Chuyên đề 1: Giới hạn hàm số

1. Dạng $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

   Cách làm: Áp dụng quy tắc L'Hospital

   Khi $x \to x_o$ mà $\begin{cases} f(x) \to \infty \\ g(x) \to \infty \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) \to 0 \\ g(x) \to 0 \end{cases}$ => $I = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ví dụ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x} = \infty$$

Câu 3 – N1 – GK20171 – Đề 1

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+4\sin x)}{3^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4\cos x}{1+4\sin x}}{3^x \ln 3} = \frac{4}{\ln 3}$$

Câu 6 – N1 – GK20181 – Đề 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^4}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 4x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{6x + 12x^2}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{6 + 24x}{\cos x} = 6$$

2. Dạng 1^∞. Vận dụng $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Ví dụ:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \left[\left(1 + (\cos x - 1)\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{-\sin x}{1}} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2.\frac{x}{2}} = e^2$$

Câu 2 – N1 – GK20181 – Đề 3

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} \left[\left(1 + (\cos x - 1)\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{-\sin x}{\cos x}} = 1$$

3. Dạng $0^0, \infty^0, 0^\infty$

Khi $x \to x_o$, $\begin{cases} u(x) \to 0 \\ v(x) \to 0 \end{cases}$ => $I = \lim\limits_{x \to x_o} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} e^{v(x)\ln[u(x)]}$

<u>Ví dụ</u>

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} -x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{5}{x}} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{5\ln x}{x}} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{5}{x}} = 1$$

Câu 6 – N1 – GK20171 – Đề 3: $I = \lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

$$I = \lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} e^{\tan x \ln(\sin x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\tan^2 x.\cos^2 x}}} = \lim_{x \to 0^+} e^{-\sin x \cos x} = e^0 = 1$$

Câu 9 – N1 – GK20181 – Đề 2: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$

Xét $I = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{1+x^2}} = e^0 = 1$ => $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$

4. Vô cùng bé – Vô cùng lớn

$VCB : x \to x_o, f(x) \to 0$

$VCL : x \to x_o, |f(x)| \to \infty$

a. So sánh VCB: Cho α, β là các VCB khi $x \to x_o$. Xét $k = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{\alpha}{\beta}$

$k = 1 \Rightarrow \alpha \sim \beta$

$k = 0 \Rightarrow \alpha$ cấp cao hơn β

$k \neq 0;1 \Rightarrow \alpha$ cùng cấp β

b. So sánh VCL: Cho A, B là các VCL khi $x \to x_o$. Xét $K = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{A}{B}$

$K = 1 \Rightarrow A \sim B$

$K = \infty \Rightarrow$ A cấp cao hơn B

$K \neq 0;1 \Rightarrow$ A, B cùng cấp

Ví dụ:

So sánh VCB khi x -> 0: ln(1+x) và sin x

⇨ $k=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{\cos x}=1$ => ln(1+x) và sin x tương đương

So sánh VCL khi x ->∞: x^2 và e^x

⇨ $K=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$ => e^x cấp cao hơn x^2

Câu 2 – N1 – GK20181 – Đề 1

So sánh VCL khi x ->∞: $\alpha(x)=x+x^2$ và $\beta(x)=e^x-1$

Xét $K=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$ => B cao cấp hơn A

Câu 4 – N3 – GK20181 – Đề 7

Khi x->0, các VCB sau có tương đương không? $\alpha(x)=\sin 5x;\beta(x)=e^{5x}-1-x^2$

$k=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{e^{5x}-1-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 5x}{5e^{5x}-2x}=1$=> có tương đương

c. Ngắt bỏ, thay thế VCL, VCB

- Thay VCB, VCL tương đương trong tích/ thương
- Ngắt VCB bậc cao, VCL bậc thấp trong tổng/hiệu

d. Bảng VCB tương đương: $x\to 0$

$\ln(1+x)\sim x$ $\quad (1+x)^a-1\sim ax$ $\quad \sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x\sim x$

$e^x-1\sim x$ $\quad a^x-1\sim x\ln a$

Ví dụ:

So sánh VCB khi x -> 0: ln(1+x) và sin x

⇨ $k=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$ => ln(1+x) và sin x tương đương

Câu 4 – N3 – GK20181 – Đề 7

Khi x->0, các VCB sau có tương đương không? $\alpha(x)=\sin 5x;\beta(x)=e^{5x}-1-x^2$

⇨ $k=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{e^{5x}-1-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{e^{5x}-1}=1$=> có tương đương

Câu 5 – N1 – GK20181 – Đề 4

Tìm a,b để 2 VCB sau tương đương khi x-> 0:

$\alpha(x) = ax^2 + bx^3 + x^4, \beta(x) = \sin(x^3)$

Ta có: $\beta(x) = \sin(x^3) \sim x^3$

$\alpha(x) = ax^2 + bx^3 + x^4 \sim ax^2$ nếu a khác 0 => a = 0

$\alpha(x) = bx^3 + x^4 \sim x^4$ nếu b = 0; $\alpha(x) = bx^3 + x^4 \sim x^3$ nếu b =1

Vậy a = 0; b =1

Chuyên đề 2: Các ứng dụng tìm giới hạn

I. Giới hạn trái – Giới hạn phải – Hàm số liên tục

- Giới hạn phải của hàm số f(x) tại x_o : $f\left(x_o^+\right)=\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$
- Giới hạn trái của hàm số f(x) tại x_o : $f\left(x_o^-\right)=\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)$

<u>Ví dụ:</u>

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

Câu 3 – GK20173 – N2 – D4: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{2x+1}=\infty$

Câu 3 – GK20171 – N3 – D7: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right)}=0$

- Hàm số f(x) liên tục tại x_o khi và chỉ khi: $f\left(x_o^-\right)=f\left(x_o^+\right)=f\left(x_o\right)$

<u>Ví dụ:</u>

Xét sự liên tục của f(x) = x^2+2x+5 tại $x_o=0$ => $f(x_o^+) = f(x_o^-) = f(x_o) = 5$=> LT

Câu 2 – GK20173 – N2 – D4: Xét tính liên tục

$$y=\begin{cases}\frac{\ln\left(1-4x^2\right)}{x}; x\neq 0\\ 0; x=0\end{cases}$$

Nhận xét: Hàm số liên tục trên R\{0}

Tại x = 0: $f\left(0^+\right)=f\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1-4x^2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1-4x^2\right)}{x}=0=f(0)$ => liên tục tại 0

⇨ Hàm số liên tục trên R

Đề 5 – 20141: Tìm m để f(x) = $\begin{cases}\frac{1-\cos 2x}{x^2}; x\neq 0\\ m; x=0\end{cases}$ liên tục tại x = 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2 \Rightarrow m=2$

II. Điểm gián đoạn

- Điểm gián đoạn x_o: tại đó không tồn tại $f(x_o)$
- Phân loại điểm gián đoạn:

- Tìm $f(x_o^+)$ và $f(x_o^-)$
- Nếu tồn tại cả $f(x_o^+)$ và $f(x_o^-)$: loại 1
  Khi đó: $h = | f(x_o^+) - f(x_o^-) |$ gọi là bước nhảy
  h = 0 => Gián đoạn bỏ được
- Không phải loại 1 => loại 2

Ví dụ:

Xét sự gián đoạn của hàm số: $f(x) = \frac{1}{x}$

Tại x = 0, ta có: $f(0^+) = \infty$ và $f(0^-) = -\infty$ => Loại 2

C3 – 20181 – N3 – D7:Xét sự gián đoạn của y = $\arctan\frac{1}{x}$

Ta có: $f(0^+) = \frac{\pi}{2}; f(0^-) = \frac{-\pi}{2}$ => Loại 2

C4 – 20181 – N1 – D1: Xét sự gián đoạn của y = $\cot\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$

$f(0^+) = 0$ và $f(0^-) = 0$ => Loại 1

C3 – 20181 – N1 – D3: Tìm a để x = 0 là điểm gián đoạn bỏ được

f(x) = $\begin{cases} a + e^{\frac{1}{x}}; x < 0 \\ \frac{1}{\ln x}; x > 0 \end{cases}$. Ta có $f(0^+) = 0$ và $f(0^-) = a$ = > a = 0

C2 – 20173 – N1 – D1

Phân loại điểm gián đoạn $y = \frac{\sin x}{x(x-1)}$

$f(0^+) = -1$ và $f(0^-) = -1$ => L1

$f(1^+) = \infty$ và $f(1^-) = -\infty$ => L2

III. Đạo hàm

1. Định nghĩa đạo hàm: $f'(x)|_{x_o} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

2. Đạo hàm trái – Đạo hàm phải

Phải: $f'(x_o^+) = \lim\limits_{x\to x_o^+} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

Trái: $f'(x_o^-) = \lim\limits_{x\to x_o^-} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

Tồn tại đạo hàm khi và chỉ khi $f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$

Chú ý: f(x) có đạo hàm tại x_o => Liên tục tại x_o, không có ngược lại

Ví dụ:

Tính đạo hàm $y = \sqrt{x}\tan x \Rightarrow y' = \dfrac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}$

C5 – 20181 – D7 – N3: Dùng định nghĩa tính đạo hàm y'(0) với $y = x\sqrt[3]{\arcsin x}$

$$y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt[3]{\arcsin x}}{x} = 0$$

C5 – 20181 – D5 – N2: Tìm a để hàm số có đạo hàm tại x = 0

f(x) = $\begin{cases} e^x - a\sin x; x \ge 0 \\ \cos x; x < 0 \end{cases}$. Với a tìm được, tính f'(0)

f(0) = f(0^+)= f(0^+) = 1: Hàm số liên tục tại x = 0

f'(0^+) = 1 – a; f'(0^-) = 0 => a = 1 => f'(0) = 0

IV. Vi phân cấp 1 – Tính xấp xỉ

Vi phân của y = f(x) là $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x).\Delta x$

⇨ Cách tính xấp xỉ: $f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + f'(x_o)\Delta x$

Ví dụ:

Áp dụng vi phân, tính gần đúng $\sqrt[3]{7.97}$

Xét $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$. Ta có $x_o = 8; \Delta x = -0.03$

Áp dụng $f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + f'(x_o)\Delta x$ => $\sqrt[3]{7.97} = 7.9975$

Áp dụng vi phân, tính gần đúng $\sin\left(\frac{\pi}{4}+0.01\right)$

Xét $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$. Ta có $x_o=\frac{\pi}{4};\Delta x=0.01$

⇨ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+0.01\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+0.01\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.714$

Câu 6 – 20181 – D4 – N1:

Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $\sqrt[4]{\frac{2}{2-0.02}}$

Xét $f(x)=\sqrt[4]{\frac{2}{x}}=\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2x^2}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{-3}{4}}$. Ta có $x_o=2;\Delta x=-0.02$

⇨ $\sqrt[4]{\frac{2}{2-0.02}}=f(2)-0.02f'(2)=1.0025$

<u>Chuyên đề 3</u>: Đạo hàm, vi phân cấp cao

Khai triển Taylor, Maclaurin

I. Đạo hàm, vi phân cấp cao

- Đạo hàm cấp n: $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$
- Vi phân cấp n: $d^n y = y^{(n)} dx^n$

<u>Ví dụ:</u> $y = x^7 \Rightarrow y' = 7x^6 \Rightarrow y'' = 42x^5 \Rightarrow y^{(3)} = 210x^4 \Rightarrow y^{(4)} = 840x^3$

Bảng đạo hàm cấp cao của một số hàm số:

Đạo hàm cấp cao của một số hàm số cơ bản:

- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
- $[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).(1+x)^{\alpha-n}$
- $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^{(n)}.\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$
- $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
- $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(a^x)^{(n)} = a^x.(\ln a)^n$
- $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}.\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

$$\left(a^x\right)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \qquad \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$$

$$\left[(ax+b)^\alpha\right]^{(n)} = a^n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\frac{a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{a^n}{(ax+b)^n}$$

Chú ý: Công thức Leibiniz: $(u.v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}.v^{(k)}$

Trong đó:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

Qui ước:

$$C_n^0=1$$

(Sử dụng khi biết một số k hữu hạn nào đó sẽ khiến $v^{(k)}=0$

Ví dụ: x^5 có đạo hàm cấp 5 bằng 0

$$f(x)=\sin x.e^x\Rightarrow f'(x)=(\cos x+\sin x)e^x\Rightarrow f''(x)=2\cos xe^x$$

$$(f(x))''=\sum_{k=0}^{2}C_2^k\sin x^{(2-k)}.\left(e^x\right)^{(k)}=C_2^0\sin x^{(2)}.\left(e^x\right)+C_2^1\sin x^{(1)}.\left(e^x\right)^{(1)}+C_2^2\sin x.\left(e^x\right)^{(2)}$$

$$=-\sin x.e^x+2\cos x.e^x+\sin x.e^x=2\cos x.e^x$$

- Cho y = xlnx. Tính $y^{(20)}(1)$

$$y^{(20)}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^k(\ln x)^{(20-k)}x^{(k)}=C_{20}^0(\ln x)^{(20)}x^{(0)}+C_{20}^1(\ln x)^{(19)}x^{(1)}$$

$$=(\ln x)^{(20)}x+20(\ln x)^{(19)}=(-1)^{19}.\frac{19!}{x^{20}}.x+20(-1)^{18}\frac{18!}{x^{19}}=\frac{-19!}{x^{19}}+\frac{20.18!}{x^{19}}=\frac{(20.18!-19!)}{x^{19}}$$

⇨ $y^{(20)}(1)=20.18!-19!$

Lưu ý: Cách chứng minh công thức đạo hàm cấp cao: Dùng quy nạp

$$y=\frac{1}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{-1}{(x+1)^2}\Rightarrow y''=\frac{2}{(x+1)^3}$$

Giả sử $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n.\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ (*)

Với $n=1\Rightarrow y'=\frac{-1}{(x+1)^2}$ => n = 1 đúng với (*)

Với $n=2\Rightarrow y''=\frac{2}{(x+1)^3}$ => n = 2 đúng với (*)

Giả sử $n=k\Rightarrow y^{(k)}=(-1)^k.\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$ là đúng

$$n=k+1 \Rightarrow y^{(k+1)}=\left[y^{(k)}\right]'=(-1)^k.k!.\frac{-(k+1)(1+x)^k}{(1+x)^{2k+2}}=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$$ (đúng với *)

<u>Ví dụ:</u>

Câu 7 – 20181 – Đề 5 – N2: Cho y = (x+1)lnx. Tính $y^{(20)}(1)$

$$y^{(20)}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^k(\ln x)^{(20-k)}(x+1)^{(k)}=C_{20}^0(\ln x)^{(20)}(x+1)^{(0)}+C_{20}^1(\ln x)^{(19)}(x+1)^{(1)}$$

$$=(\ln x)^{(20)}(x+1)+20(\ln x)^{(19)}=(-1)^{19}.\frac{19!}{x^{20}}.(x+1)+20(-1)^{18}\frac{18!}{x^{19}}=-2.19!+20.18!=-2.19!+19!+18!=18!-19!$$

Câu 5 – 20171 – Đề 1 – N1: Tính $y^{(5)}(x)$ với y = ln($2x^2$-x)

$$y=\ln\left(2x^2-x\right)=\ln|x|+\ln|2x-1| \Rightarrow y^{(5)}=\frac{4!}{x^5}+\frac{2^5.4!}{(2x-1)^5}$$

Câu 10 – 20173 – Đề 4 – N2: Cho y = x^2ln(1-3x). Tính $y^{(n)}$ (0), n≥3.

$$y^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^2\right)^{(k)}(0)\left(\ln(1-3x)\right)^{(n-k)}(0),\left(x^2\right)^{(k)}(0)=\begin{matrix}2;k=2\\0;k=0\end{matrix}$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(0)=2C_n^2\left(\ln(1-3x)\right)^{(n-2)}(0)$$

Ta có $y=\ln(1-3x)\Rightarrow y'=\frac{-3}{1-3x}\Rightarrow y''=\frac{-9}{(1-3x)^2}\Rightarrow y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(-3)^n}{(1-3x)^n}$

$$\Rightarrow 2C_n^2\left(\ln(1-3x)\right)^{(n-2)}(0)=2C_n^2(-1)^{n-3}(n-3)!\frac{(-3)^{n-2}}{(1-3x)^{n-2}}=-2.3^{n-2}C_n^2(n-3)!$$

Câu 9 – 20171 – Đề 7 – N3: Cho $f(x)=\frac{(x-1)^4}{5!}\ln(2-x)$. Tính $d^{10}f(1)$.

$$d^{10}y(1)=y^{(10)}(1)dx^{10},y^{(10)}(1)=\frac{1}{5!}\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left((x-1)^4\right)^{(k)}\left(\ln(2-x)\right)^{(10-k)}.$$

Ta có $\left((x-1)^4\right)^{(k)}=\begin{cases}4!;k=4\\0;k\neq 4\end{cases}$ =>

$$y^{(10)}(1)=\frac{1}{5!}C_{10}^4 4!\left(\ln(2-x)\right)^{(6)}=42\left(\ln(2-x)\right)^{(6)}=42.(-1)^5.5!.\frac{(-1)^6}{(2-x)^6}=-5040$$

II. Khai triển Taylor, Maclaurin

$$f(x)=f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+...+\frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k+...$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(x_o)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+...$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...+\frac{1}{n!}x^n+O(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+...+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+O(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+...+\frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+O(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

x~0

a. Tìm khai triển Maclaurin hoặc Taylor

Ví dụ:

Tìm khai triển Maclaurin của $f(x)=\frac{1}{(1-3x)^5}$ đến số hạng o(x^2)

$$f(x)=\frac{1}{(1-3x)^5}=(1-3x)^{-5}=1+15x+135x^2+o(x^2)$$

Câu 8 – 20173 – Đề 4 – N2: Khai triển Maclaurin của $f(x)=\frac{1}{(1+2x)^{40}(1-x)^{50}}$

đến số hạng o(x^2).

$$(1+2x)^{-40}=1-80x+3280x^2+o(x^2)$$

$$(1-x)^{-50}=1+50x+1275x^2+o(x^2)$$

$$y=(1+2x)^{-40}(1-x)^{-50}=1+50x+1275x^2-80x-4000x^2+3280x^2+o(x^2)=1-30x+555x^2+o(x^2)$$

Bỏ qua những x có bậc cao hơn 2.

Câu 9 – 20171 – Đề 1 – N1:

Sử dụng khai triển Maclaurin của hàm số $y=\sqrt[3]{1+x}$ đến x^3 để tính gần đúng $\sqrt[3]{1,09}$

Quy tròn đến 10^{-6}.

$$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\sqrt[3]{1,09}=\sqrt[3]{1+0,09}=1+\frac{1}{3}.0,09-\frac{1}{9}.0,09^2+\frac{5}{81}.0,09^3=1,029145$$

b. Vận dụng khai triển Taylor để tìm đạo hàm cấp cao

Cách làm: Đề bài yêu cầu tìm đạo hàm cấp n hàm số y tại x = 0

- Khai triển Maclaurin hàm số y
- Hệ số của số hạng chứa x^n . n! = kết quả cần tìm

Ví dụ:

Tìm đạo hàm cấp cao $y^{(5)}(0)$ của y = sin x.

$y^{(5)}(0) = \sin(x+5\pi/2)|_{x=0} = 1$

Ta có khai triển Mac của y là: $\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$

Hệ số của x^5 là $\frac{1}{5!}$ => $y^{(5)}(0) = \frac{1}{5!}. 5! = 1$

Câu 9 – 20173 – Đề 6 – N3: Cho $y = e^x\sin x$. Tính đạo hàm cấp cao $y^{(6)}(0)$.

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5 \qquad \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$$

=> Hệ số của x^6 của $e^x\sin x$ là: $\frac{1}{5!}x^6-\left(\frac{1}{3!}x^3\right)^2+\frac{1}{5!}x^6=\frac{-1}{90}$

⇨ $\frac{y^{(6)}(0)}{6!}=\frac{-1}{90}\Rightarrow y^{(6)}(0)=-8$

Câu 8 – 20181 – Đề 2 – N1: Cho $y=\frac{2x}{x^2+1}$. Tính đạo hàm cấp cao $y^{(7)}(0)$.

$$y=\frac{2x}{x^2+1}=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'\Rightarrow y^{(7)}(x)=\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)^{(8)}.$$

Ta có: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$ => $\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\dots$

⇨ $\frac{-1}{4}=\frac{\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)^{(8)}(0)}{8!}\Rightarrow y^{(7)}(0)=\frac{-8!}{4}=-10080$

c. Vận dụng khai triển maclaurin để tìm giới hạn

Cách làm: khi x => 0. Khai triển cả tử và mẫu để số hạng có bậc lớn nhất phụ thuộc mẫu

Ví dụ:

Câu 9 – 20173 – Đề 1 – N1: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+2x^4}\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)}{x^5\ln\left(1-2x^3\right)}$

$x^5\ln\left(1-2x^3\right)\sim -2x^8$

$\sqrt{1+2x^4}\sim 1+x^4-\frac{x^8}{2}$

=>

$\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)\sim 1-x^4+\frac{x^8}{6}$

$$\sqrt{1+2x^4}\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)=1+x^4-\frac{x^8}{2}-x^4-x^8+\frac{x^8}{6}+o\left(x^8\right)=1+\frac{-4}{3}x^8$$

⇨ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+2x^4}\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)}{x^5\ln\left(1-2x^3\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}x^8}{-2x^8}=\frac{-2}{3}$

Chuyên đề 4: Các vấn đề về hàm số - đồ thị

I. Tìm cực trị

<u>Cách làm:</u> Hàm số y=f(x) có cực trị <=> y' đổi dấu

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số f(x)

Bước 2: Tìm y’, giải phương trình y’ = 0.

Bước 3: Lập bảng biến thiên và kết luận

<u>Ví dụ:</u>

Câu 5 – GK20141 – Đề 4: Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{3x}$

Điều kiện xác định: $x \neq 0$

$y'=\dfrac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}=\dfrac{3x^2-6}{9x^2}=\dfrac{x^2-2}{3x^2}$. $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Vẽ bảng biến thiên:

x	-∞		$-\sqrt{2}$		0			$\sqrt{2}$		∞
y’	1/3	+	0	-	-∞	-∞	-	0	+	1/3
y	-∞	↗	$\frac{-2\sqrt{2}}{3}$	↘	-∞	∞	↘	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	↗	∞

Vậy hàm số đạt cực đại $y=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$ tại x = $-\sqrt{2}$

Hàm số đạt cực tiểu y = $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ tại x = $\sqrt{2}$

Câu 5 – GK20151 – Đề 2: Tìm cực trị của hàm số $y=4x-5\sqrt[5]{x^4}$

$y=4x-5x^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y'=4-4x^{\frac{-1}{5}}=1-\dfrac{1}{x^{1/5}}=\dfrac{x^{1/5}-1}{x^{1/5}}$. Ta có bảng biến thiên

$y'=0 \Leftrightarrow x=1$

x	-∞		0		1		∞
y’		+		-	0	+	
y	-∞		0		-1		∞

II. Tiệm cận

1. $f(x)$

- Tiệm cận ngang: xét f(x) khi x tiến tới ∞ và -∞
- Tiệm cận đứng: xét f(x) tại điểm x gián đoạn
- Tiệm cận xiên: y = ax + b

Trong đó: $$\left[\begin{array}{l} a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right] \\ a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right] \end{array}\right.$$

2. $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$. Xét lim tiến tới t_o hoặc ∞

- Tiệm cận đứng: $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_o} f(t)=a \\ \lim\limits_{t\to t_o} g(t)=\infty \end{cases}$
- Tiệm cận ngang: $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_o} f(t)=\infty \\ \lim\limits_{t\to t_o} g(t)=b \end{cases}$
- Tiệm cận xiên:

Nếu $\lim\limits_{t\to t_o} f(t)=\infty$ và $\lim\limits_{t\to t_o} g(t)=\infty$ thì đường cong có thể có tiệm cận xiên.

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{t\to t_o}\dfrac{y}{x} \\ b=\lim\limits_{t\to t_o}(y-ax) \end{cases}$$

<u>Ví dụ:</u>

Tìm tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=1; \lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ => 2 tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} y=\infty; \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-} y=-\infty$ => 2 tiệm cận đứng

Câu 6 – GK20181 – D7 – N3: Tìm tiệm cận xiên của $y=xe^{2\frac{x+1}{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{2x+2}{x-1}}=e^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(y-e^2x\right)=4e^2 \Rightarrow y=e^2(x+4)$. Xét lim tại -∞ tương tự.

Câu 8 – GK20173 – D5 – N3: Tìm tiệm cận xiên y = ln(1+e^{-2x}).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+e^{-2x}\right)=0 \Rightarrow khongco$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{x}=-2\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(y+2x\right)=0 \Rightarrow y=-2x$$

<u>Ví dụ:</u> Tìm tiệm cận của $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t} \\ y=t^2 \end{cases}$

$$\lim_{t\to 0}x=\infty;\lim_{t\to 0}y=0 \Rightarrow TCN: y=0$$
$$\lim_{t\to\infty}x=0;\lim_{t\to\infty}y=\infty\Rightarrow TCD: y=0$$

Câu 9 – 20161 – D4:

Tìm các tiệm cận của đường cong cho bởi $x=\dfrac{2016t}{1-t^3};y=\dfrac{2016t^2}{1-t^3}$

$\lim_{t\to 1}x=\infty;\lim_{t\to 1}y=\infty$ => Không có TCD, TCN. Có TCX

$\lim_{t\to\infty}x=0;\lim_{t\to\infty}y=0$ => Không có

$$\lim_{t\to 1}\frac{y}{x}=\lim_{t\to 1}t=1;\lim_{t\to 1}\left(y-x\right)=\frac{-2016}{3}$$
$$\Rightarrow y=x-\frac{2016}{3}$$

III. Tiếp tuyến:

1. Tìm tiếp tuyến y = f(x) tại x_o.
   ⇨ $y = f'(x_o)(x-x_o) + y_o$

2. Tiếp tuyến của hàm số có tham số t: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ tại t_o

$$\frac{x-x\left(t_o\right)}{x'\left(t_o\right)}=\frac{y-y\left(t_o\right)}{y'\left(t_o\right)}$$

Ví dụ:

Câu 8 – 20181 – Đề 3 – N1: $\begin{matrix} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{matrix}$ tại $t_o = \frac{\pi}{2}$.

Ta có: $x_o = \frac{\pi}{2} - 1; y_o = 1$.

x'= 1 – cost => x'_o= 1 và y'= sint => y'_o= 1

- ⇨ $\frac{x - \frac{\pi}{2} + 1}{1} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} + 1 = y - 1 \Rightarrow x - y - \frac{\pi}{2} + 2 = 0$

3. Tọa độ cực: r = f(φ)

- Cách 1: Đưa về tọa độ Oxy

  $r = \sqrt{x^2 + y^2}; \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

  - ⇨ Từ f(x;y) = 0, viết pttt: $f'(x_o)(x - x_o) + f'(t_o)(y - y_o) = 0$

- Cách 2: Tính tan V = $\frac{r}{r'}$

  tan V = 0 => tt trùng bán kính cực

  tan V = ∞ => tt vuông góc bán kính cực

Ví dụ:

Câu 10 – 20181 – D1 – N1: tìm tiếp tuyến tại φ = 0 của r = 2+cos φ

Cách 1:

Với $\varphi = 0 => r = 3$. Chuyển tọa độ Oxy

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2} - x = 0 \Rightarrow M(3;0)$$

$$f'x = 2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \Rightarrow f'x_o = 3$$

$$f'y = 2y - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f'y_o = 0$$

- ⇨ 3(x – 3) + 0.y = 0 => x = 3

Cách 2:

r = 2+cos φ => r' = - sin φ = 0 và r = 3 => tan V = ∞ => Tiếp tuyến vuông góc r tại M => x = 3

Chuyên đề 5: Nguyên hàm – Tích phân

I. Bảng nguyên hàm

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg} x + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\right] + C$$

II. Một số cách tính nguyên hàm

- Đổi biến.
- Tích phân từng phần.
- Phân tích các phân thức.
- Hàm lượng giác:
  - áp dụng công thức t = tan(x/2)

⇨ $$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \text{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

  - Dạng $\int \sin^m x \cos^n x dx$

    + Nếu m lẻ: đặt t = cos x
    + Nếu n lẻ: đặt t = sin x
    + Nếu m,n chẵn: hạ bậc

<u>Ví dụ:</u>

$I = \int \sin^3 x \cos x^2 dx$.

Đặt t = cos x => $I = \int (t^2 - 1)t^2 dt = \int (t^4 - t^2) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C$ => $I = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$

Câu 7 – 20191 – N1 – Đề 2: $I=\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}dx$

$$I=\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}dx=\int \frac{x+2}{(x-1)^2+1}dx=\int\left(\frac{x-1}{(x-1)^2+1}+\frac{3}{(x-1)^2+1}\right)dx=\frac{\ln\left((x-1)^2+1\right)}{2}+3\arctan(x-1)+C$$

Câu 8 – 20183 – N1 – Đề 1: $I=\int \frac{\sqrt{2\ln x+1}}{x}dx=\frac{(2\ln x+1)^{3/2}}{3}+C$

Câu 7 – 20181 – Đề 3 – N1: $I=\int \arccos^2 x dx$

Đặt t = arccos x => x = cos t => dx = -sin t dt

$$I=\int -t^2\sin t dt=t^2\cos t-2\int t\cos t dt=t^2\cos t-2t\sin t-2\cos t+C$$

Câu 7 – 20181- N3 – Đề 7: $I=\int \frac{\arctan x}{x^2}dx \quad I$

Đặt t = arctan x => x = tan t => dx = ($\tan^2$t +1)dt

$$I=\int \frac{t(\tan^2 t+1)}{\tan^2 t}dt=\int \frac{tdt}{\sin^2 t}=\int td\left(\frac{-1}{\tan t}\right)=\frac{-t}{\tan t}+\ln|\sin t|+C=\frac{-\arctan x}{x}+\ln|\sin(\arctan x)|+C$$

Câu 7 – 20191 – N1 – Đề 3:

$$I=\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$u=\arcsin x => du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dv=\frac{dx}{\sqrt{1+x}}\Rightarrow v=2\sqrt{1+x}$$

$$I=2\arcsin x\sqrt{1+x}-\int \frac{2\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\arcsin x\sqrt{1+x}-\int \frac{2}{\sqrt{1-x}}dx=2\arcsin x\sqrt{1+x}+4\sqrt{1-x}+C$$

Câu 6 – 20181 – Đề 7 – N3:

$$I=\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx=\int \frac{tdt}{(t+1)^{1/4}}=\int\left[(t+1)^{3/4}-(t+1)^{-1/4}\right]dt=\frac{4}{7}(t+1)^{7/4}-\frac{4}{3}(t+1)^{3/4}+C=\frac{4}{7}(e^x+1)^{7/4}-\frac{4}{3}(e^x+1)^{3/4}+C$$

Câu 7 – 20181 – Đề 1 – N1:

$$I=\int \frac{x^2+2}{x^3-1}dx=\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx=\ln|x-1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+C$$

Câu 9 – 20183 – N1 – Đề 1: $I=\int \ln\left(x^2+x+1\right)dx$

Đặt $u=\ln\left(x^2+x+1\right)\Rightarrow du=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$dv=dx\Rightarrow v=x$

$\Rightarrow I=x\ln\left(x^2+x+1\right)-\int\dfrac{2x^2+x}{x^2+x+1}dx.$

Xét $I_1=\int\dfrac{2x^2+x}{x^2+x+1}dx=\int\left(2-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx=\int\left(2-\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}-\dfrac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\right)dx$

$=2x-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)$

⇨ $I=x\ln\left(x^2+x+1\right)-2x+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)+C$

Câu 7 – 20171 – Đề 4 – N1: $I=\int 2xe^x\sin x dx$

Đặt $u=2x\sin x\Rightarrow du=\left(2\sin x+2x\cos x\right)dx\Rightarrow du=2(\sin x+x\cos x)$

$dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x$

⇨ $I=2x\sin xe^x-\int 2\sin xe^xdx-\int 2x\cos xe^xdx$

Xét $I_1=\int 2x\cos xe^xdx$

Đặt $u=2x\cos x\Rightarrow du=\left(2\cos x-2x\sin x\right)dx\Rightarrow du=2(\cos x-x\sin x)$

$dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x$

⇨ $I_1=2x\cos xe^x-\int 2\cos xe^xdx+\int 2x\sin xe^xdx$

$I=2x\sin xe^x-\int 2\sin xe^xdx-2x\cos xe^x+\int 2\cos xe^xdx-\int 2x\sin xe^xdx$

⇨ $\Rightarrow I=2x\sin xe^x-2x\cos xe^x+2\int\left(\cos x-\sin x\right)e^xdx-I$

$\Rightarrow 2I=2xe^x\left(\sin x-\cos x\right)+2\cos xe^x$

$\Rightarrow I=xe^x\left(\sin x-\cos x\right)+\cos xe^x+C$

Chuyên đề 6: Tích phân suy rộng

I. Loại 1: $I = \int_a^\infty f(x)$

<u>Cách làm:</u>

- Tính $\int_a^A f(x)$ => $I = \lim_{x\to\infty} \int_a^A f(x)$.
- Nếu I hữu hạn => I hội tụ. Ngược lại, I không xác định => I phân kỳ

Tương tự:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)dx \text{ và } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty, A'\to-\infty} \int_{A'}^{A} f(x)dx$$

<u>Ví dụ:</u> $I = \int_1^\infty x dx \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

II. Loại 2: $I = \int_a^b f(x)$ trong đó f(x) không xác định tại a hoặc b

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

⇨ $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

<u>Ví dụ:</u> $\int_1^2 \frac{dx}{x-1} \qquad I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

III. Một số lưu ý khi giải bài

- $I = \int_a^\infty f(x) = \lim_{x\to\infty} \int_a^A f(x)$ $\qquad$ * $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \neq \int_{-t}^{t} f(x)$
- $I = \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$; phân kì khi $\alpha \le 1$
- $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ khi $\propto < 1$; phân kì khi $\propto \ge 1$

- Tiêu chuẩn so sánh áp dụng cho f(x), g(x) dương

  + $0 \le f(x) \le g(x)$ với mọi x > x_o

⇨ g hội tụ thì f hội tụ; f phân kì thì g phân kì

  + $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ hoặc x tiến tới điểm kì dị

⇨ k = 0 : g hội tụ => f hội tụ

⇨ k = ∞: g phân kỳ => f phân kỳ

⇨ k hữu hạn => f và g cùng tính chất

- Hội tụ và hội tụ tuyệt đối

1. Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối, còn nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nhưng $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kì thì ta nói $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ bán hội tụ.

2. Nếu $\int_a^{b} |f(x)|dx$ (có điểm bất thường là a hoặc b) hội tụ thì ta nói $\int_a^{b} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối, còn nếu $\int_a^{b} f(x)dx$ hội tụ nhưng $\int_a^{b} |f(x)|dx$ phân kì thì ta nói $\int_a^{b} |f(x)|dx$ bán hội tụ.

- $I = \int_a^b f(x)$ có a là điểm kỳ dị, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ hữu hạn thì I hội tụ

<u>Ví dụ:</u> $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ hội tụ

<u>Ví dụ:</u> $\int_0^1 \frac{dx}{\tan x}$ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$ $\int_2^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}dx$ $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{x}}$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x(x+2)^3}}$ (trị tuyệt đối)

Câu 10 – 20173: $I = \int_0^\infty \frac{x-\sin x}{\sqrt[3]{x^{10}}}$

$$I = \int_0^\infty \frac{x-\sin x}{\sqrt[3]{x^{10}}} = \int_0^1 \frac{x-\sin x}{\sqrt[3]{x^{10}}} + \int_1^\infty \frac{x-\sin x}{\sqrt[3]{x^{10}}} = I_1 + I_2$$

$I_1 = \int_0^1 \frac{x-\sin x}{\sqrt[3]{x^{10}}}$. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-\sin x}{\sqrt[3]{x^{10}}} : \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{1}{6}$ và $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}(ht)$. Tương tự I_2 hội tụ

Câu 9 – 20173 – đề 3: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+x^3}dx$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+x^3}dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x+x^3}dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x+x^3}dx = I_1 + I_2$$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x+x^3} = 1 \Rightarrow I_1$ hội tụ

I_2 hội tụ tuyệt đối => I hội tụ

Câu 10 – 20173 – đề 3: $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{(x+\ln(1+x))^3}}dx$

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{(x+\ln(1+x))^3}}dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{(x+\ln(1+x))^3}}dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{(x+\ln(1+x))^3}}dx = I_1 + I_2$$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{\sqrt{(x+\ln(1+x))^3}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ mà $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ => I_1 hội tụ

$\lim_{x\to \infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{(x+\ln(1+x))^3}} : \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{\pi}{2}$ mà $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ hội tụ => I_2 hội tụ

- ⇨ I hội tụ

Câu 10 – 20181 – đề 1 – N1: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}dx$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}dx = I_1 + I_2$$

Ta có: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}} : \frac{2x}{x\sqrt{x}} = 1$. Mà $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ => I_1 hội tụ

$I_2 = \int_1^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+2x) \Rightarrow du = \frac{2dx}{1+2x} \\ dv = x^{\frac{-3}{2}}dx \Rightarrow v = \frac{-2}{\sqrt{x}} \end{cases}$

- ⇨ $I_2 = \left.\frac{-2\ln(1+2x)}{\sqrt{x}}\right|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{4dx}{(1+2x)\sqrt{x}} = 2\ln 3 + I_3$

Với $I_3 = \int\limits_1^\infty \frac{4dx}{(1+2x)\sqrt{x}}$. Đặt

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow I_3 = \int\limits_1^\infty \frac{4.2tdt}{(1+2t^2)t} = \int\limits_1^\infty \frac{8dt}{1+2t^2} = 4\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{2}\right)$$

⇨ $I_2 = 2\ln 3 + 4\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{2}\right)$ hội tụ

⇨ I hội tụ

Câu 9 – 20181 – Đề 3 – N1: $\int\limits_0^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}+1-\cos x}dx$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}+1-\cos x}dx = \int\limits_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}+1-\cos x}dx + \int\limits_1^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}+1-\cos x}dx = I_1 + I_2$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}+1-\cos x} : \frac{x}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} \frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1-\cos x} = 1$ (ngắt vcb bậc cao)

$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ => I_1 hội tụ

$x \to \infty$ thì $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}+1-\cos x} < \frac{\pi/2}{x\sqrt{x}}$

$\int\limits_1^\infty \frac{\pi/2}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ => I_2 hội tụ

⇨ I hội tụ

Chuyên đề 7: Ứng dụng của tích phân xác định

I. Tính diện tích hình học phẳng:

- Oxy

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \qquad \begin{cases} c \le x \le d \\ x = \varphi(y) \\ x = \psi(y) \end{cases} \Rightarrow S = \int_c^d |\varphi(y) - \psi(y)|dy$$

$$\begin{cases} t_1 \le x \le t_2 \\ y = 0 \\ x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} |y.x'|dt$$

Ví dụ: $\begin{matrix} x + y \ge 2 \\ x^2 + y^2 \le 2x \end{matrix}$; $\begin{matrix} y = x^3 \\ y = x \\ y = 4x \\ x \ge 0 \end{matrix}$; y = x^2 + 4 và x – y +4 =0; y = |lnx|, y =1

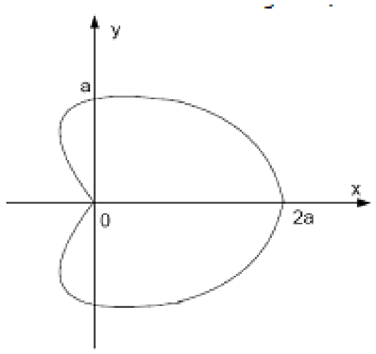
- Tọa độ cực

$$\begin{cases} \varphi = \alpha \\ \varphi = \beta \\ r = r(\varphi) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

Nhắc lại: Tính tan V = $\frac{r}{r'}$

tan V = 0 => tt trùng bán kính cực
tan V = ∞ => tt vuông góc bán kính cực

Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng tạo bởi r=a(1+cosφ)



$$r' = -a\sin\varphi = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \varphi = 0 \Rightarrow r = 2a \\ \varphi = \pi \Rightarrow r = 0 \end{matrix}$$

Hình vẽ có tính đối xứng $S = \int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi a^2}{2}$

Câu 5 – 20161 – Đề 6: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong cho bởi hệ tọa độ cực $r = 7 - 2\cos\varphi$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (7 - 2\cos\varphi)^2 d\varphi = 51\pi$$

II. Tính chiều dài đường cong phẳng

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2}dy$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$

Ví dụ: Tính chiều dài $\begin{matrix} x = a(1 - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{matrix}$ $0 \le t \le 2\pi$

Tính chiều dài $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Câu 7 – 20181 – Đề 5 – N2: Tính độ dài cung y = ln(cos x) với $0 \le x \le \pi/3$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

III. Tính thể tích

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b f(x)^2 dx = \pi\int_c^d g(y)^2 dy$$

Ví dụ: Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đường

$y = 2x - x^2$ và y = 0 khi xoay quanh trục Ox.

Ta có đường $y = 2x - x^2$ cắt trục Ox tại x = 0 và x = 2 nên ta có:

$$V_x = \pi\int_0^2 f^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2\right) = \frac{16\pi}{15}$$

IV. Tính diện tích mặt tròn xoay

- $S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ quay quanh Ox

(tương tự với x=g(y) quay quanh Oy)

- $S = 2\pi\int_a^b |x|\sqrt{x'^2 + y'^2}dt$

Ví dụ: Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi $\begin{matrix} x = y^2 \\ 0 \le y \le 1 \end{matrix}$

$$S = 2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}dy = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{1+4y^2}d(1+4y^2) = \frac{\pi}{4}.\left.\frac{(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

Ví dụ: Tính diện tích y = tan x, với 0 <x≤ π/4 quanh trục Ox

=> $S = \pi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du$

Câu 5 – 20173 – Đề 1 – Nhóm 1: Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi

$\begin{matrix} y = \sqrt{4-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{matrix}$ khi quay quanh Ox một vòng

$$S = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx$$

Câu 6 – 20183 – Đề 2 – Nhóm 1:

Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi

$(x-3)^2+(y+2)^2 = 4$

$\begin{matrix} x = 3+2\cos t \Rightarrow x' = -2\sin t \\ y = -2+2\sin t \Rightarrow y' = 2\cos t \end{matrix}$ => $S = 4\pi\int_0^{2\pi}(3+2\cos x)dx = 24\pi^2$