là tương đương*

1. *$A_1, \ldots, A_k$ là các toán tử chiếu.*

2. *$A_iA_j = 0$ với mọi $i \neq j$.*

3. $\operatorname{rank} A_1 + \ldots + \operatorname{rank} A_k = n$.

Bài tập 1.21. *Cho $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các ma trận lũy đẳng. Chứng minh rằng nếu $A_1 + A_2 + \ldots + A_k = I$ thì $A_iA_j = 0$ với mọi $i \neq j$.*

§3. MA TRẬN ĐỐI HỢP

Định nghĩa 1.15. *Toán tử tuyến tính (hoặc ma trận) A được gọi là đối hợp nếu $A^2 = I$.*

Dễ dàng kiểm chứng rằng P là ma trận lũy đẳng nếu và chỉ nếu $2P - I$ là ma trận đối hợp. Giả sử λ là một trị riêng của A ứng với véc tơ riêng $v \neq 0$. Ta có

$$v = Iv = A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda^2 v.$$

Vậy,

$$v = \lambda^2 v \Rightarrow (1-\lambda)(1+\lambda)v = 0.$$

Vì $v \neq 0$ nên $\lambda = 1$ hoặc $\lambda = -1$. Tức là, một ma trận đối hợp chỉ có thể có trị riêng bằng 1 hoặc -1. Hơn nữa, nó chéo hóa được.

Bài tập A.1. [Cuối kì, K61] Cho ma trận vuông A thỏa mãn $A^2 = I$. Chứng minh rằng A chéo hóa được.

Ta chứng minh định lý sau đây.

Định lý 1.16. *Tồn tại một cơ sở của không gian sao cho ma trận của toán tử đối hợp có dạng* $\operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$.

Bổ đề 1.17. *Nếu A là một ma trận đối hợp và là ma trận của toán tử $f : V \to V$ thì*

$$V = \operatorname{Ker}(f + \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}),$$

ở đó id *là toán tử đồng nhất.*

Chứng minh. 1) Nếu $v \in \operatorname{Ker}(f + \operatorname{id})$ và $v \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id})$ thì

$$(f + \operatorname{id})v = 0, \quad (f - \operatorname{id})v = 0 \Rightarrow f(v) = v = -v \Rightarrow v = 0.$$

2) Mỗi $v \in \mathcal{V}$ đều có phân tích

$$v = \operatorname{id} v = f^2 v = \frac{1}{2}\left[(f + \operatorname{id})fv + (f - \operatorname{id})fv\right],$$

ở đó

i) $(f + \operatorname{id})fv \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id})$, vì $(f - \operatorname{id})(f + \operatorname{id})fv = (f^2 - \operatorname{id})fv = 0$,

ii) $(f - \operatorname{id})fv \in \operatorname{Ker}(f + \operatorname{id})$, vì $(f + \operatorname{id})(f - \operatorname{id})fv = (fr - \operatorname{id})fv = 0$. ■

Vì $\dim V = n$ nên giả sử $e_1, e_2, \ldots, e_m$ là một cơ sở của $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id})$ và $e_{m+1}, \ldots, e_n$ là một cơ sở của $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{id})$ thì

i) $(f - \mathrm{id})e_i = 0 \Rightarrow fe_i = e_i \Rightarrow \{e_i\}_{i=1}^m$ là các véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 1$.

ii) $(f + \mathrm{id})e_i = 0 \Rightarrow fe_i = -e_i \Rightarrow \{e_i\}_{i=m}^n$ là các véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = -1$.

Như vậy, tồn tại một cơ sở $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ của không gian véc tơ V gồm toàn các véc tơ riêng của f. Nói cách khác, f chéo hóa được, hay A chéo hóa được.

Định lý 1.18 (Djokovíc, 1967). *Ma trận A có thể biểu diễn được dưới dạng tích của 2 ma trận đối hợp nếu và chỉ nếu các ma trận A và A^{-1} là đồng dạng.*

Hệ quả 1.19. *Nếu B là một ma trận khả nghịch sao cho $X^T BX = B$ thì X có thể biểu diễn được dưới dạng tích của 2 ma trận đối hợp. Nói riêng, mọi ma trận trực giao đều có thể biểu diễn được dưới dạng tích của 2 ma trận đối hợp.*

Bài tập 1.22. *Chứng minh rằng A là ma trận đối hợp nếu và chỉ nếu $\frac{1}{2}(I + A)$ là ma trận lũy đẳng.*

§4. MA TRẬN ĐỐI XỨNG, PHẢN ĐỐI XỨNG

4.1 Các định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1.20. *Ma trận thực A được gọi là*

i) đối xứng nếu $A^T = A$,

ii) phản đối xứng nếu $A^T = -A$.

Kí hiệu

i) S_n là tập hợp tất cả các ma trận đối xứng cấp n,

ii) Λ_n là tập hợp tất cả các ma trận phản đối xứng cấp n.

Chú ý rằng ma trận phản xứng cấp n lẻ có định thức bằng 0.

Định lý 1.21. *S_n và Λ_n là các không gian véc tơ con của $M_n(\mathbb{R})$. Hơn nữa,*

$$\dim S_n = \dim \Lambda_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

và

$$M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus \Lambda_n.$$

Định lý trên có nghĩa là, S_n là Λ_n là các không gian véc tơ con bù nhau trong $M_n(\mathbb{R})$. Một cách tương đương, mỗi ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$ đều có một phân tích duy nhất dưới dạng tổng của một ma trận đối xứng và một ma trận phản đối xứng, như sau:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T),$$

ở đó $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ là một ma trận đối xứng và $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ là một ma trận phản đối xứng.

Chú ý 1.22. *a) Nếu $n \geq 2$ thì tích của hai ma trận đối xứng có thể không phải là một ma trận đối xứng. Chẳng hạn như*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tuy nhiên, công thức $(AB)^T = B^T A^T$ chứng minh khẳng định sau đây.

"Cho A, B là các ma trận đối xứng cấp n. Khi đó, AB là một ma trận đối xứng khi và chỉ khi $AB = BA$."

b) Nếu $n \geq 3$ thì tích của hai ma trận phản đối xứng có thể không đối xứng, cũng không phản đối xứng. Chẳng hạn như

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bổ đề 1.23. *Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = BA$. Khi đó, nếu A, B là các ma trận đối xứng hoặc phản đối xứng (có 4 trường hợp) thì AB đối xứng hoặc phản đối xứng theo một quy tắc về dấu.*

1) Nếu A, B đối xứng thì AB đối xứng,

2) Nếu A đối xứng, B phản đối xứng thì AB phản đối xứng,

3) Nếu A phản đối xứng, B đối xứng thì AB phản đối xứng,

4) Nếu A, B phản đối xứng thì AB đối xứng.

Hệ quả 1.24. *Nếu A là một ma trận phản xứng thì A^2 là một ma trận đối xứng, xác định không dương.*

Bổ đề 1.25. *Các trị riêng khác 0 của ma trận phản xứng là thuần ảo.*

Định lý 1.26. *Điều kiện $x^T Ax = 0$ thỏa mãn với mọi x khi vào chỉ khi A là một ma trận phản xứng.*

Bổ đề 1.27. *Hạng của một ma trận phản xứng là một số chẵn.*

Định nghĩa 1.28. *Toán tử tuyến tính A trên không gian Euclidean được gọi là phản xứng nếu ma trận của nó trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là phản xứng.*

Định lý 1.29. *Đặt $\Lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_i \\ \lambda_i & 0 \end{pmatrix}$. Với mọi toán tử tuyến tính phản xứng A, tồn tại một cơ sở trực chuẩn sao cho ma trận của nó trong cơ sở trực chuẩn đó có dạng*

$$\operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k, 0, \ldots, 0).$$

4.2 Bài tập

Bài tập 1.23. *Chứng minh rằng nếu A là một ma trận phản xứng thì $I + A$ là một ma trận khả nghịch.*

Bài tập 1.24. *Cho A là một ma trận phản xứng, khả nghịch. Chứng minh rằng A^{-1} cũng là một ma trận phản xứng.*

Bài tập 1.25. *Chứng minh rằng mọi nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận AB, ở đó A và B là các ma trận phản xứng cấp $2n$, đều có bội lớn hơn 1.*

§5. VẾT CỦA MA TRẬN

5.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1.30. *Vết của ma trận A là tổng của các phần tử trên đường chéo của nó, được kí hiệu là* $\operatorname{tr} A$.

Dễ thấy

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} = \operatorname{tr} BA.$$

Do đó,

$$\operatorname{tr} PAP^{-1} = \operatorname{tr} P^{-1}AP = \operatorname{tr} A,$$

nghĩa là, hạng của ma trận của toán tử tuyến tính không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian. Một số tính chất khác của vết của ma trận:

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B, \operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr} A, \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^T$,

2. $\operatorname{tr}(ABCD) = \operatorname{tr}(BCDA) = \operatorname{tr}(CDAB) = \operatorname{tr}(DABC)$, tuy nhiên $\operatorname{tr} ABC \neq \operatorname{tr} ACB$.

3. Nếu A là đối xứng và B là phản đối xứng thì $\operatorname{tr} AB = 0$.

4. $\operatorname{tr} A$ bằng tổng các trị riêng của A (kể cả bội), nghĩa là $\operatorname{tr} A = \sum\limits_i \lambda_i$. Tổng quát hơn, $\operatorname{tr} A^k = \sum\limits_i \lambda_i^k$. Nói riêng, nếu A là ma trận lũy đẳng ($A^2 = A$) thì $\operatorname{tr} A = \operatorname{rank} A$, nếu A là ma trận luỹ linh thì $\operatorname{tr} A = 0$.

Nếu A là ma trận của toán tử tuyến tính T trên không gian Euclidean thì:

Định lý 1.31. *Cho $e_1, \ldots, e_n$ là một cơ sở chuẩn tắc. Khi đó*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} (Te_i, e_i).$$

Định lý 1.32. *Cho A là một ma trận cỡ $m \times n$. Nếu với mọi ma trận B cỡ $n \times m$ ta có* $\operatorname{tr} AB = 0$ *thì $A = 0$.*

Chứng minh. Nếu $A \neq 0$ thì $\operatorname{tr}(AA^T) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}^2 > 0$. ■

5.2 Bài tập

Bài tập 1.26. *Cho* A *là một ma trận vuông cấp* n *sao cho* $\operatorname{tr} AB = 0$ *với mọi ma trận* B *thỏa mãn* $\operatorname{tr} B = 0$. *Chứng minh rằng* $A = \lambda I$.

Bài tập 1.27. *Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận vuông* A, B, C, D *cấp* n *thỏa mãn* $\begin{cases} AC + DB = I, \\ CA + BD = 0. \end{cases}$

Bài tập 1.28. *Cho* A *là một ma trận vuông cấp* 3. *Chứng minh rằng* $A^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{rank} A \leq 1, \\ \operatorname{tr}(A) = 0. \end{cases}$

Bài tập 1.29. *Cho* A *là ma trận cỡ* $n \times p$ *và* B *là ma trận cỡ* $q \times n$. *Chứng minh*

$$\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AXB) = 0 \Leftrightarrow BA = 0.$$

Bài tập 1.30. *Tìm tất cả các ánh xạ tuyến tính* $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *sao cho*

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA).$$

§6. Ma trận khối

6.1 Định thức của ma trận khối

Đặt vấn đề.

1) Nếu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là một ma trận vuông thì $\det M = ad - bc$.

2) Nếu A, B, C, D là các ma trận vuông cùng cấp và $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ thì $\det M = ?$

Bổ đề 1.33. *Cho A, B, C, D là các ma trận vuông cùng cấp. Khi đó,*

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D.$$

Định lý 1.34. *Nếu A, B, C, D là các ma trận vuông cùng cấp và nếu*

i) $CD = DC$ thì

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

ii) $AC = CA$ thì

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

iii) $BD = DB$ thì

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC).$$

iv) $AB = BA$ thì

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB).$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp $CD = DC$. Các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự. Ta có

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Do đó, áp dụng Bổ đề 1.39

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det D = \det(AD - BC) \det D. \tag{1.1}$$

i) Nếu $\det D \neq 0$ thì (1.1) dẫn đến $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

ii) Nếu $\det D = 0$ ta áp dụng kĩ thuật giới hạn trong giải tích. Đặt $D_\epsilon = D - \epsilon I$. Vì ma trận D chỉ có tối đa n trị riêng, nên có thể chọn ϵ đủ nhỏ sao cho ϵ không phải là trị riêng của D. Khi đó, $\det(D - \epsilon I) \neq 0$ và áp dụng kết quả đã thu được ở trên ta có

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_\epsilon \end{pmatrix} = \det(AD_\epsilon - BC).$$

Cho $\epsilon \to 0$ dẫn đến điều phải chứng minh. ■

Định lý 1.35. *Chứng minh rằng nếu A, B là các ma trận vuông cùng cấp thì* $\det(AB) = \det A \det B$.

Chứng minh. Xét các ma trận khối sau

$$P = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -A & B \end{pmatrix}$$

Bạn đọc có thể kiểm tra dễ dàng rằng $R = PQ$.

i) Một mặt,

$$\det R = (-1)^n \det \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & -I \end{pmatrix} = (-1)^n \det(AB) \det(-I) = (-1)^n (-1)^n \det(AB) = \det(AB).$$

ii) Mặt khác, $\det PQ = \det Q = \det A \det B$. ■

Phần bù Schur

Định lý 1.36. *Nếu A là một ma trận khả nghịch thì*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

Định nghĩa 1.37. *Ma trận $D - CA^{-1}B$ được gọi là phần bù Schur của ma trận khả nghịch A trong M, và được kí hiệu là $(M|A)$.*

Chú ý rằng nếu $AC = CA$ thì Định lý 1.36 dẫn đến

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CAA^{-1}B) = \det(AD - CB).$$

Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận khối

Cho $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, ở đó A và D là các ma trận vuông cấp m và cấp n tương ứng, P là một ma trận vuông cấp m và Q là ma trận cỡ $n \times m$.

Định lý 1.38.

$$\det \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix} = \det P \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ và } \det \begin{pmatrix} A & B \\ C+QA & D+QB \end{pmatrix} = \det \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

6.2 Hạng của ma trận khối

Bổ đề 1.39. *Cho* $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times p}$ *và* $AB = 0$. *Khi đó,*

$$r(A) + r(B) \leq n.$$

Chứng minh. Giả sử $B_1, \ldots, B_p$ là các cột của B. Từ $AB = 0$ dẫn đến $\begin{cases} AB_1 = 0, \\ AB_2 = 0, \\ \vdots \\ AB_p = 0. \end{cases}$

Như vậy $B_1, B_2, \ldots, B_p$ là các nghiệm của phương trình thuần nhất $AX = 0$. Mặt khác, không gian nghiệm của phương trình thuần nhất $AX = 0$ có số chiều là $n - r(A)$. Do đó, $r(B) \leq n - r(A)$ dẫn đến điều phải chứng minh. ■

Bổ đề 1.40. *Cho* $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times p}$. *Khi đó,*

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$

Một cách tổng quát,

$$r\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix} = r(A_1) + r(A_2) + \cdots + r(A_n).$$

Bổ đề 1.41. *Cho* $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times p}$. *Khi đó,*

$$r(A) + r(B) \leq r\begin{pmatrix} A & \star \\ 0 & B \end{pmatrix} \leq \min\{p + r(A), m + r(B)\}.$$

Định lý 1.42 (Bất đẳng thức Sylvester). *Cho* $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times p}$. *Khi đó,*

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B) \leq n + r(AB).$$

Chứng minh. Ta có

$$n + r(AB) = r\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} = r(M).$$

Áp dụng các phép biến đổi trên ma trận khối M ta có

$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Do đó,

$$n + r(AB) = r\begin{pmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B).$$

■

Định lý 1.43 (Bất đẳng thức Frobenius). *Cho* $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times p}, C \in M_{p\times q}$. *Khi đó,*

$$r(AB) + r(BC) \leq r(B) + r(ABC).$$

Chứng minh. Xét ma trận khối $M = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix}$ và áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận khối M ta có

$$M = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & 0 \\ AB & ABC \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & -BC \\ AB & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} BC & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$$

Do đó,

$$r(B) + r(ABC) = r(M) = r\begin{pmatrix} BC & B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \geq r(AB) + r(BC).$$

■

Định lý 1.44. *Cho A là một ma trận vuông. Khi đó,*

$$A^2 = A \Leftrightarrow r(A) + r(I-A) = n.$$

Chú ý rằng ma trận có tính chất $A^2 = A$ được gọi là ma trận lũy đẳng. Xem thêm về ma trận lũy đẳng ở Phụ lục A2.

Chứng minh. Đặt $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix}$ và áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận khối M ta được

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & I-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Tức là,

$$r(A) + r(I-A) = n + r(A-A^2).$$

Do đó,

$$r(A) + r(I-A) = n \Leftrightarrow r(A-A^2) = 0 \Leftrightarrow A = A^2.$$

■

Định lý 1.45. *Cho* $A \in M_{m\times n}$. ***Khi đó,***

$$r(I_m - AA^T) - r(I_n - A^TA) = m - n.$$

Chứng minh. Xây dựng ma trận khối $M = \begin{pmatrix} I_m - AA^T & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ và áp dụng các phép biến đổi trên ma trận khối M ta được

$$\begin{pmatrix} I_m - AA^T & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m - AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m & A \\ A^T & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n - A^TA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - A^TA \end{pmatrix}$$

Như vậy,

$$r(I_m - AA^T) + n = r\begin{pmatrix} I_m - AA^T & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - A^TA \end{pmatrix} = r(I_n - A^TA) + m.$$

Dẫn đến điều phải chứng minh ■

Định lý 1.46. *Cho* A, B *là các ma trận vuông thỏa mãn* $AB = BA$. ***Khi đó,***

$$r(A) + r(B) \geq r(AB) + r(A+B).$$

Chứng minh. Xây dựng ma trận khối $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ và áp dụng các phép biến đổi trên ma trận khối ta được

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} = G.$$

Đặt $N = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & -(A+B) \end{pmatrix}$. Từ $AB = BA$ ta có

$$NG = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & -(A+B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix}$$

Do đó,

$$r(A) + r(B) = r(M) = r(G) \geq r(NG) = r\begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix} = r(AB) + r(A+B).$$

■

Bài tập A.2. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn $r(C) = n$ và $A(BA+C) = 0$. Chứng minh rằng

$$r(BA+C) = n - r(A).$$

Chứng minh. Điều kiện $A(BA+C) = 0$ và Bổ đề 1.39 dẫn đến $r(A) + r(BA+C) \leq n$. Xét ma trận khối và biến đổi trên nó sau

$$\begin{pmatrix} BA+C & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} BA+C & BA \\ 0 & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C & BA \\ -A & A \end{pmatrix}$$

Ta có

$$r(BA+C) + r(A) = r\begin{pmatrix} BA+C & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} C & BA \\ -A & A \end{pmatrix} \geq r(C) = n$$

dẫn đến điều phải chứng minh. ■

Bài tập A.3. Cho $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, ở đó $A_{11}, B_{11}, A_{22}, B_{22}$ là các ma trận vuông cùng cấp và $\operatorname{rank} A_{11} = \operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B_{11} = \operatorname{rank} B$. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} A_{11} & B_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = |A+B|.|A_{11}|.|B_{22}|$$

PHỤ LỤC B

DẠNG CHUẨN JORDAN CỦA MA TRẬN

§1. DẠNG CHUẨN JORDAN CỦA MA TRẬN

Cho $f : V \to V$ là một tự đồng cấu bất kì. Với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}$, xét

$$P_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V),$$

$$R_\lambda = \{v \in V : \exists m \in \mathbb{N} : (f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^m(v) = 0.\}$$

Bổ đề 2.1. *i) R_λ là một không gian véctơ con của V.*

ii) R_λ là một không gian con ổn định với f.

iii) $R_\lambda \neq \{0\}$ nếu và chỉ nếu λ là một trị riêng của f.

R_λ được gọi là không gian con riêng suy rộng ứng với trị riêng λ.

Mệnh đề 2.2. *Nếu λ là một trị riêng của f thì* $\dim R_\lambda$ *bằng bội của λ xem như nghiệm của đa thức đặc trưng.*

Định lý 2.3. *Cho A và B là các ma trận vuông thực và $A = P^{-1}BP$, ở đó P là một ma trận phức. Khi đó tồn tại ma trận thực Q sao cho $A = Q^{-1}BQ$.*

Điều đó có nghĩa là tập hợp tất cả các ma trận có dạng $A = P^{-1}BP$ với P là một ma trận phức thì "không lớn hơn" tập hợp tất cả các ma trận có dạng $A = Q^{-1}BQ$ với Q là một ma trận thực.

Một khối Jordan cỡ $r \times r$ là một ma trận có dạng

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 2.4. *i) Một ma trận Jordan là một ma trận khối có các khối Jordan trên đường chéo.*

ii) Một cơ sở Jordan của toán tử tuyến tính $A : V \to V$ là một cơ sở của không gian V sao cho ma trận của nó trong cơ sở đó là một ma trận Jordan.

Định lý 2.5 (Dạng chuẩn Jordan của ma trận (tự đồng cấu)). *Cho $f : V \to V$ có ma trận là A trong một cơ sở nào đó và đa thức đặc trưng của A có đủ nghiệm trong trường K*

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_m)^{s_m},$$

trong đó $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ là đôi một khác nhau. Khi đó, V phân tích được thành tổng trực tiếp của các không gian con riêng suy rộng ứng với những trị riêng $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$:

$$V = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_m}, \text{ ở đây } \dim R_{\lambda_k} = s_k.$$

Nói cách khác, ma trận A đồng dạng với một ma trận khối, với các khối Jordan cấp s có dạng

$$J_{s,\lambda_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Số khối Jordan cấp s với các phần tử λ_k trên đường chéo bằng

$$\operatorname{rank}(f - \lambda_k \operatorname{id}_V)^{s-1} - 2\operatorname{rank}(f - \lambda_k \operatorname{id}_V)^{s} + \operatorname{rank}(f - \lambda_k \operatorname{id}_V)^{s+1}.$$

Ma trận Jordan của nó được xác định duy nhất, sai khác hoán vị các khối Jordan của nó.

Định lý 2.6 (Jordan). *Với mọi toán tử tuyến tính $A : V \to V$ trên $\mathbb{C}$, tồn tại một cơ sở Jordan, và ma trận Jordan của nó được xác định duy nhất, sai khác hoán vị các khối Jordan của nó.*

Định lý 2.7. *Cho ma trận A thỏa mãn đa thức đặc trưng của nó có đủ nghiệm trong trường K*

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_m)^{s_m},$$

trong đó $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ là đôi một khác nhau và $\dim R_{\lambda_k} = s_k$. Khi đó, đa thức tối tiểu của nó là

$$p(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \lambda_k)^{s_k}.$$

Chú ý 2.8. *Dạng chuẩn Jordan của một ma trận được sử dụng một cách rất thuận tiện trong việc thực hiện phép tính lũy thừa một ma trận. Cụ thể hơn, nếu $A = P^{-1}JP$ thì $A^n = P^{-1}J^nP$. Để tính lũy thừa của khối Jordan $J_r(\lambda) = \lambda I + N$, ta có công thức khai triển Newton:*

$$J^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \lambda^k N^{n-k} = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-2)!}\lambda^{k-n+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Một cách tổng quát, nếu (x) là một hàm giải tích (chẳng hạn như $f(x) = e^x$), thì

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Chú ý 2.9. *Cơ sở Jordan luôn luôn tồn tại trên các trường đóng đại số. Trên $\mathbb{R}$ không phải lúc nào cũng tồn tại cơ sở Jordan. Tuy nhiên trên trường số thực cũng tồn tại một dạng Jordan, là thực hóa dạng chuẩn Jordan trên trường số phức.*

Định lý 2.10. *Với mỗi toán tử tuyến tính A trên trường số thực, luôn tồn tại một cơ sở mà ma trận của nó trong cơ sở đã cho có dạng đường chéo khối với các khối $J_{m_1}(t_1), \ldots, J_{m_k}(t_k)$ tương ứng với trị riêng thực t_i và các khối $J_{n_1}^*(\lambda_1), \ldots, J_{n_s}^*(\lambda_s)$ tương ứng với trị riêng phức λ_i và $\bar{\lambda}_i$, ở đó $J_n^*(\lambda)$ là ma trận cỡ $2n \times 2n$ thu được từ khối Jordan $J_n(\lambda)$ bằng cách thay thế mỗi phần tử có dạng $a + ib$ của nó bởi ma trận $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.*

Chú ý 2.11. *Từ dạng chuẩn Jordan, mỗi toán tử tuyến tính A trên $\mathbb{C}$ đều có thể được phân tích dưới dạng $A = A_s + A_n$, ở đó A_s là chéo hóa được, và A_n là luỹ linh, hơn nữa $A_sA_n = A_nA_s$.*

Định lý 2.12. *Các toán tử A_s và A_n là xác định duy nhất, hơn nữa $A_s = S(A)$ và $A_n = N(A)$, ở đó S và N là các đa thức nào đó.*

Định lý 2.13. *Cho A là một toán tử tuyến tính khả nghịch trên trường số phức $\mathbb{C}$. Khi đó A có thể biểu diễn dưới dạng $A = A_s A_u = A_u A_s$, ở đó A_s là toán tử chéo hóa được và A_u là một toán tử lũy đơn (toán tử lũy đơn là tổng của toán tử đồng nhất và toán tử lũy linh). Biểu diễn này là duy nhất.*

Chứng minh. Nếu A khả nghịch thì A_s cũng khả nghịch. Khi đó $A = A_s + A_n = A_s A_u$, ở đó $A_u = A_s^{-1}(A_s + A_n) = I + A_s^{-1} A_n$. ■

PHỤ LỤC C

CÁC TÍNH CHẤT SÂU HƠN VỀ ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN

§1. CÁC ĐỊNH THỨC ĐẶC BIỆT

1.1 Định thức Vandermonde

Ma trận Vandermonde cấp n là ma trận vuông cấp n có dạng

$$V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Định lý 3.1. *Chứng minh rằng* $\det V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$. *Từ đó suy ra hệ* $V_n(a_1, a_2, ..., a_n).X = 0$ *chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *đôi một phân biệt.*

Một ứng dụng thú vị của định thức Vandermonde là bài toán sau:

Bài tập 3.1. *Cho* A *là một ma trận vuông cấp* n. *Khi đó*

$$A^n = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A^k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Chứng minh. $\boxed{\Rightarrow}$ Nếu $A^n = 0$ thì A là một ma trận lũy linh, do đó A chỉ có các trị riêng bằng 0, nên A^k cũng chỉ có các trị riêng bằng 0 với mọi k. Suy ra điều phải chứng minh.

$\boxed{\Leftarrow}$ Giả sử các giá trị riêng của A là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Khi đó từ $\operatorname{tr}(A^k) = 0, k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_n^n = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

hay

$$V_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T = 0.$$

Ta sẽ chứng minh tất cả các giá trị riêng của A bằng nhau. Thật vậy:
Nếu λ_i đôi một phân biệt thì định thức Vandermonde khác không, hệ phương trình trên chỉ có nghiệm duy nhất $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 0$. Mâu thuẫn.
Ngược lại, không mất tính tổng quát, giả sử $\lambda_1 = \lambda_2$ và không một giá trị λ_i còn lại nào bằng nhau. Khi đó hệ phương trình được viết lại dưới dạng

$$V_{n-1}(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)(2\lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T = 0$$

Lập luận tương tự ta có $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, mâu thuẫn.
Vậy tất cả các trị riêng của A bằng nhau và do đó bằng 0. ■

Bài tập 3.2. *Chứng minh rằng với các số nguyên $k_1 < k_2 < ... < k_n$ bất kì thì $\dfrac{\det V_n(k_1, k_2, ..., k_n)}{\det V_n(1, 2, ..., n)}$ là một số nguyên.*

Bài tập 3.3. *Cho W là ma trận có được từ ma trận $V = V_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ bằng cách thay hàng $(a_1^{n-1}, a_2^{n-1}, ..., a_n^{n-1})$ bởi hàng $(a_1^n, a_2^n, ..., a_n^n)$. Chứng minh rằng*

$$\det W = (a_1 + a_2 + ... + a_n) \det V.$$

Bài tập 3.4. *Chứng minh rằng*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \vdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_2a_3...a_n & a_1a_3...a_n & \ldots & a_1a_2...a_{n-2}a_n & a_1a_2...a_{n-1} \end{bmatrix} = (-1)^{n-1}. \det V_n(a_1, a_2, ..., a_n)$$

Chứng minh.
- Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$ thì nhân cột thứ nhất với a_1, cột thứ hai với $a_2, \ldots,$ cột thứ n với a_n rồi chia cho $a_1 a_2 \ldots a_n$ ta được

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \vdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_2a_3...a_n & a_1a_3...a_n & \dots & a_1a_2...a_{n-2}a_n & a_1a_2...a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_1a_2\dots a_n}.\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \vdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}.\det V_n(a_1, a_2, ..., a_n)$$

- Trường hợp có ít nhất một trong các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ bằng 0 (xét riêng). ■

Bài tập 3.5. *Cho $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ là các đa thức bậc không quá $n-2$. Chứng minh rằng với mọi số $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có*

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$$

Chứng minh. Giả sử $f_i(x) = b_{i0} + b_{i1}x + \dots + b_{i,n-2}x^{n-2}$ thì

$$\begin{bmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1,n-2} & 0 \\ b_{20} & b_{21} & \dots & b_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & \dots & b_{n,n-2} & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

Bài tập 3.6. *Cho $A = [a_{ij}]$ và $f_i(x) = a_{1i} + a_{2i}x + ... + a_{ni}x^{n-1}$ với $i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng*

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = \det A.V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Chứng minh. Tương tự như bài 3.5 ta có

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Suy ra điều phải chứng minh. ∎

Bài tập 3.7. *Chứng minh rằng với $k_1, k_2, \dots, k_n$ là các số tự nhiên khác nhau và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương khác nhau thì*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1^{k_1} & a_2^{k_1} & a_3^{k_1} & \dots & a_n^{k_1} \\ a_1^{k_2} & a_2^{k_2} & a_3^{k_2} & \dots & a_n^{k_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{k_n} & a_2^{k_n} & a_3^{k_n} & \dots & a_n^{k_n} \end{bmatrix} \neq 0$$

1.2 Định thức Cauchy

Ma trận Cauchy là ma trận vuông cấp n, $A = (a_{ij})$, ở đó $a_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j}$. Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$\det A = \frac{\Pi_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\Pi_{i,j}(x_i + y_j)}$$

Trước hết lấy mỗi cột từ 1 đến $n-1$ trừ đi cột cuối cùng, ta được

$$a'_{ij} = (x_i + y_j)^{-1} - (x_i + y_n)^{-1} = (y_n - y_j)(x_i + y_n)^{-1}(x_i + y_j)^{-1} \text{ với } j \neq n.$$

Đưa nhân tử $(x_i + y_n)^{-1}$ ở mỗi hàng, và $y_n - y_j$ ở mỗi cột trừ cột cuối cùng ra khỏi định thức ta sẽ thu được định thức $|b_{ij}|_{i,j=1}^n$, ở đó $b_{ij} = a_{ij}$ với $j \neq n$ và $b_{in} = 1$.

Tiếp theo, lấy mỗi hàng từ 1 đến $n-1$ trừ đi hàng cuối cùng. Đưa nhân tử $x_n - x_i$ ở mỗi hàng trừ hàng cuối cùng, và nhân tử $(x_n + y_j)^{-1}$ ở mỗi cột trừ cột cuối cùng, ta sẽ thu được công thức truy hồi định thức Cauchy cấp n qua cấp $n-1$.

1.3 Định thức Frobenius

Ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận Frobenius, hay ma trận bạn của đa thức

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_0.$$

Khai triển định thức Frobenius theo hàng thứ nhất, các bạn có thể dễ dàng thu được công thức sau:

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$$

1.4 Định thức của ma trận ba đường chéo

Ma trận ba đường chéo là ma trận vuông $J = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, ở đó $a_{ij} = 0$ với $|i - j| > 1$. Đặt $a_i = a_{ii}, b_i = a_{i,i+1}, c_i = a_{i+1,i}$, ma trận ba đường chéo khi đó có dạng:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Khai triển định thức của ma trận trên theo hàng thứ k, ta được

$$\Delta_k = a_k\Delta_{k-1} - b_{k-1}c_k\Delta_{k-2} \text{ với } k \geq 2, \text{ ở đó } \Delta_k = \det(a_{ij})_{i,j=1}^k.$$

Công thức truy hồi trên đã khẳng định rằng định thức Δ_n không những chỉ phụ thuộc vào các số b_i, c_j mà còn phụ thuộc vào $b_i c_i$. Trong trường hợp đặc biệt, kí hiệu

$$(a_1 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \ldots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

ta có công thức truy hồi thông qua liên phân số sau:

$$\frac{(a_1 a_2 \ldots a_n)}{(a_2 a_3 \ldots a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

1.5 Bài tập

Bài tập 3.8. *Cho A là một ma trận phản xứng cấp n lẻ. Chứng minh rằng* $\det A = 0$.

Bài tập 3.9. *Chứng minh rằng định thức của một ma trận phản xứng cấp n chẵn không thay đổi nếu ta cộng thêm vào mỗi phần tử của nó với một số cố định.*

Bài tập 3.10. *Tính định thức của một ma trận phản xứng cấp $2n$ chẵn thỏa mãn tính chất các phần tử ở phía trên đường chéo chính bằng* 1.

Bài tập 3.11. *Cho $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, với $a_{ij} = a^{|i-j|}$. Tính* $\det A$.

Bài tập 3.12. *Cho* $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x & h & -1 & 0 \\ x^2 & hx & h & -1 \\ x^3 & hx^2 & hx & h \end{vmatrix}$ và Δ_n *được định nghĩa tương tự cho $n > 3$. Chứng minh rằng $\Delta_n = (x+h)^n$.*

Bài tập 3.13. *Cho $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, với* $c_{ij} = \begin{cases} a_i b_j & \text{nếu } i \neq j \\ x_i & \text{nếu } i = j \end{cases}$. *Tính* $\det C$.

Bài tập 3.14. *Cho $a_{i,i+1} = c_i$ với $i = 1, \cdots, n$, các phần tử khác của ma trận A bằng* 0. *Chứng minh rằng định thức của ma trận $I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ bằng $(1-c)^{n-1}$, với $c = c_1 \ldots c_n$.*

Bài tập 3.15. *Tính* $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n$, *với* $a_{ij} = (1 - x_i y_j)^{-1}$.

Bài tập 3.16. *Tính*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & (x_2 + x_3 + \dots + x_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^{n-1} \end{vmatrix}$$

Bài tập 3.17. *Tính*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 x_3 \dots x_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 x_2 \dots x_{n-1} \end{vmatrix}$$

Bài tập 3.18. *Tính* $|a_{ik}|_0^n$, *với* $a_{ik} = \lambda_i^{n-k}(1 + \lambda_i^2)^k$.

Bài tập 3.19. *Cho* $a_{ij} = C_j^{in}$. *Chứng minh rằng* $|aij|_1^r = n^{r(r+1)/2}$ *với* $r \leq n$.

Bài tập 3.20. *Cho* $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, *tính* $|aij|_1^n$, *ở đó* $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(k_i+j-i)!} & \text{với } k_i + j - i \geq 0 \\ 0 & \text{với } k_i + j - i < 0 \end{cases}$

Bài tập 3.21. *Cho* $s_k = p_1 x_1^k + \dots + p_n x_n^k$, *và* $a_{i,j} = s_{i+j}$. *Chứng minh rằng*

$$|a_{ij}|_0^{n-1} = p_1 \dots p_n \Pi_{i>j}(x_i - x_j)^2.$$

Bài tập 3.22. *Cho* $s = x_1^k + \dots + x_n^k$. *Tính*

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & y \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} \dots & s_{2n-} & y^n & \end{vmatrix}$$

Bài tập 3.23. *Cho* $a_{ij} = (x_i + y_j)^n$. *Chứng minh rằng*

$$|a_{ij}|_0^n = C_1^n C_2^n \dots C_n^n \Pi_{i>k}(x_i - x_k)(y_k - y_i).$$

Bài tập 3.24. *Cho* $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$. *Chứng minh rằng* $|aij|_1^n = |bij|_1^n$.

Bài tập 3.25. *Cho* $\Delta_n(k) = |a_{ij}|_0^n$, *ở đó* $a_{ij} = C_{2j}^{k+i}$. *Chứng minh rằng*

$$\Delta_n(k) = \frac{k(k+1)\dots(k+n-1)}{1.3\dots(2n-1)} \Delta_{n-1}(k-1).$$

Bài tập 3.26. *Cho* $D_n = |aij|_0^n$, *ở đó* $a_{ij} = C_{2j-1}^n$. *Chứng minh rằng* $D_n = 2^{n(n+1)/2}$.

§2. ĐỊNH THỨC CON VÀ PHẦN PHỤ ĐẠI SỐ

2.1 Các định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 3.2. *Ma trận mà các phần tử của nó là giao của p hàng và p cột của ma trận vuông A được gọi là ma trận con cấp p của A. Định thức tương ứng được gọi là định thức con cấp p. Kí hiệu*

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1k_p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_pk_1} & a_{i_pk_2} & \dots & a_{i_pk_p} \end{vmatrix}$$

Nếu $i_1 = k_1, \dots, i_p = k_p$ thì định thức con được gọi là định thức con chính cấp p.

Định nghĩa 3.3. *Định thức con khác 0 có bậc cao nhất được gọi là định thức con cơ sở và cấp của nó được gọi là hạng của ma trận A.*

Định lý 3.4. *Nếu $A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix}$ là một định thức con cơ sở của A, thì các hàng của ma trận A là tổ hợp tuyến tính của các hàng $i_1, \dots, i_p$ của nó, và các hàng $i_1, \dots, i_p$ này độc lập tuyến tính.*

Hệ quả 3.5. *Hạng của một ma trận bằng số các hàng (cột) độc lập tuyến tính lớn nhất của nó.*

Định lý 3.6 (Công thức Binet - Cauchy). *Giả sử A và B là các ma trận cỡ $n \times m$ và $m \times n$ tương ứng và $n \leq m$. Khi đó*

$$\det AB = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq m} A_{k_1 \dots k_n} B^{k_1 \dots k_n},$$

ở đó $A_{k_1 \dots k_n}$ là định thức con thu được từ các cột $k_1, \dots, k_n$ của A và $B^{k_1 \dots k_n}$ là định thức con thu được từ các hàng $k_1, \dots, k_n$ của B.

Kí hiệu $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, ở đó M_{ij} là định thức của ma trận thu được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j, nó được gọi là phần bù đại số của phần tử a_{ij}. Khi đó ma trận $\operatorname{adj} A = (A_{ij})^T$ được gọi là ma trận liên hợp của ma trận A. Ta có công thức sau:

$$A. \operatorname{adj}(A) = \det A.I$$

Định lý 3.7. *Toán tử adj có các tính chất sau:*

1. $\operatorname{adj} AB = \operatorname{adj} B. \operatorname{adj} A$

2. $\operatorname{adj} XAX^{-1} = X(\operatorname{adj} A)X^{-1}$

3. Nếu $AB = BA$ *thì* $(\operatorname{adj} A)B = B(\operatorname{adj} A)$.

Định lý 3.8.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pp} \end{vmatrix} = |A|^{p-1}. \begin{vmatrix} A_{p+1,p+1} & \dots & A_{p+1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n,p+1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Hệ quả 3.9. *Nếu A là ma trận suy biến thì* $\operatorname{rank}(\operatorname{adj} A) \leq 1$.

Định lý 3.10 (Jacobi). *Giả sử* $1 \leq p < n$ *và* $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ *là một phép hoán vị bất kì. Khi đó*

$$\begin{vmatrix} A_{i_1j_1} & \dots & A_{i_1j_p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{i_pj_1} & \dots & A_{i_pj_p} \end{vmatrix} = (-1)^{\sigma}|A|^{p-1}. \begin{vmatrix} A_{i_{p+1},j_{p+1}} & \dots & A_{i_{p+1},j_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{i_n,j_{p+1}} & \dots & A_{i_nj_n} \end{vmatrix}$$

Định lý 3.11 (Chebotarev). *Cho p là một số nguyên tố và $\epsilon = \exp(2\pi i/p)$. Khi đó tất cả các định thức con của định thức Vandermonde $(a_{ij})_{i,i=0}^{p-1}$ là khác không, ở đó $a_{ij} = \epsilon^{ij}$.*

Định lý 3.12 (Công thức khai triển Laplace). *Cố định p hàng $i_1, i_2, \dots, i_p$ của A với $i_1 < i_2 < \dots < i_p$. Khi đó*

$$\det A = \sum_{j_1<\dots<j_p, j_{p+1}<\dots<j_n, i_{p+1}<\dots<i_n} (-1)^{i+j} A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix} . A \begin{pmatrix} i_{p+1} & \dots & i_n \\ j_{p+1} & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

ở đó $i = i_1 + \dots + i_p, j = j_1 + \dots + j_p$.

Đại lượng $(-1)^{i+j} A \begin{pmatrix} i_{p+1} & \dots & i_n \\ j_{p+1} & \dots & j_n \end{pmatrix}$ được gọi là phần bù đại số của định thức con $A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix}$.

2.2 Bài tập

Bài tập 3.27. *Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng*

$$|A + \lambda I| = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} S_k \lambda^{n-k},$$

ở đó S_k là tổng của tất cả C_k^n các định thức con chính cấp k của A.

Bài tập 3.28. *Chứng minh rằng*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i,j} x_i y_j A_{ij},$$

ở đó A_{ij} *là phần bù đại số của phần tử* a_{ij}.

Bài tập 3.29. *Chứng minh rằng tổng của các định thức con chính cấp* k *của* $A^T A$ *bằng tổng bình phương các định thức con chính cấp* k *của* A.

Bài tập 3.30. *Cho* A, B *là các ma trận vuông cấp* n. *Tính*

$$\begin{pmatrix} I & A & C \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$$

Bài tập 3.31. *Tìm một ví dụ một ma trận vuông cấp* n *mà các phần bù đại số của nó đều bằng 0, ngoại trừ phần tử nằm ở hàng* i *và cột* j.

Bài tập 3.32. *Cho* x *và* y *là các cột có độ dài* n. *Chứng minh rằng*

$$\operatorname{adj}(I - xy)^T = xy^T + (1 - y^T x)I.$$

Bài tập 3.33. *Cho* A *là một ma trận phản xứng. Chứng minh rằng* $\operatorname{adj}(A)$ *là một ma trận phản xứng nếu* n *lẻ và đối xứng nếu* n *chẵn.*

Bài tập 3.34. *Cho* A *là một ma trận phản xứng cấp* n *với các phần tử trên đường chéo chính bằng 1. Tính* $\operatorname{adj} A$.

Bài tập 3.35. *Tìm tất cả các ma trận* A *có các phần tử không âm sao cho tất cả các phần tử của ma trận* A^{-1} *cũng không âm.*

Bài tập 3.36. *Cho* $\epsilon = \exp(2\pi i/n)$ *và* $A = (a_{ij})_1^n$ *với* $a_{ij} = \epsilon^{ij}$. *Tính* A^{-1}.

Bài tập 3.37. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận Vandermonde* V.